Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 11, 2004

УДК $511, 514.8, 530.1$

ВЗАИМНЫЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ II. СПЕКТРЫ ЛЕЖАНДРА, ХЕНТШЕЛЬ — ПРОКАЧИА И СПЕКТРЫ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ДЛЯ РАЗБИЕНИЙ

Н. Ю. Светова

В статье вводятся в рассмотрение такие емкостные спектры, как взаимные мультифрактальные спектры Лежандра, Хентшель — Прокачиа, спектры, определенные для разбиений и устанавливаются основные свойства упомянутых спектров.

Для произвольного подмножества E метрического пространства X, конечной или счетной центрированной упаковки $\{B_r(x_i)\}_i$ множества E замкнутыми шарами с фиксированным радиусом r положим

$$M^{q,t,\text{уп}}_{\mu,\nu,r}(E) = \sup\left\{\sum_{i\in I}(\mu(B_r(x_i)))^q(\nu(B_r(x_i)))^t\right\},$$

$$\underline{\dim}^{q,t,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(E) = \liminf_{r\to 0+}\frac{\ln M^{q,t,\text{уп}}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r},$$

$$\overline{\dim}^{q,t,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(E) = \limsup_{r\to 0+}\frac{\ln M^{q,t,\text{уп}}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}.$$

Функции $\underline{\dim}^{q,t,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}$, $\overline{\dim}^{q,t,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}$ назовем *нижней* и *верхней взаимными мультифрактальными емкостными размерностями.* Через $\underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)$ и $\overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)$ обозначим соответствующие взаимные емкостные размерности для упаковок, определенные на пересечении носителей мер. *Нижним* и *верхним взаимными мультифрактальными спектрами Лежандра* назовем функции

$$\underline{f}^{\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(\alpha,\beta) = \inf_{q,t}(\alpha q + \beta t + \underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)),$$

$$\overline{f}^{\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(\alpha,\beta) = \inf_{q,t}(\alpha q + \beta t + \overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)).$$

Определим *взаимные мультифрактальные емкостные размерности для покрытий* множества E замкнутыми шарами фиксированного радиуса

$$M^{q,t,\text{покр}}_{\mu,\nu,r}(E) = \inf\left\{\sum_{i\in I}(\mu(B_r(x_i)))^q(\nu(B_r(x_i)))^t\right\}.$$

Аналогично предыдущему случаю определим взаимные емкостные размерности для покрытий $\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)$, $\overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)$ и взаимные мультифрактальные спектры Лежандра $\underline{f}^{\text{покр}}_{\mu,\nu,B}(\alpha,\beta)$, $\overline{f}^{\text{покр}}_{\mu,\nu,B}(\alpha,\beta)$.

Теорема 1. *Для метрического пространства X, вероятностных борелевских мер μ, ν справедливы следующие утверждения:*

1) *если q, $t\in\mathbb{R}$, то*

$$\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t) \le \underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t), \quad \overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t) \le \overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t);$$

2) *если q, t — неположительны, то*

$$\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t) = \underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t), \quad \overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t) = \overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t);$$

3) *если q, $t\in\mathbb{R}$ и μ, ν — диаметрально регулярные вероятностные меры, то*

$$\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t) = \underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t), \quad \overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t) = \overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t);$$

В работе [1] приводится определение непрерывного, или интегрального, аналога производящей суммы $M^q_{\mu,r}(E)$ и для $q>1$ рассматриваются HP-спектры размерностей (или спектры Хентшель — Прокачиа), отвечающие мере μ. Также для классического мультифрактального анализа доказано, что для всех $q>1$ значение нижней (верхней) емкостной q-размерности множества X совпадает со значением нижнего (соответственно, верхнего) HP-спектра с точностью до нормирующего множителя $1/(q-1)$ [1].

В нашем случае положим

$$I^{q,t}_{\mu,\nu,r}(E) = \iint\limits_{\operatorname{supp}\mu\times\operatorname{supp}\nu}(\mu(B_r(x_i)))^{q-1}(\nu(B_r(x_i)))^{t-1}d\mu(x)d\nu(y).$$

Интегральные аналоги нижней и верхней взаимных мультифрактальных емкостных размерностей назовем *нижним* и *верхним взаимными мультифрактальными спектрами Хентшель — Прокачиа*:

$$\underline{\mathrm{HP}}_{\mu,\nu}(q,t) = \liminf_{r\to 0+} \frac{\ln I^{q,t}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \quad \overline{\mathrm{HP}}_{\mu,\nu}(q,t) = \limsup_{r\to 0+} \frac{\ln I^{q,t}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}.$$

Теорема 2. *Для метрического пространства X, вероятностных борелевских мер μ, ν, справедливы следующие утверждения:*

1) *если q, $t < 1$, то*

$$\underline{\mathrm{HP}}_{\mu,\nu}(q,t) \le \underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t), \quad \overline{\mathrm{HP}}_{\mu,\nu}(q,t) \le \overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t);$$

2) *если q, $t > 1$, то*

$$\underline{\mathrm{HP}}_{\mu,\nu}(q,t) \ge \underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t), \quad \overline{\mathrm{HP}}_{\mu,\nu}(q,t) \ge \overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t);$$

3) *если q, $t \in \mathbb{R}$ и μ, ν — диаметрально регулярные вероятностные меры, то*

$$\underline{\mathrm{HP}}_{\mu,\nu}(q,t) = \underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t), \quad \overline{\mathrm{HP}}_{\mu,\nu}(q,t) = \overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t).$$

В приложениях вместо покрытий и упаковок, конечно, удобнее пользоваться разбиением исследуемого множества на ячейки. Поэтому для натурального значения n рассмотрим разбиение $\mathcal{P}_n$ пространства $\mathbb{R}^d$ уровня n. Под элементами разбиения будем понимать ячейки вида

$$C = \prod_{i=1}^{d} \left[\frac{l_i}{2^n}; \frac{l_i+1}{2^n}\right), \quad \text{где} \quad l_1,\dots,l_d \in \mathbb{Z}.$$

Для произвольного подмножества E пространства X, вероятностных борелевских мер μ, ν, вещественных q и t положим

$$M^{q,t}_{\mu,\nu,n}(E) = \inf \sum_{i\in I:\, C_i\cap \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu\cap E\ne\emptyset} (\mu C_i)^q (\nu C_i)^t, \qquad E \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i,$$

где точная нижняя грань берется по всем возможным разбиениям $\mathcal{P}_n$ метрического пространства X.

В качестве *взаимных емкостных размерностей для разбиений* возьмем

$$\underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln M^{q,t}_{\mu,\nu,n}(E)}{n\ln 2},\quad \overline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln M^{q,t}_{\mu,\nu,n}(E)}{n\ln 2},$$

а *взаимные емкостные спектры Лежандра для разбиений* $\underline{f}^{\text{разб}}_{\mu,\nu,B}(\alpha,\beta)$ и $\overline{f}^{\text{разб}}_{\mu,\nu,B}(\alpha,\beta)$ определим аналогично предыдущим случаям.

Теорема 3. *Пусть $X=\mathbb{R}^d$, μ, ν — вероятностные борелевские меры.*

1) *Если q, $t<0$, то*

$$\underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)\geq\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t),\quad \overline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)\geq\overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t).$$

2) *Если q, $t\geq 0$, то*

$$\underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t),\quad \overline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t).$$

3) *Если $q\geq 0$, $t<0$ или $q<0\, t\geq 0$, то*

$$\underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)\geq\underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t),\quad \overline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)\geq\overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t).$$

4) *Если q, $t\in\mathbb{R}$ и μ, ν — диаметрально регулярные вероятностные меры, то*

$$\underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t),\quad \overline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t).$$

Для любой ячейки C_i разбиения $\mathcal{P}_n$ *увеличенной концентрической ячейкой* (или *увеличенной ячейкой*) будем называть объединение ячеек разбиения, имеющих общие точки с ячейкой C_i, т. е.

$$\overline{C}_i=\{\cup C_{i_k}\,:\,C_{i_k}\cap C_i\neq\emptyset\}.$$

Для произвольного подмножества E метрического пространства X обозначим

$$M^{q,t,\text{ув}}_{\mu,\nu,n}(E)=\sum_{\substack{C_i\in\mathcal{P}_n:\\ C_i\cap\operatorname{supp}\mu\cap\operatorname{supp}\nu\cap E\neq\emptyset}}(\mu\overline{C}_i)^q(\nu\overline{C}_i)^t,$$

$$\underline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t)=\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln M^{q,t,\text{ув}}_{\mu,\nu,n}(E)}{n\ln 2},\quad \overline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln M^{q,t,\text{ув}}_{\mu,\nu,n}(E)}{n\ln 2}.$$

Следует отметить, что увеличенные ячейки использовались в работе [5] для улучшения классического мультифрактального формализма.

Предложение 1. *Пусть $X = \mathbb{R}^d$, μ, ν — вероятностные борелевские меры, для отрицательных q и t выполнены неравенства*

$$\underline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t) \le \underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t), \quad \overline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t) \le \overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t).$$

Теорема 4. *Пусть $X = \mathbb{R}^d$. Если $q,t \ge 1$ или $q,t \in (0;1)$, то*

$$\underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t) = \underline{\mathrm{HP}}_{\mu,\nu}(q,t), \quad \overline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t) = \overline{\mathrm{HP}}_{\mu,\nu}(q,t).$$

Доказательство. 1) Пусть $q,t \ge 1$. Для произвольно выбранной точки $x_i \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu = E$ найдется ячейка C_i разбиения $\mathcal{P}_n$ пространства X, а также шар радиуса r с центром в x_i, для которых выполнено условие

$$x_i \in C_i \subset B_r(x_i) \subset \overline{C}_i = \bigcup_{\substack{C \in \mathcal{P}_n: \\ \operatorname{dist}(C, C_i) \ne \emptyset}} C.$$

Принимая во внимание условие q, $t \ge 1$, рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{i \in I: \\ C_i \cap E \ne \emptyset}} (\mu C_i)^q (\nu C_i)^t \le \sum_{\substack{i \in I: \\ C_i \cap E \ne \emptyset}} \iint\limits_{C_i \times C_i} (\mu B_r(x))^{q-1} (\nu B_r(y))^{t-1} d\mu(x) d\nu(y) =$$
$$= \iint\limits_{E \times E} (\mu B_r(x))^{q-1} (\nu B_r(y))^{t-1} d\mu(x) d\nu(y).$$

Поэтому $M^{q,t}_{\mu,\nu,n}(E) \le I^{q,t}_{\mu,\nu,r}(E)$, что влечет выполнение неравенства в одну сторону.

С другой стороны,

$$\iint\limits_{E \times E} (\mu B_r(x))^{q-1} (\nu B_r(y))^{t-1} d\mu(x) d\nu(y) \le \sum_{\substack{i \in I: \\ C_i \cap E \ne \emptyset}} (\mu \overline{C}_i)^q (\nu \overline{C}_i)^t \le$$

$$\le \sum_{\substack{i \in I: \\ C_i \cap E \ne \emptyset}} \left(\sum_{k=1}^{K} \mu C_{i_k} \right)^q \cdot \left(\sum_{k=1}^{K} \nu C_{i_k} \right)^t \le K^{q+t-2} \sum_{\substack{i \in I: \\ C_i \cap E \ne \emptyset}} \left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{K} (\mu C_{i_k})^q (\nu C_{i_s})^t \right).$$

Поскольку меры μ и ν — вероятностные, а q, t больше единицы или равны ей, то найдется константа A, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{K}(\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_s})^t \le A(\mu C_i)^q(\nu C_i)^t.$$

Тогда

$$\iint\limits_{E\times E}(\mu B_r(x))^{q-1}(\nu B_r(y))^{t-1}d\mu(x)d\nu(y) \le K^{q+t-2}A \sum_{\substack{i\in I:\\ C_i\cap E\ne\emptyset}}(\mu C_i)^q(\nu C_i)^t.$$

Таким образом, имеем $I^{q,t}_{\mu,\nu,r}(E) \le K^{q+t-2}A\cdot M^{q,t}_{\mu,\nu,n}(E)$. Переход к пределу заканчивает доказательство этого пункта.

2) Допустим $q,t\in(0;1)$. Аналогично предыдущему случаю для каждой точки $x_i\in E=\operatorname{supp}\mu\cap\operatorname{supp}\nu$ найдется ячейка C_i из разбиения пространства уровня n и шар $B_r(x_i)$: $x_i\in C_i\subset B_r(x_i)\subset\overline{C}_i$. Поскольку

$$(\mu C_i)^{q-1}\ge(\mu B_r(x_i))^{q-1}\ge(\mu\overline{C}_i)^{q-1},$$
$$(\nu C_i)^{q-1}\ge(\nu B_r(x_i))^{q-1}\ge(\nu\overline{C}_i)^{q-1},$$

то, используя выкладки для $I^{q,t}_{\mu,\nu,r}(E)$ в пункте 1, получим

$$\sum_{i\in I}(\mu B_r(x))^q(\nu B_r(y))^t \ge I^{q,t}_{\mu,\nu,r}(E).$$

Таким образом, для $0<q,\ t<1$ неравенства в одну сторону доказаны.

С другой стороны, рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{C_i\times C_i}(\mu B_r(x))^{q-1}(\nu B_r(y))^{t-1}d\mu(x)d\nu(y)\ge$$
$$\ge\sum_{i\in I}(\mu\overline{C}_i)^{q-1}\mu C_i(\nu\overline{C}_i)^{t-1}\nu C_i=\sum_{i\in I}\frac{\mu C_i}{(\mu\overline{C}_i)^{1-q}}\cdot\frac{\nu C_i}{(\nu\overline{C}_i)^{1-t}}.$$

Если для каждой ячейки C_i разбиения $\mathcal{P}_n$ существуют положительные константы K_1, $K_2<\infty$, для которых справедливы неравенства $K_1\mu C_i>\mu\overline{C}_i$ и $K_2\nu C_i>\nu\overline{C}_i$, тогда меры μ и ν удовлетворяют условию диаметральной регулярности, и, следовательно, можно воспользоваться теоремой 2 (п. 3) и теоремой 3 (п. 4). Допустим, что не для всех ячеек это условие выполнено. Множество всех ячеек, покрывающих E, разобьем на четыре, а именно:

$$\begin{aligned}
M &= \{i \in I: \quad \mu C_i \geq \mu(\overline{C}_i \setminus C_i) > 0, \quad \nu C_i \geq \nu(\overline{C}_i \setminus C_i) > 0\}, \\
N &= \{i \in I: \quad 0 < \mu C_i < \mu(\overline{C}_i \setminus C_i), \quad 0 < \nu C_i < \nu(\overline{C}_i \setminus C_i)\}, \\
P &= \{i \in I: \quad \mu C_i \geq \mu(\overline{C}_i \setminus C_i) > 0, \quad 0 < \nu C_i < \nu(\overline{C}_i \setminus C_i)\}, \\
R &= \{i \in I: \quad 0 < \mu C_i < \mu(\overline{C}_i \setminus C_i), \quad \nu C_i \geq \nu(\overline{C}_i \setminus C_i) > 0\}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\sum_{i\in I} \frac{\mu C_i}{(\mu\overline{C}_i)^{1-q}} \cdot \frac{\nu C_i}{(\nu\overline{C}_i)^{1-t}} \geq \sum_{i\in M} \frac{\mu C_i}{(\mu\overline{C}_i)^{1-q}} \cdot \frac{\nu C_i}{(\nu\overline{C}_i)^{1-t}} \geq$$
$$\geq \sum_{i\in M} \frac{\mu C_i}{\left(\mu C_i + \mu\left(\overline{C}_i \setminus C_i\right)\right)^{1-q}} \cdot \frac{\nu C_i}{\left(\nu C_i + \nu\left(\overline{C}_i \setminus C_i\right)\right)^{1-t}} \geq$$
$$\geq \sum_{i\in M} \frac{\mu C_i}{(2\mu C_i)^{1-q}} \cdot \frac{\nu C_i}{(2\nu C_i)^{1-t}} = \frac{1}{2^{2-q-t}} \sum_{i\in M} (\mu B_r(x))^q (\nu B_r(y))^t.$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{i\in N} (\mu C_i)^q (\nu C_i)^t < \sum_{i\in N} \left(\mu\left(\overline{C}_i \setminus C_i\right)\right)^q \left(\nu\left(\overline{C}_i \setminus C_i\right)\right)^t \leq$$
$$\leq \sum_{i\in N} \Bigl(\sum_{\substack{C_{i_k}\in\mathcal{P}_n:\\ C_{i_k}\cap C_i\neq\emptyset,\\ C_{i_k}\neq C_i}} \mu C_{i_k} \Bigr)^q \Bigl(\sum_{\substack{C_{i_k}\in\mathcal{P}_n:\\ C_{i_k}\cap C_i\neq\emptyset,\\ C_{i_k}\neq C_i}} \nu C_{i_k} \Bigr)^t \leq \sum_{i\in N} \sum_{\substack{C_{i_k}\in\mathcal{P}_n:\\ C_{i_k}\cap C_i\neq\emptyset,\\ C_{i_k}\neq C_i}} \sum_{\substack{C_{i_r}\in\mathcal{P}_n:\\ C_{i_r}\cap C_i\neq\emptyset,\\ C_{i_r}\neq C_i}} (\mu C_{i_k})^q (\nu C_{i_r})^t \leq$$
$$\leq \sum_{i\in N} A_1(d,q,t) \max_{\substack{C_i^*\subset\overline{C}_i\setminus C_i\\ C_i\in\mathcal{P}_n}} \left\{(\mu C_i^*)^q (\nu C_i^*)^t\right\} \leq A_1(d,q,t) \sum_{i\in I} (\mu C_i)^q (\nu C_i)^t.$$

Далее рассмотрим сумму

$$\sum_{i\in P} (\mu C_i)^q (\nu C_i)^t \leq \sum_{i\in P} (\mu C_i)^q \left(\nu\left(\overline{C}_i \setminus C_i\right)\right)^t \leq \sum_{i\in P} (\mu C_i)^q \Bigl(\sum_{\substack{C_{i_k}\in\mathcal{P}_n:\\ C_{i_k}\cap C_i\neq\emptyset,\\ C_{i_k}\neq C_i}} \nu C_{i_k} \Bigr)^t \leq$$
$$\leq A_2(d,t) \sum_{i\in P} \max_{\substack{C_i^*\subset\overline{C}_i\setminus C_i\\ C_i\in\mathcal{P}_n}} \left\{(\mu C_i)^q (\nu C_i^*)^t\right\} \leq A_2(d,t) \sum_{i\in I} (\mu C_i)^q (\nu C_i)^t.$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{i\in R} (\mu C_i)^q (\nu C_i)^t \leq A_3(d,q) \sum_{i\in I} (\mu C_i)^q (\nu C_i)^t.$$

Тогда

$$\sum_{i\in M}(\mu C_i)^q(\nu C_i)^t=\sum_{i\in I}(\mu C_i)^q(\nu C_i)^t-\sum_{i\in N}(\mu C_i)^q(\nu C_i)^t-\sum_{i\in P}(\mu C_i)^q(\nu C_i)^t-$$
$$-\sum_{i\in R}(\mu C_i)^q(\nu C_i)^t=(1-A_1(d,q,t)-A_2(d,t)-A_3(d,q))\sum_{i\in I}(\mu C_i)^q(\nu C_i)^t.$$

Следовательно, $I^{q,t}_{\mu,\nu,r}(E)\ge C\sum_{i\in I}(\mu C_i)^q(\nu C_i)^t$, где

$$C=1-A_1(d,q,t)-A_2(d,t)-A_3(d,q).$$

Последнее неравенство завершает доказательство теоремы. □

Из теорем 1–4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ.

1) *Если q, $t\le 0$, тогда*

$$\underline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\underline{\text{HP}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t),$$
$$\overline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\overline{\text{HP}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\overline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t).$$

2) *Если q, $t\in(0;1)$, тогда*

$$\underline{\text{HP}}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t),$$
$$\overline{\text{HP}}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t).$$

3) *Если q, $t\ge 1$, тогда*

$$\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\underline{\text{HP}}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t),$$
$$\overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\overline{\text{HP}}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t).$$

4) *Если $q\ge 1$, $t\in(0;1)$ или $q\in(0;1)$, $t\ge 1$, тогда*

$$\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\underline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t),$$
$$\overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t)=\overline{\tau}^{\text{ув}}_{\mu,\nu}(q,t).$$

5) *Если $q\in(0;1)$, $t\le 0$ или $q\le 0$, $t\in(0;1)$, тогда*

$$\underline{\text{HP}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t),$$
$$\overline{\text{HP}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t)\le\tau_{\mu,\nu}(q,t).$$

6) *Если* $q \le 0$, $t \ge 1$ *или* $q \ge 1$, $t \le 0$, *тогда*

$$\underline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t) \le \underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t) \le \underline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t),$$
$$\overline{\tau}^{\text{покр}}_{\mu,\nu}(q,t) \le \overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t) \le \overline{\tau}_{\mu,\nu}(q,t).$$

Предложение 2. *Для любых вещественных q и t и для положительных α, β выполнены условия*

$$\alpha q + \beta t + \underline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t) > 0, \quad \alpha q + \beta t + \overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t) > 0.$$

Следующая теорема позволит получить оценки для взаимных емкостных мультифрактальных спектров $\underline{f}^{\text{ем,вз}}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta)$, $\overline{f}^{\text{ем,вз}}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta)$, рассмотренных в статье [2].

Теорема 5. *Для вероятностных борелевских мер μ, ν, вещественнозначных q, t справедливы следующие утверждения:*

1) $\underline{f}^{\text{ем,вз}}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta) \le \underline{f}^{\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(\alpha,\beta) \le \underline{f}^{\text{разб}}_{\mu,\nu,B}(\alpha,\beta)$;
2) $\overline{f}^{\text{ем,вз}}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta) \le \overline{f}^{\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(\alpha,\beta) \le \overline{f}^{\text{разб}}_{\mu,\nu,B}(\alpha,\beta)$.

Доказательство теоремы основано на технике доказательств К.-С. Ло и С.-М. Нгаи [3].

Доказательство. Пусть q, $t \in \mathbb{R}$, выберем число s, для которого $\alpha q+\beta t+\overline{\tau}^{\text{уп}}_{\mu,\nu}(q,t) < s$. Используя предложение 2, можем сказать, что $s > 0$. Поэтому для достаточно малого r

$$M^{q,t,\text{уп}}_{\mu,\nu,r}(E) < r^{\alpha q+\beta t-s}. \qquad (*)$$

Для произвольного положительного числа ϵ рассмотрим такую центрированную упаковку $\{B_r(x_i)\}_i$ множества $E = \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$ замкнутыми шарами фиксированного радиуса r, мощность которой равна $N_r(\alpha,\beta,\epsilon)$ и для любого элемента упаковки выполнены неравенства $r^{\alpha+\epsilon} \le \mu(B_r(x_i)) \le r^{\alpha-\epsilon}$, $\quad r^{\beta+\epsilon} \le \nu(B_r(x_i)) \le r^{\beta-\epsilon}$. Тогда

$$M^{q,t,\text{уп}}_{\mu,\nu,r}(E) \ge \sum_i r^{\alpha q+\beta t+\epsilon(|q|+|t|)} = N_r(\alpha,\beta,\epsilon) r^{\alpha q+\beta t+\epsilon(|q|+|t|)}.$$

Используя оценку $(*)$, получим $N_r(\alpha,\beta,\epsilon) \ge r^{-s-\epsilon(|q|+|t|)}$. Поскольку s выбрали положительным и r достаточно малым, то $r^{-s-\epsilon(|q|+|t|)}$ строго меньше единицы. Тогда

$$\limsup_{r\to 0+} \frac{\ln N_r(\alpha,\beta,\epsilon)}{-\ln r} \le s + \epsilon(|q|+|t|).$$

При $\epsilon \to 0$ вытекает неравенство $\overline{f}^{\text{ем,вз}}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta) \leq \overline{f}^{\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(\alpha,\beta)$. Неравенство в другую сторону вытекает из следствия к теоремам 1 – 4. □

Résumé

In this paper we introduce such coarse multifractal spectra as the mutual Legendre multifractal spectra, the mutual Hentschel – Procaccia spectra and the spectra, which defined for partitions of metric space X.

Библиографический список

[1] Песин Я. Б. *Теория размерностей и динамические системы: современный взгляд и приложения* / Я. Б. Песин. М. – Ижевск, 2002. 404 с.

[2] Светова Н. Ю. *Условные и взаимные мультифрактальные спектры. Определение и основные свойства* / Н. Ю. Светова // Труды ПетрГУ. Сер. "Математика". 2003. Вып. 10. С. 41 – 58.

[3] Lau K.-S. *Multifractal measures and a weak separation condition* / K.-S. Lau, S.-M. Ngai // Advances in mathematics. 1999. Ѓ 141. P. 45 – 96.

[4] Olsen L. *A multifractal formalism* / L. Olsen // Advances in mathematics. 1995. Ѓ 116. P. 82 – 195.

[5] Riedi R. H. *An improved multifractal formalism and self–similar measeres* / R. H. Riedi // Journal of math analysis and application. 1995. Ѓ 189. P. 462 – 490.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33