Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 11, 2004

УДК 517.54

ТЕОРЕМА ИСКАЖЕНИЯ В ОДНОМ ПОДКЛАССЕ МЕРОМОРФНЫХ И ОДНОЛИСТНЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Е. П. Терехина

В статье дается оценка модуля производной мероморфной и однолистной в единичном круге функции с выпуклым дополнением образа.

Рассмотрим функцию $f(z)$, мероморфную и однолистную в круге $D = \{z \mid |z| < 1\}$ и имеющую в окрестности нуля разложение вида

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(f) z^n. \qquad (1)$$

В частности, это значит, что $f(z)$ или регулярна в D, или имеет простой полюс в некоторой точке b.

В работе [1] Ф. Г. Авхадиев и К.-Дж. Виртс ввели множество C_0 всех таких функций $f(z)$, которые мероморфны и однолистны в D и имеют разложение (1) в круге $\{z \mid |z| < |b|\}$, причем выполнено условие: $\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)$ — выпуклое множество.

В работе [1] была получена точная оценка

$$\frac{1+r^4}{r(1+r^2)} \le |a_2(f)| \le r + \frac{1}{r}, \qquad (2)$$

где $r = |f^{-1}(\infty)| \in (0,1]$.

Теорема 1. *Пусть $f(z) \in C_0$ и $r := |f^{-1}(\infty)| \in (0,1]$. Для любого $z = \rho e^{i\varphi} \in D$, $\rho < r$, справедлива оценка*

$$\frac{(1-r\rho)^2(r-\rho)^2}{r^2(1-\rho^2)^3} \le |f'(z)| \le \frac{r^2(1-\rho^2)}{(1-r\rho)^2(r-\rho)^2}. \qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g_\zeta(z) = \frac{f(\dfrac{z+\zeta}{1+\overline{\zeta}z}) - f(\zeta)}{f'(\zeta)(1-|\zeta|^2)},$$

где $f(z) \in C_0$ и $r := |f^{-1}(\infty)| \in (0,1]$, $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $\quad |\zeta| = \rho \neq r$. Тогда $g_\zeta(z) \in C_0$ и g_ζ имеет полюс в точке $z_b = \dfrac{b-\zeta}{1-\overline{\zeta}b}$. Тогда из правой части неравенства (2) следует, что $|a_2(g_\zeta)| \leq |z_b| + \dfrac{1}{|z_b|}$.

Обозначим

$$r(\rho) = \min_{|\zeta|=\rho} \left| \frac{b-\zeta}{1-\overline{\zeta}b} \right| = \left| \frac{r-\rho}{1-r\rho} \right|. \tag{4}$$

Тогда $|a_2(g_\zeta)| \leq r(\rho) + \dfrac{1}{r(\rho)}$, $a_2(g_\zeta) = \dfrac{g_\zeta''(0)}{2}$, следовательно, $2|a_2(g_\zeta)| = \left| \dfrac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \dfrac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2} \right| \leq \dfrac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2} \left(\left| \dfrac{r-\rho}{1-r\rho} \right| + \left| \dfrac{1-r\rho}{r-\rho} \right| \right)$, то есть для любого $\zeta \in D$, такого, что $|\zeta| = \rho \neq r$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{2\rho^2}{1-\rho^2} \right| \leq \frac{2\rho}{1-\rho^2} \left(\left| \frac{r-\rho}{1-r\rho} \right| + \left| \frac{1-r\rho}{r-\rho} \right| \right). \tag{5}$$

Заметим, что $\operatorname{Re}\left(\dfrac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right) = \rho \dfrac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(\zeta)|, \quad \rho = |\zeta|$.

Поэтому из неравенства (5) следует

$$\frac{2\rho^2}{1-\rho^2} - \frac{2\rho}{1-\rho^2} \left(\left| \frac{r-\rho}{1-r\rho} \right| + \left| \frac{1-r\rho}{r-\rho} \right| \right) \leq \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(\zeta)| \leq$$

$$\leq \frac{2\rho^2}{1-\rho^2} + \frac{2\rho}{1-\rho^2} \left(\left| \frac{r-\rho}{1-r\rho} \right| + \left| \frac{1-r\rho}{r-\rho} \right| \right). \tag{6}$$

При $\rho < r$ неравенство (6) примет вид

$$-\frac{2r}{1-r\rho} - \frac{2}{r-\rho} + \frac{6\rho}{1-\rho^2} \leq \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(\zeta)| \leq \frac{2r}{1-r\rho} + \frac{2}{r-\rho} - \frac{2\rho}{1-\rho^2}. \tag{7}$$

Интегрируя (7) по ρ от 0 до ρ, получаем оценку (3).

Чтобы решить вопрос о точности неравенства (3), используем функцию, рассмотренную в [1]

$$k_r(\zeta) = \frac{\zeta r}{(r-\zeta)(1-\zeta r)} \in C_0$$

$$k'_r(\zeta) = \frac{r^2(1-\zeta^2)}{(r-\zeta)^2(1-r\zeta)^2}.$$

Очевидно, что для этой функции при положительных ζ в верхней оценке (3) имеет место знак равенства. □

Исходя из неравенства (3), можно легко получить верхнюю оценку для модуля $|f(z)|$ при $\rho < r$. Для этого проинтегрируем правое неравенство в (3) по прямолинейному отрезку, соединяющему 0 с точкой z. Тогда получим

$$|f(z)| \le \int\limits_0^z |f'(z)||dz| = \int\limits_0^z |f'(z)|d|z| \le \int\limits_0^{|z|} \frac{r^2(1-\rho^2)}{(1-r\rho)^2(r-\rho)^2} d\rho =$$

$$= \frac{r|z|}{(1-r|z|)(r-|z|)}.$$

Следствие. *Для любой* $f(z) \in C_0$, $r := |f^{-1}(\infty)|$ *и для любого* $z \in D$, *такого, что* $|z| < r$, *справедливо неравенство*

$$|f(z)| \le \frac{r|z|}{(1-r|z|)(r-|z|)}.$$

Неравенство точное. Равенство в нем достигается для функции $k_r(z)$ при положительных z.

Теорема 2. *Пусть* $f(z) \in C_0$ *и* $r := |f^{-1}(\infty)| \in (0,1]$. *Для любого* $z = \rho e^{i\varphi} \in D$ *при* $\rho < r$ *справедлива оценка*

$$|\arg f'(z)| \le \log \frac{r^2(1-\rho^2)^2}{(1-r\rho)^2(r-\rho)^2}. \tag{8}$$

Под $\arg f'(z)$ при $z = \rho e^{i\theta}$ понимается такое значение $\arg f'(\rho e^{i\theta})$, которое получается при непрерывном изменении $\arg f'(te^{i\theta})$, когда t меняется от 0 до ρ, причем считаем $\arg f'(0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим неравенство (5).

Заметим, что $\operatorname{Im}\left(\dfrac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right) = \rho \dfrac{\partial}{\partial\rho} \arg f'(\zeta), \quad \rho = |\zeta|$.

Тогда

$$-\frac{2\rho}{1-\rho^2}\left(\left|\frac{r-\rho}{1-r\rho}\right| + \left|\frac{1-r\rho}{r-\rho}\right|\right) \le \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\arg f'(\zeta) \le$$
$$\le \frac{2\rho}{1-\rho^2}\left(\left|\frac{r-\rho}{1-r\rho}\right| + \left|\frac{1-r\rho}{r-\rho}\right|\right). \tag{9}$$

При $\rho < r$ неравенство (9) примет вид

$$-\frac{2r}{1-r\rho} - \frac{2}{r-\rho} + \frac{4\rho}{1-\rho^2} \le \frac{\partial}{\partial\rho}\arg f'(\zeta) \le \frac{2r}{1-r\rho} + \frac{2}{r-\rho} - \frac{4\rho}{1-\rho^2}. \tag{10}$$

Интегрируя (10) по ρ от 0 до ρ, получаем оценку (8). □

Résumé

It is obtained some estimates for functions from C_0 subset of meromorphic univalent in the unit disk functions.

Библиографический список

[1] Avkhadiev A. V. *Convex holes produce lower bounds for coefficients*/ A. V. Avkhadiev, K.-J. Wirths// Complex Variables. 2002. V. 47. Ѓ 7. P. 269–279.

[2] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* / Г. М. Голузин. М.: Наука, 1966.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33