Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 11, 2004

УДК $511, 514.8, 530.1$

ВЗАИМНЫЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ I. ТОЧНЫЕ СПЕКТРЫ

Н. Ю. Светова

В работе рассмотрены точные взаимные мультифрактальные спектры, определенные для вероятностных борелевских мер, получены оценки для введенных спектров. Настоящая статья является продолжением статьи [1].

Пусть X является произвольным метрическим пространством с заданной метрикой. Через $B_r(x)$ обозначим замкнутый шар с центром в точке x и радиусом r; μ, ν — вероятностные борелевские меры; E — непустое подмножество X; $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ — центрированное δ-покрытие или центрированная δ-упаковка множества E. Для действительных значений q, t определим следующие функции множеств:

$$\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\delta}(E) = \inf\left\{\sum_i (\mu(B_{r_i}(x_i)))^q (\nu(B_{r_i}(x_i)))^t (2r_i)^s\right\},$$

$$\mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\delta}(E) = \sup\left\{\sum_i (\mu(B_{r_i}(x_i)))^q (\nu(B_{r_i}(x_i)))^t (2r_i)^s\right\},$$

где точные нижняя и верхняя грани берутся по всем конечным или счетным покрытиям и, соответственно, упаковкам множества E шарами диаметра, не превосходящего δ:

$$\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\delta}(\emptyset) = 0, \qquad \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\delta}(\emptyset) = 0,$$

$$\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\delta}(E), \qquad \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(E) = \inf_{\delta>0} \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,\delta}(E),$$

$$\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E) = \sup_{F\subseteq E} \mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(F), \qquad \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E) = \inf_{E\subseteq \bigcup_i E_i} \sum_i \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(E_i).$$

Назовем $\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E)$ *взаимной хаусдорфовой мерой*, $\mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E)$ — *взаимной упаковочной мерой*, а $\mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(E)$ — *взаимной предупаковочной мерой* множества E.

Взаимные мультифрактальные размерности $\dim^{q,t}_{\mu,\nu}(E)$, $\mathrm{Dim}^{q,t}_{\mu,\nu}(E)$ и $\Delta^{q,t}_{\mu,\nu}(E)$ множества E определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \dim^{q,t}_{\mu,\nu}(E) &= \sup\{s \geq 0 : \quad \mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E) = \infty\}, \\ \mathrm{Dim}^{q,t}_{\mu,\nu}(E) &= \sup\{s \geq 0 : \quad \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(E) = \infty\}, \\ \Delta^{q,t}_{\mu,\nu}(E) &= \sup\{s \geq 0 : \quad \mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu,0}(E) = \infty\}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение взаимные размерностные функции $b_{\mu,\nu}$, $B_{\mu,\nu}, \Lambda_{\mu,\nu} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [-\infty; +\infty]$, определенные по следующим формулам:

$$\begin{aligned} b_{\mu,\nu}(q,t) &= \dim^{q,t}_{\mu,\nu}(\mathrm{supp}\,\mu \cap \mathrm{supp}\,\nu), \\ B_{\mu,\nu}(q,t) &= \mathrm{Dim}^{q,t}_{\mu,\nu}(\mathrm{supp}\,\mu \cap \mathrm{supp}\,\nu), \\ \Lambda_{\mu,\nu}(q,t) &= \Delta^{q,t}_{\mu,\nu}(\mathrm{supp}\,\mu \cap \mathrm{supp}\,\nu). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что $B_{\mu,\nu}, \Lambda_{\mu,\nu}$ — выпуклые, собственные функции, в то время как функция $b_{\mu,\nu}$ не обязательно обладает этими свойствами.

Для выпуклой функции $B_{\mu,\nu}$ эффективной областью $\mathrm{Dom}\,B_{\mu,\nu}$ является подмножество точек двумерного евклидова пространства, в которых функция принимает конечные значения. Очевидно, что $\mathrm{Dom}\,B_{\mu,\nu}$ — выпуклое и непустое подмножество $\mathbb{R}^2$, а функция $B_{\mu,\nu}$ является замкнутой на внутренности эффективного множества ($\mathrm{int}\,\mathrm{Dom}\,B_{\mu,\nu}$), поэтому $B_{\mu,\nu}$ — выпуклая, собственная и замкнутая на множестве $\mathrm{int}\,\mathrm{Dom}\,B_{\mu,\nu}$.

Для функции $B_{\mu,\nu}$ определим сопряженную функцию

$$B^*_{\mu,\nu}(\alpha,\beta) = \sup_{q,t}\{\alpha q + \beta t - B_{\mu,\nu}(q,t)\}.$$

Эта функция представляет собой поточечную верхнюю грань аффинных функций $g(\alpha,\beta) = \alpha q + \beta t - s$ по всем параметрам q, t, s, принадлежащим надграфику $B_{\mu,\nu}$. Поэтому по теореме 12.2 [1] сопряженная функция по отношению к $B_{\mu,\nu}$ также является выпуклой, собственной и замкнутой на множестве $\mathrm{int}\,\mathrm{Dom}\,B^*_{\mu,\nu}$.

Пусть $B^{\circ}_{\mu,\nu} = -B_{\mu,\nu}$. Функция $B^{\circ}_{\mu,\nu}$, как следует из свойств $B_{\mu,\nu}$, также собственная, замкнутая на $\operatorname{int}\operatorname{Dom} B^{\circ}_{\mu,\nu}$ и, очевидно, вогнутая, причем $\operatorname{Dom} B^{\circ}_{\mu,\nu} = \operatorname{Dom} B_{\mu,\nu}$. Соответствующая сопряженная функция определяется с помощью формулы

$$B^{\circ *}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta) = \inf_{q,t}\{\alpha q + \beta t + B_{\mu,\nu}(q,t)\}.$$

Следуя терминологии Рокафеллара [1], для $(q,t) \in \operatorname{Dom} B_{\mu,\nu}$ определим *субдифференциал* функции $B_{\mu,\nu}$ в точке (q,t) как

$$\begin{aligned}\partial B_{\mu,\nu}(q,t) = \{(\alpha,\beta) :\ & B_{\mu,\nu}(\xi,\eta) \geq B_{\mu,\nu}(q,t) + \\ & +\alpha(q-\xi) + \beta(t-\eta), (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2\}.\end{aligned}$$

Вектор $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющий последнему неравенству, называется *субградиентом* выпуклой функции $B_{\mu,\nu}$ в точке (q,t).

Из свойств сопряженной функции и теоремы 23.5.1 [1] следует, что отображение $(\alpha,\beta) \to \partial B^{*}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta)$ является обратным по отношению к отображению $(q,t) \to \partial B_{\mu,\nu}(q,t)$, т. е.

$$(q,t) \in \partial B^{*}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta) \Longleftrightarrow (\alpha,\beta) \in \partial B_{\mu,\nu}(q,t).$$

Также очевидно, что $\operatorname{Dom} B^{*}_{\mu,\nu} = \operatorname{Dom} B^{\circ *}_{\mu,\nu}$.

В качестве эффективной области $\operatorname{Dom} b_{\mu,\nu}$ функции $b_{\mu,\nu}$ возьмем множество пар $\{(q,t)\colon\ (q,t) \in \mathbb{R}^2,\ b_{\mu,\nu}(q,t) < \infty\}$. Поскольку функция $b_{\mu,\nu}$ не является, вообще говоря, выпуклой, то рассмотрим наибольшую выпуклую функцию $b'_{\mu,\nu}$, которая мажорируется функцией $b_{\mu,\nu}$, так называемую выпуклую оболочку функции $b_{\mu,\nu}$, определенную на эффективной области $\operatorname{Dom} b_{\mu,\nu}$. Тогда $b'_{\mu,\nu}$ есть собственная, замкнутая, выпуклая функция на множестве $\operatorname{int}\operatorname{Dom} b_{\mu,\nu}$. Сопряженную функцию обозначим через $b^{*}_{\mu,\nu}$ и определим как поточечную верхнюю грань всех аффинных функций, мажорируемых $b_{\mu,\nu}$. Функция $b^{*}_{\mu,\nu}$ является сопряженной по отношению как к $b_{\mu,\nu}$, так и к ее выпуклой оболочке $b'_{\mu,\nu}$ (следствие 12.1.1, [1]), более того, она также собственная, замкнутая, выпуклая на внутренности соответствующей эффективной области.

Аналогично случаю функции $B_{\mu,\nu}$ определяются функция $b^{\circ}_{\mu,\nu}$ и множества $\partial b_{\mu,\nu}(q,t)$, $\operatorname{Dom} b^{*}_{\mu,\nu}$. Тогда $b^{\circ}_{\mu,\nu}(q,t) \geq b_{\mu,\nu}(q,t)$ для $(q,t) \in \mathbb{R}^2$ и $b^{\circ *}_{\mu,\nu} = \inf_{q,t}\{\alpha q + \beta t + b'_{\mu,\nu}\}$. Легко показать, что $\operatorname{int}\operatorname{Dom} b^{*}_{\mu,\nu} \subseteq \operatorname{int}\operatorname{Dom} B^{*}_{\mu,\nu}$.

Рассмотрим множество точек $K(\alpha,\beta)$, принадлежащих пересечению носителей мер μ и ν, для которых взаимная локальная размерность меры μ в точке равна α, а взаимная локальная размерность меры ν равна β, т. е.

$$K(\alpha,\beta)=\{x\in \operatorname{supp}\mu\cap\operatorname{supp}\nu\colon \lim_{\delta\to 0}\frac{\ln\mu(B_\delta(x))}{\ln\delta}=\alpha,\ \lim_{\delta\to 0}\frac{\ln\nu(B_\delta(x))}{\ln\delta}=\beta\}.$$

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1.

1) $\dim_{\mu,\nu}(K(\alpha,\beta))=\begin{cases}\le b^{0*}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta), & \textit{если } (\alpha,\beta)\in\operatorname{int}\operatorname{Dom} b^*_{\mu,\nu},\\ =0, & \textit{если } (\alpha,\beta)\notin\operatorname{int}\operatorname{Dom} b^*_{\mu,\nu}.\end{cases}$

2) $\operatorname{Dim}_{\mu,\nu}(K(\alpha,\beta))=\begin{cases}\le B^{0*}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta), & \textit{если } (\alpha,\beta)\in\operatorname{int}\operatorname{Dom} b^*_{\mu,\nu},\\ =0, & \textit{если } (\alpha,\beta)\notin\operatorname{int}\operatorname{Dom} b^*_{\mu,\nu}.\end{cases}$

Пусть дано метрическое пространство X, вероятностные меры μ, ν, положительные α, β. Допустим, что борелевское множество A является подмножеством $K(\alpha,\beta)$, q, t, $s\in\mathbb{R}$ и $\alpha q+\beta t+s\ge 0$.

Теорема 2.

1) *Если* $\mathcal{H}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(A)>0$, *тогда*

$$\dim_{\mu,\nu}(A)=\begin{cases}\ge b^{0*}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta), & \textit{если } (\alpha,\beta)\in\operatorname{int}\operatorname{Dom} b^*_{\mu,\nu},\\ =0, & \textit{если } (\alpha,\beta)\notin\operatorname{int}\operatorname{Dom} b^*_{\mu,\nu}.\end{cases}$$

2) *Если* $\mathcal{P}^{q,t,s}_{\mu,\nu}(A)>0$, *тогда*

$$\operatorname{Dim}_{\mu,\nu}(K(\alpha,\beta))=\begin{cases}\ge B^{0*}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta), & \textit{если } (\alpha,\beta)\in\operatorname{int}\operatorname{Dom} b^*_{\mu,\nu},\\ =0, & \textit{если } (\alpha,\beta)\notin\operatorname{int}\operatorname{Dom} b^*_{\mu,\nu}.\end{cases}$$

Напомним, что собственная выпуклая функция f называется *существенно гладкой*, если она удовлетворяет условиям:

а) $C=\operatorname{int}(\operatorname{Dom} f)\ne\emptyset$;

б) f — дифференцируемая в каждой точке множества C;

в) если $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность элементов из множества C, сходящаяся к точке $x\notin C$, то $\lim\limits_{i\to\infty}|\nabla f(x_i)|=+\infty$, где ∇f — градиентное отображение.

Преобразованием Лежандра пары (C, f) называется пара (D, g), где f — дифференцируемая функция на открытом множестве $C \subset \subset \mathbb{R}^n$, D — образ множества C при градиентном отображении ∇f, а g — функция на множестве D, определяемая формулой

$$g(x^*) = ((\nabla f)^{-1}(x^*), x^*) - f((\nabla f)^{-1}(x^*)),$$

где (u, v) означает скалярное произведение векторов u и v.

Предположим, что функция $B_{\mu,\nu}$ — дифференцируемая на множестве $\operatorname{int}\operatorname{Dom} B^*_{\mu,\nu}$. Ввиду того, что она является собственной, замкнутой и выпуклой функцией, то она также будет и существенно гладкой, поскольку множество последовательностей, удовлетворяющих условию в) пусто. Тогда согласно теореме 26.1 [1] субдифференциальное отображение является однозначным и сводится к градиентному отображению $\nabla B_{\mu,\nu}$, другими словами, множество $\partial B_{\mu,\nu}(q,t)$ содержит единственный вектор $\nabla B_{\mu,\nu}(q,t)$, если $(q,t) \in \operatorname{int}\operatorname{Dom} B_{\mu,\nu}$, и $\partial B_{\mu,\nu}(q,t)$ — пусто, если точка (q,t) не является элементом множества $\operatorname{int}\operatorname{Dom} B_{\mu,\nu}$. Из этих рассуждений, теоремы 26.4, следствия 26.4.1 [1] и свойств функций $B_{\mu,\nu}, b_{\mu,\nu}$ вытекает теорема.

Теорема 3.

1) Если функция $B_{\mu,\nu}$ дифференцируема на множестве $\operatorname{int}\operatorname{Dom} B_{\mu,\nu}$, тогда пара $(\operatorname{int}\operatorname{Dom} B_{\mu,\nu}, B_{\mu,\nu})$ имеет преобразование Лежандра (D, g) и

$$\alpha(q,t) = -\frac{\partial B_{\mu,\nu}(q,t)}{\partial q}, \qquad \beta(q,t) = -\frac{\partial B_{\mu,\nu}(q,t)}{\partial t}.$$

Предполагая, что $B^*_{\mu,\nu}(\alpha,\beta) \geq 0$ и $\mathcal{P}^{q,t,B_{\mu,\nu}(q,t)}_{\mu,\nu}(K(\alpha,\beta)) > 0$, имеем

$$\operatorname{Dim}_{\mu,\nu} K(\alpha,\beta) = B^{0,*}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta).$$

2) Если функция $b_{\mu,\nu}$ — выпуклая, замкнутая и дифференцируемая на множестве $\operatorname{int}\operatorname{Dom} b_{\mu,\nu}$, тогда пара $(\operatorname{int}\operatorname{Dom} b_{\mu,\nu}, b_{\mu,\nu})$ имеет преобразование Лежандра (D, g) и

$$\alpha(q,t) = -\frac{\partial b_{\mu,\nu}(q,t)}{\partial q}, \qquad \beta(q,t) = -\frac{\partial b_{\mu,\nu}(q,t)}{\partial t}.$$

Если $b^*_{\mu,\nu}(\alpha,\beta) \geq 0$ и $\mathcal{H}^{q,t,b_{\mu,\nu}(q,t)}_{\mu,\nu}(K(\alpha,\beta)) > 0$, то

$$\dim_{\mu,\nu} K(\alpha,\beta) = b^{0,*}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta).$$

Résumé

It has introduced the fine mutual multifractal spectra for Borel probability measures and received the estimations for these spectra.

Библиографический список

[1] Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ* / Р. Рокафеллар. М.: Мир, 1973. 471 с.

[2] Светова Н. Ю. *Условные и взаимные мультифрактальные спектры. Определение и основные свойства* / Н. Ю. Светова // Труды ПетрГУ. Сер. "Математика". 2003. Вып. 10. С. 41–58.

[3] Lau K. S. *Multifractal measures and a weak separation condition* / K.-S. Lau, S.-M. Ngai // Advances in mathematics. 1999. Ѓ 141. P. 45–96.

[4] Olsen L. *A multifractal formalism* / L. Olsen // Advances in mathematics. 1995. Ѓ 116. P. 82–195.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33