Trudy Petrozavodskogo Gosudarstvennogo Universiteta
Seria "Matematika" Vipusk 12, 2005

УДК 681.3

О ВЕСЕ НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

М. А. Кононова

В работе А. В. Иванова [2] было введено понятие nd-веса пространства. Данная статья включает в себя дальнейшее исследование этого кардинальнозначного инварианта. В статье рассмотрены соотношения nd-веса, веса, плотности, а также числа Суслина. Получены оценки для nd-веса суммы и произведения топологических пространств. Доказано утверждение о том, что nd-вес не возрастает при открытых отображениях. Построен контрпример, показывающий, что при замкнутых отображениях nd-вес может возрастать. Доказано утверждение о существовании непрерывного отображения компакта произвольного nd-веса в компакт меньшего nd-веса. В работе приведен пример непрерывного отображения компактов без изолированных точек, уменьшающего nd-вес.

Определение 1. *nd-весом $ndw(X)$ топологического пространства X называется кардинальное число, определяемое по формуле*

$$ndw(X) = \sup\{w(F) : F \subset X,\ \mathrm{Int}[F] = \emptyset\}.$$

Очевидно, что nd-вес можно определить как верхнюю грань весов замкнутых нигде не плотных подмножеств. Из определения nd-веса сразу следует его монотонность, а также неравенство $ndw(X) \leq w(X)$.

Утверждение 1. *Пусть $f : X \to Y$ — открытое отображение X на Y. Тогда $ndw(Y) \leq ndw(X)$.*

Доказательство. Пусть F — нигде не плотное подмножество Y. Тогда $f^{-1}(F)$ нигде не плотно в X. Действительно, поскольку F замкнуто и $\mathrm{Int}(F) = \emptyset$, то $f^{-1}(F)$ замкнуто и $\mathrm{Int}(f^{-1}(F)) = \emptyset$. Далее, поскольку f открыто, то и сужение $f_F : f^{-1}(F) \to F$ открыто. Следовательно, $w(f^{-1}(F)) \geq w(F)$ (см. [5, с. 63]). Значит,

$$w(F) \leq w(f^{-1}(F)) \leq ndw(X),$$

откуда следует, что $ndw(Y) \leq ndw(X)$. $\square$

Пример. *Существует $f : X \to Y$ — замкнутое отображение X на Y, такое, что $ndw(Y) > ndw(X)$.*

Пусть $X = \mathbb{R}^2$ и $M = \{(x, y) \in X : x = n, n \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим на X разбиение R, единственным нетривиальным элементом которого является множество . Пусть $Y = X/R$ и $f : X \to Y$ — соответствующие фактор-пространство и фактор-отображение. Семейство $\sigma_Y = \{A : \ f^{-1}(A) \quad \}$ определяет замкнутую топологию на Y. Докажем, что f — замкнутое отображение. Для этого покажем, что для любой точки $y \in Y$ и для любого открытого в X множества U такого, что $f^{-1}(y) \subset U$, найдется открытое в Y множество V, для которого $y \in V$ и $f^{-1}(V) \subset U$.

Пусть сначала $y = y_0$. Поскольку $f^{-1}(y) \subset U$, то $U \supset M$. По определению отображения f имеем $f(U) = (U \setminus M) \cup \{y_0\}$. Положим $V = f(U)$. Ясно, что $f^{-1}(V) = U$. Пусть теперь $y \neq y_0$. Тогда $y \in \mathbb{R}^2 \setminus M$. Построим открытое в множество V такое, что $V \cap M = \emptyset$, $y \in f(V) = V$ и $V \subset U$ (такое V всегда существует). Таким образом, $f^{-1}(V) \subset U$. Следовательно, f — замкнутое отображение.

Рассмотрим множество

$$F = \{(x, y) : \ x \neq n, \ y = const, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_0\}.$$

Легко видеть, что F нигде не плотно в Y. Кроме того, $w(F) = $. Это утверждение фактически доказано в [5], однако, для полноты изложения, приведем его доказательство. Отождествим F с пространством, рассмотренным в [5]: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \cup \{y_0\}$. Значит, в F окрестности точки y_0 имеют вид $Oy_0 = (V \setminus \mathbb{N}) \cup \{y_0\}$, где $V \supset \mathbb{N}$, и V открыто на прямой. В точке y_0 не существует счетной базы. Действительно, рассмотрим произвольную последовательность окрестностей $(U_i \setminus \mathbb{N}) \cup \{y_0\}$ точки y_0. Для каждого U_i выберем по точке $x_i \in (U_i \setminus \mathbb{N})$, $x_i > i$. Множество $U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots\}$ открыто на прямой и содержит $\mathbb{N}$. Таким образом, $Oy_0 = (U \setminus \mathbb{N}) \cup \{y_0\}$ — окрестность точки y_0. Но тогда ни одно из множеств $(U_i \setminus \mathbb{N}) \cup \{y_0\}$ не содержит Oy_0. Следовательно, рассмотренная последовательность окрестностей базой в точке y_0 не является и, значит, $\chi(F) > \omega_0$.

Итак, $w(F) =$, следовательно, $ndw(Y) =$, в то время как $ndw(X) \leq w(X) = \omega_0$.

Утверждение 2. *nd-вес не мультипликативен.*

Контрпример. Пусть X^1 — прямая с дискретной топологией, X^2 — прямая с интервальной топологией. Тогда $ndw(X_1) = 0$ и $ndw(X_2) = \omega_0$. Но если $X = X_1 \times X_2$, то $ndw(X) = c$. Действительно, множество $F = \{(x_1, x_2) : x_2 = const\}$ является нигде не плотным в и $w(F) = c$. Наилучшую оценку в этом случае дает неравенство $ndw(X_1 \times X_2) \leq max(w(X_1), w(X_2))$, так как $ndw(X_1 \times X_2) \leq$ $\leq w(X_1 \times X_2) \leq max(w(X_1), w(X_2))$ (см. [5, с. 133]).

Утверждение 3. *Свойство «nd-вес $\leq \mu$» является μ-аддитивым при $\mu \geq \omega_0$. Справедлива оценка*

$$ndw(\bigoplus_{s\in S} X_s) \leq \sup(ndw(X_s), |S|).$$

Доказательство. Неравенство непосредственно следует из того, что свойство «вес $\leq \mu$» является μ-аддитивым при $\mu \geq \omega_0$ (см. [5, с. 125]), и для каждого F, нигде не плотного в $\bigoplus_{s\in S} X_s$, множества $F_s = F \cap X_s$ являются нигде не плотными соответственно в X_s. Замечание о мощности S нельзя опустить. Так, например, если в качестве X_s взять «связное двоеточие» (см. [1, с. 103]), а индексирующее множество S мощностью c, то мы получим, что nd-вес каждого слагаемого равен 1, а nd-вес суммы — c. $\square$

Что касается соотношений между $ndw(X)$, $c(X)$, $d(X)$, возможны следующие варианты:

1) $ndw(X) = d(X) = c(X)$. В качестве X достаточно взять прямую с интервальной топологией. Действительно, справедливы соотношения: $ndw(X) = d(X) = c(X) = \omega_0$;
2) $ndw(X) > d(X) = c(X)$. В качестве X достаточно взять пространство «две стрелки». Напомним, что X можно представить в виде $X = C_0 \cup C_1 \subset \mathbb{R}^2$, где $C_0 = \{(x, 0) : 0 < x \leq 1\}$ и $C_1 = \{(x, 1) : 0 \leq x < 1\}$ (см. [5, с. 318]). Рассмотрим на C_0 канторово совершенное множество (см. [1, с. 138]), которое является нигде не плотным в X, причем в данном случае его вес равен c. Следовательно, $ndw(X) = c$. Тогда как $d(X) = c(X) = \omega_0$;

3) $ndw(X) < d(X) = c(X)$. В качестве X достаточно взять произвольное дискретное пространство. Ясно, что дискретное пространство не содержит непустых нигде не плотных подмножеств. Значит, $ndw(X) = 0$, в то время как $d(X) = c(X) = |X|$.

Предложение 1. *Пусть $f : X \to Y$ — совершенное отображение X на Y. Тогда $ndw(Y) \le ndw(X)$.*

Доказательство представлено в [2].

Из предложения 1 непосредственно следует

Следствие. *Пусть — компакт, Y — хаусдорфово пространство и $f : X \to Y$ — непрерывное отображение X на Y. Тогда $ndw(Y) \le ndw(X)$.*

Утверждение 4. *Для любых двух кардинальных чисел λ, $\mu : \mu \ge \lambda$ существуют компакты X и Y такие, что X можно непрерывно отобразить на Y и $ndw(X) = \mu$, $ndw(Y) = \lambda$.*

Доказательство. Пусть $X = (\omega_0 + 1) \times (\mu + 1)$, $Y = (\omega_0 + 1) \times (\lambda + 1)$, где $\omega_0 + 1$, $\mu + 1$, $\lambda + 1$ — пространства ординалов с порядковой топологией. Пусть f — отображение сжатия:

$$f(\alpha, \beta) = \begin{cases} (\alpha, \beta) & \beta < \lambda, \\ (\alpha, \lambda) & \beta \ge \lambda. \end{cases}$$

Легко проверить, что f непрерывно в любой точке X, а также $ndw(X) = \mu$, $ndw(Y) = \lambda$. $\Box$

Пример. *Существует $f : X \to Y$ — непрерывное отображение X на Y, где X, Y — компакты без изолированных точек, такое, что $ndw(Y) < ndw(X)$.*

Пусть Y — отрезок $[0, 1]$ с интервальной топологией. — свободное произведение Y на отрезок $[0, 1]$ над точкой $y_0 = 0$: $X = Y \diamond (I, y_0)$ (см. [4, с. 8]; [3, с. 22]). Напомним, что данное топологическое пространство строится на множестве $X = Y \times I$ следующим образом. Каждой точке $y \in Y$ поставим в соответствие $I_y = [0, 1] \times \{y\}$. Пусть $x \in X$, V — открытое подмножество I_y, содержащее x. Если $_0 \notin V$, то окрестностью x в X является V. Если $_0 \in V$, то окрестность x имеет вид $(U \setminus \{y\}) \times [0, 1] \cup V$, где U — окрестность точки y в Y.

Заметим, что $w(X) = c$. Множество $F = \{(x, y) : y = c_0, c_0 \ne 0\}$ является нигде не плотным в , и $w(F) = c$, так как индуцированная топология на F дискретна. Следовательно, $ndw(X) = c$. В то время как $ndw(Y) = \omega_0$. Отображение $f : X \to Y$ — проекция квадрата на отрезок $[0, 1]$.

Résumé

In this paper we study the nd-weight of topological spaces. The relations between nd-weight, weight, density and cellularity are studied. The estimates for the nd-weight of the sum and the product of topological spaces are adduced. The problem of nd-weight increase at mappings is analysed, including the case of compact spaces.

Список литературы

[1] Александров П. С. *Введение в теорию множеств и общую топологию* / П. С. Александров. М.: Наука, 1977.

[2] Иванов А. В. *О весе нигде не плотных подмножеств в компактах* / А. В. Иванов // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44. № 6. С. 1266–1272.

[3] Иванов А. В. *Контрпримеры в теории компактных пространств* / А. В. Иванов // Электронная библиотека: [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://elibr.karelia.ru/

[4] Одинцов А. А. *Введение в теорию континуумов* / А. А. Одинцов. М.: Изд-во МГУ, 1989.

[5] Энгелькинг Р. *Общая топология* / Р. Энгелькинг. М.: Мир, 1986.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33