Trudy Petrozavodskogo Gosudarstvennogo Universiteta
Seria "Matematika" Vipusk 12, 2005

УДК 517

ОЦЕНКИ РАЗНОСТЕЙ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Мосягин

В работе получены оценки разности решений нелинейных интегральных уравнений в пространстве Банаха.

1. Рассмотрим интегральное неравенство, которое будет использовано в дальнейшем для оценки разности решений нелинейных интегральных уравнений в пространстве Банаха.

Лемма 1. [1] *Пусть $v(t)$ — непрерывная неотрицательная функция, удовлетворяющая при $t \geq t_0$ неравенству*

$$v(t) \leq \alpha + \int\limits_{t_0}^{t} [\beta + \gamma v(\tau)]\, d\tau,$$

где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$. Тогда $v(t)$ при $t \geq t_0$ удовлетворяет неравенству

$$v(t) \leq \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma(t-t_0)} - 1) + \alpha e^{\gamma(t-t_0)}.$$

Ниже всюду предполагается, что заданные функции в интегральных уравнениях удовлетворяют условиям, при которых эти уравнения однозначно разрешимы в рассматриваемых областях.

2. В банаховом пространстве E рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = h(t) + \int\limits_{0}^{t} K(t, s, x(s))\, ds, \tag{1}$$

где $x \in E$, h и K — E-значные функции, определенные на $\mathbb{R}^+$ и $D \times E$ соответственно, где $D = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le s \le t\}$, $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$. Пусть $||\cdot||$ — норма в E.

Теорема 1. *Пусть функции h и K в уравнении удовлетворяют условиям:*

1) *$h(t)$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}^+$;*
2) *$K(t,s,x)$ определена и непрерывна в области $D \times E$, и пусть в этой области $K(t,s,x) \in \mathrm{Lip}_x(L, D \times E)$, то есть*

$$||K(t,s,x_1) - K(t,s,x_2)|| \le L||x_1 - x_2||, \tag{2}$$

где $L > 0$, (t,s,x_1), $(t,s,x_2) \in D \times E$.

Далее, пусть $x(t)$ — решение уравнения (1), а $y(t)$ — решение уравнения

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s,y(s))\,ds, \tag{3}$$

где $g(t)$ — непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}^+$ функция.
Тогда справедлива оценка

$$||x(t) - y(t)|| \le \sup_{t \in \mathbb{R}^+} ||h(t) - g(t)|| e^{Lt}. \tag{4}$$

Доказательство. По условию теоремы для $t \in \mathbb{R}^+$ выполнены равенства

$$x(t) = h(t) + \int_0^t K(t,s,x(s))\,ds \tag{5}$$

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s,y(s))\,ds. \tag{6}$$

Из двух последних равенств получаем неравенство

$$||x(t) - y(t)|| \le \sup_{t \in \mathbb{R}^+} ||x(t) - y(t)|| + L \int_0^t ||x(s) - y(s)||\,ds.$$

Отсюда, в силу леммы 1, получаем оценку (4). Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть в банаховом пространстве E заданы интегральные уравнения*

$$x(t) = \int_0^t K_0(t,s,x(s))\,ds, \tag{7}$$

$$y(t) = \int_0^t K_0(t,s,y(s))\,ds + \int_0^t K_1(t,s,y(s))\,ds, \tag{8}$$

где функции $K_0(t,s,x)$ и $K_1(t,s,y)$ определены и непрерывны в области $D \times E$, и пусть в этой области

$$K_0(t,s,x) \in \mathrm{Lip}_x(\lambda, D\times E), \quad K_1(t,s,y) \in \mathrm{Lip}_y(\lambda, D\times E);$$

пусть, кроме того, $||K_1(t,s,y)|| \le \beta$ для всех $(t,s,y) \in D \times E$.
Тогда для разности решений $x(t)$ и $y(t)$ соответственно уравнений (7) и (8) справедливо неравенство

$$||x(t) - y(t)|| \le \frac{\beta}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1). \tag{9}$$

Доказательство. Для всех $t \in \mathbb{R}^+$ справедливы равенства

$$x(t) = \int_0^t K_0(t,s,x(s))\,ds,$$

$$y(t) = \int_0^t K_0(t,s,y(s))\,ds + \int_0^t K_1(t,s,y(s))\,ds.$$

Следовательно,

$$||x(t) - y(t)|| \le \int_0^t (\beta + \lambda||x(t) - y(t)||\,ds.$$

Отсюда, в силу леммы 1, получаем неравенство (9). Теорема доказана. □

3. Для интегральных уравнений Урысона в банаховом пространстве E справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть в банаховом пространстве E заданы интегральные уравнения*

$$x(t) = \int_0^T H(t,s,x(s))\,ds, \tag{10}$$

$$y(t) = \int_0^T H(t,s,y(s))\,ds + \int_0^T R(t,s,y(s))\,ds, \tag{11}$$

где $H(t,s,x)$ и $R(t,s,y)$ — E-значные функции, определенные и непрерывные в области $G \times E$, $G = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq s \leq t, t \in [0,T]\}$, и пусть в этой области $H(t,s,x) \in \mathrm{Lip}_x(r, G \times E)$, $R(t,s,y) \in \mathrm{Lip}_y(l, G \times E)$ и пусть, кроме того, $||R(t,s,y)|| \leq \delta$ для всех $(t,s,y) \in G \times E$.
Тогда для разности решений $x(t)$ и $y(t)$ соответственно уравнений (10) и (11) справедливо неравенство

$$||x(t) - y(t)|| \leq \frac{\delta}{l}(e^{rt} - 1). \tag{12}$$

Доказательство. Для $t \in [0,T]$ справедливы равенства

$$x(t) = \int_0^T H(t,s,x(s))\,ds,$$

$$y(t) = \int_0^T H(t,s,y(s))\,ds + \int_0^T R(t,s,y(s))\,ds.$$

Следовательно,

$$||x(t) - y(t)|| \leq \int_0^T (\delta + r||x(s) - y(s)||\,ds.$$

Отсюда, в силу леммы 1, получаем неравенство (12). Теорема доказана. □

Résumé

In this paper we consider estimations of difference of nonlinear integral equations in Banach space.

Список литературы

[1] Мартынюк А. А. *Устойчивость движения: метод интегральных неравенств* / А. А. Мартынюк, В. Лакшмикантам, С. Лила. Киев: Наукова думка, 1989.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33