Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 11, 2004

УДК 27.21.00

КЛАССИФИКАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Т. М. Пуолокайнен

В работе дается классификация выпуклых многогранников в зависимости от того, существует ли в многограннике призматическая часть. Классификация имеет отношение к проблеме Хадвигера о возможности покрытия выпуклого многогранника многогранниками меньших размеров, гомотетичных данному.

В работе [1] Хадвигер сформулировал гипотезу, согласно которой для покрытия любого выпуклого тела в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ достаточно $2n$ тел меньших размеров, гомотетичных данному телу.

В работах автора [2], [3] сформулирована и решена задача покрытия некоторых классов выпуклых многогранников образами тел при гомотетии с коэффициентами, меньшими единицы. В работе [4] рассмотрено влияние перестроек многогранника на количество геометрических тел, являющихся образами данного многогранника при гомотетиях и достаточное для покрытия многогранника.

Проблема покрытия выпуклых многогранников образами тел при гомотетии и проблема классификации выпуклых многогранников связаны теснейшим образом. Классификация выпуклых многогранников необходима для того, чтобы рассматривать проблему покрытия не отдельно взятого выпуклого многогранника, а целого класса выпуклых многогранников. Предложенная ниже классификация выпуклых многогранников связана не с количеством многогранников меньших размеров, достаточным для того, чтобы покрыть многогранник определенного класса, а с приемами покрытия многогранников, относящихся к определенному классу.

§ 1. Некоторые определения. Введение классов выпуклых многогранников

Пусть M — выпуклый многогранник и l — некоторая прямая в пространстве. Пусть имеется n граней многогранника M, параллельных прямой l ($n > 2$). Возможны два случая.

Случай 1. Все n граней, параллельных направлению l, образуют одну компоненту связности.

Случай 2. Все n граней, параллельных направлению l, образуют две или более компонент связности. Рассмотрим более подробно первый случай. Пусть все грани многогранника, параллельные направлению l в пространстве, образуют одну компоненту связности. Тогда возможны следующие 5 случаев.

1. Компонента связности гомеоморфна кольцу. Ее граница состоит из двух замкнутых непересекающихся ломаных, каждая из которых топологически эквивалентна окружности. В этом случае будем говорить, что выпуклый многогранник содержит призматическую часть. Призматическая часть — это выпуклая поверхность с краем. Край состоит из 2 замкнутых ломаных, не имеющих общих точек. Выпуклый многогранник, содержащий призматическую часть, отнесем к классу B.

Замечание 1. Может случиться так, что выпуклый многогранник содержит не одну призматическую часть, параллельную прямой l, а несколько призматических частей, каждая из которых параллельна некоторой прямой в пространстве. Такой многогранник также отнесем к классу B.

2. Компонента связности топологически эквивалентна множеству W, которое можно получить следующим образом. Пусть две окружности w и w_1, центры и радиусы которых различны, касаются внутренним образом в точке L. Часть плоскости, заключенную между двумя окружностями w и w_1, обозначим через W. $W = \overline{w} \setminus \mathring{w}_1$, где $\overline{w}$ — круг, ограниченный окружностью w и $\mathring{w}_1$ — открытый круг, ограниченный окружностью w_1. Компоненту связности границы многогранника, топологически эквивалентную множеству W, назовем многогранной поверхностью переходного типа.

Многогранная поверхность переходного типа состоит из n граней и представляет собой поверхность с краем, являющимся объединением двух замкнутых ломаных, имеющих одну общую точку.

Если выпуклый многогранник M содержит поверхность переходного типа и не содержит призматической части, то его отнесем к классу C.

3. Компонента связности гомеоморфна множеству U_q, которое можно получить следующим образом. Пусть имеем окружность w и q окружностей $w_1, w_2, \ldots, w_q$, касающихся окружности w внутренним образом. Пусть окружности $w_1, w_2, \ldots, w_q$ таковы, что

$$\bigcap_{i=1}^{q} w_i \neq \emptyset.$$

Обозначим $U_q = \overline{w} | (\overline{w}_1 \cup \overline{w}_2 \cup \ldots \cup \overline{w}_q)$, где $\overline{w}$ — замкнутый круг, ограниченный окружностью $\overline{w}$, $\overline{w}_i$ — открытый круг, ограниченный окружностью w_i, $i = 1, 2, \ldots, q$; $q > 1$.

Компоненту связности, топологически эквивалентную множеству U_q, назовем также поверхностью переходного типа.

Если выпуклый многогранник содержит поверхность переходного типа и не содержит призматической части, то его отнесем к многогранникам класса C.

Замечание 2. Если поверхность выпуклого многогранника содержит несколько поверхностей переходного типа, параллельных различным направлениям, и не содержит призматической части, то такой многогранник также отнесем к многогранникам класса C.

4. Компонента связности гомеоморфна кругу. Ее граница представляет собой замкнутую ломаную, топологически эквивалентную окружности. Такую поверхность с краем назовем фрагментом призматической части вида 1. Если выпуклый многогранник M содержит фрагмент призматической части и не содержит призматическую часть или поверхность переходного типа, то выпуклый многогранник M отнесем к классу D.

5. Рассмотрим замкнутые круги $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_q$, ограниченные окружностями $w_1, \ldots, w_q$. Пусть множество кругов таково, что любые два круга $\overline{w}_i$ и $\overline{w}_{i+1}$, $i = 1, dots, n-1$, касаются, а любые два несоседних круга не имеют общих точек. Обозначим $W_q = \bigcup\limits_{i=1}^{q} \overline{w}_i$.

Компоненту связности поверхности выпуклого многогранника M, гомеоморфную множеству W_q, назовем фрагментом призматической части вида 2. Если выпуклый многогранник содержит фрагмент призматической части (вида 1 или вида 2) и не содержит призматическую часть или поверхность переходного типа, то такой многогранник отнесем к классу D.

Теперь приступим к рассмотрению второго случая, когда все n граней выпуклого многогранника образуют две или более компонент связности.

Каждая компонента состоит из трех или большего числа граней. Каждая компонента связности топологически эквивалентна кругу или множеству W_q. Будем говорить в этом случае, что выпуклый многогранник содержит несколько фрагментов призматической части, параллельных заданному направлению l.

Выпуклый многогранник, содержащий несколько фрагментов призматической части (вида 1 или вида 2), параллельных направлению l, и не содержащий призматической части или поверхности переходного типа, отнесем к классу D.

Замечание 3. Может оказаться так, что поверхность выпуклого многогранника содержит фрагменты призматической части (вида 1 или вида 2) не в одном направлении, а в нескольких. Такой выпуклый многогранник также отнесем к классу D, если он не содержит призматической части или поверхности переходного типа.

Замечание 4. Может оказаться так, что выпуклый многогранник, содержащий призматическую часть в одном или нескольких направлениях, содержит поверхность переходного типа или фрагменты призматической части в других направлениях. Такой многогранник отнесем к классу B. Если выпуклый многогранник, содержащий поверхность переходного типа в одном направлении, содержит фрагменты призматической части в других, то его отнесем к классу С при условии, что он не содержит призматической части.

Пусть выпуклый многогранник M обладает следующим свойством: не существует в пространстве такого направления l, что более двух соседних граней этого многогранника параллельны заданному направлению. Такие выпуклые многогранники отнесем к классу A. Многогранники этого класса не содержат ни призматической части, ни поверхности переходного типа, ни фрагментов призматической части (вида 1 или вида 2).

§ 2. Свойства выпуклых многогранников, связанные с классификацией

Рассмотрим выпуклый многогранник M, содержащий фрагмент призматической части вида 1. Обозначим грани этого фрагмента $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. К каждой грани фрагмента проведем единичный вектор внешней нормали. Все единичные векторы внешних нормалей граней перенесем на единичную сферу и обозначим $O\vec{M}_1, \ldots, O\vec{M}_n$, где O — центр единичной сферы.

Так как все грани фрагмента призматической части параллельны некоторому направлению l в пространстве, то все нормали граней фрагмента призматической части, перенесенные на единичную сферу, принадлежат одной плоскости, перпендикулярной направлению l, а значит, точки M_i $(i = 1, \ldots, k)$ лежат на одной окружности, центром которой является центр единичной сферы (окружности большого круга).

Нетрудно убедиться в том, что длина дуги M_1M_n, где

$$\smile M_1M_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} \smile V_iV_{i+1}$$

меньше длины окружности.

В самом деле, пусть некоторый выпуклый многогранник содержит фрагмент призматической части вида 1, состоящий из k граней $a_1, \ldots, a_k$, такой, что концы $M_1, \ldots, M_k$ единичных внешних нормалей $n_1, \ldots, n_k$ к граням фрагмента призматической части, перенесенных на единичную сферу S^2, соединенные последовательно дугами $M_1M_2, \ldots, M_{k-1}M_k$ таковы, что объединение дуг превышает одну окружность большого круга. Все внутренние ребра фрагмента призматической части поверхности выпуклого многогранника параллельны направлению l. Возможны два случая расположения граней первого и второго ґвиткаЄ фрагмента призматической части:

Случай 1: некоторая грань второго витка параллельна грани первого витка.

Случай 2: грани первого и второго витка не параллельны.

Рассмотрим 1 случай. Пусть α_1 — грань первого витка, а α_m — параллельная ей грань второго витка. Многогранник M выпуклый, поэтому наличие двух граней многогранника, параллельных друг другу и таких, что многогранник лежит в полупространствах по одну сторону от соответствующих плоскостей граней, противоречит определению выпуклого многогранника.

Рассмотрим 2-й случай: грани первого и второго витка не параллельны. Пусть грани α_1 и α_2 первого витка не параллельны граням α_{m-1} и α_m второго витка. Пусть A, B, C — вершины многогранника;

$$A \in \alpha_{m-1} \bigcap \alpha_m; \quad B,\ C \in \alpha_2.$$

Единичный вектор нормали грани, содержащей вершины A, B, C, не будет являться внутренним вектором по отношению к углу, составленному единичными нормальными векторами соседних граней, так как нормали граней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{m-1}, \alpha_m$ лежат в одной плоскости. Приходим к противоречию со свойством выпуклого многогранника.

Аналогично можно доказать следующие утверждения.

1) Пусть имеем выпуклый многогранник M класса B, призматическая часть которого параллельна направлению l. Не существует другой призматической части, или поверхности переходного типа, или фрагмента призматической части, параллельных направлению l и принадлежащих поверхности выпуклого многогранника M.
2) Пусть имеется выпуклый многогранник M класса C, поверхность переходного типа которого параллельна некоторому направлению l. Не существует другой поверхности переходного типа или фрагмента призматической части, параллельных направлению l и принадлежащих поверхности многогранника M.
3) Рассмотрим выпуклый многогранник M класса D, фрагмент призматической части которого параллелен направлению l в пространстве. Вынесем единичные внешние нормали граней фрагмента призматической части на единичную сферу. Обозначим концы единичных векторов через $A_1, \ldots, A_q$. Рассмотрим объединение дуг $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{q-1}A_q$. Получим дугу A_1A_q окружности большого круга. Пусть имеется еще один или несколько фрагментов призматических частей многогранника M, параллельных направлению l, которым соответствуют свои дуги окружности большого круга. Все полученные таким образом дуги окружности большого круга не имеют общих точек.

Итак, все выпуклые многогранники можно разбить на четыре непересекающихся класса: A, B, C, D.

A — выпуклые многогранники, не содержащие ни призматическую часть, ни поверхность переходного типа, ни фрагменты призматической части;

B — выпуклые многогранники, содержащие призматическую часть;

C — выпуклые многогранники, содержащие поверхность переходного типа, но не содержащие призматическую часть;

D — выпуклые многогранники, содержащие один или несколько фрагментов призматической части (вида 1 или вида 2), но не содержащие ни призматическую часть, ни поверхность переходного типа.

Résumé

The paper is continuation of the author's series of paper devoted to the solution of Hadviger's problem of covering convex polyhedrons with body images at homothety. The problem under discussion in this paper can be described as follows: to give the classification of all convex polyhedrons. Principle of classification the following: exists prismatic part of polyhedron or does not exist.

Библиографический список

[1] Hadwiger G. *Ungeloste Probleme* / G. Hadviger // References Elem. der Math. 1957. No 20. P. 121.

[2] Puolokainen T.M. *Covering Some Classes of Convex Polyhedrons With Body Images at Homothety* / T. M. Puolokainen // Teaching Mathematics and Physics in Secondary and Higher Education. Karelian State Pedagogical University, University of Yoensuu. 1998. P. 330–334.

[3] Puolokainen T. M. *Covering Three Classes of Convex Polyhedrons with Body Images at Homothety* / T. M. Puolokainen // Learning and Teacing Science and Mathematics in Secondary and Higher Education. Joensuu University Press. 2000. P. 236–239.

[4] Puolokainen T. M. *Restructuring of Convex Polyhedrons* / T. M. Puolokainen // Mathematics and Science Education in the North-East of Europe. Karelian State Pedagogical University, University of Joensuu. 2003. P. 62–65.

Карельский государственные педагогический
университет, кафедра геометрии,
185000, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 17