Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 13, 2006

УДК 517.518

Е. С. Белкина

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАНКЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ. I

В работе рассматриваются некоторые задачи теории приближений функций на прямой в метрике L_2 с некоторым весом целыми функциями экспоненциального типа. Используемые в задачах модули непрерывности строятся при помощи операторов обобщенного сдвига Данкля. Доказаны прямые теоремы джексоновского типа.

Введение

В классической теории приближений функций на $\mathbb{R}$ в метриках L_p или C большую роль играет оператор сдвига $f(x) \mapsto f(x+h), x, h \in \mathbb{R}$, и связанная с ним техника анализа Фурье. Сдвиги образуют однопараметрическую группу изометрий банаховых пространств (БП) $L_p(\mathbb{R})$ или $C(\mathbb{R})$. Многие задачи теории приближений могут быть распространены и на абстрактную ситуацию, когда в произвольном БП имеется однопараметрическая группа или полугруппа операторов (см. [1, 2]). Другим естественным обобщением операторов сдвига на $\mathbb{R}$ являются операторы обобщенного сдвига Дельсарта — Левитана [3]. Операторы обобщенного сдвига образуют однопараметрическое семейство операторов $f(x) \mapsto T^h f(x)$, которое не является группой или полугруппой операторов (т. е. $T^a T^b$ может не равняться T^{a+b}), но тем не менее многие задачи гармонического анализа можно обобщить, используя обобщенный сдвиг вместо обычного. В частности, можно обобщать различные задачи теории приближений функций. Некоторые результаты в этом направлении получены в работах [4 – 9]. В настоящей работе рассматриваются операторы обобщенного сдвига Данкля (определение этих операторов см. далее) и с их помощью изучаются задачи теории приближений функций на прямой $\mathbb{R}$ в метрике

L_2 с некоторым весом. В частности, доказаны прямые теоремы Джексоновского типа для обобщенного модуля непрерывности k-го порядка. В качестве средства приближения используется некоторый класс целых функций экспоненциального типа.

§ 1. Формулировка основных результатов

Оператором Данкля называется следующий дифференциально-разностный оператор D:

$$Df(x) = \frac{df}{dx}(x) + \big(\alpha + \frac{1}{2}\big)\frac{f(x) - f(-x)}{x}, \qquad \alpha > -\frac{1}{2}. \tag{1.1}$$

Действие оператора D определено для всех функций $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$.

Введем обобщенную экспоненциальную функцию

$$e_\alpha(x) := j_\alpha(x) + i\, c_\alpha\, x\, j_{\alpha+1}(x), \tag{1.2}$$

где

$$c_\alpha = \big(2(\alpha+1)\big)^{-1}, \quad i = \sqrt{-1},$$

$j_\alpha(x)$ — нормированная функция Бесселя первого рода, т. е.

$$j_\alpha(x) = \frac{2^\alpha\, \Gamma(\alpha+1)\, J_\alpha(x)}{x^\alpha},$$

где $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода (см. [10, с. 412]).

Используя соотношение

$$j'_\alpha(x) = -\frac{x j_{\alpha+1}(x)}{2(\alpha+1)},$$

которое следует, например, из формулы 8.472 в [16], получим, что функцию $e_\alpha(x)$ можно также записать в виде

$$e_\alpha(x) = j_\alpha(x) - i j'_\alpha(x). \tag{1.3}$$

Проверим, что функция $y = e_\alpha(x)$ удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению

$$Dy = iy \tag{1.4}$$

с начальным условием $y(0) = 1$.

Учитывая, что функция $y = j_\alpha(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2\alpha+1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

и является четной функцией (см. [10]), вычисляем $De_\alpha(x)$:

$$De_\alpha(x) = e'_\alpha(x) + \big(\alpha + \frac{1}{2}\big)\,\frac{e_\alpha(x) - e_\alpha(-x)}{x} =$$
$$= j'_\alpha(x) - ij''_\alpha(x) + \big(\alpha + \frac{1}{2}\big)\,\frac{j_\alpha(x) - ij'_\alpha(x) - j_\alpha(-x) + ij'_\alpha(-x)}{x} =$$
$$= j'_\alpha(x) - i(j''_\alpha(x) + \frac{2\alpha+1}{x}j'_\alpha(x)) = j'_\alpha(x) + ij_\alpha(x) =$$
$$= i(j_\alpha(x) - ij'_\alpha(x)) = ie_\alpha(x),$$

что доказывает равенство (1.4). Так как $j_\alpha(0) = 1$ и $j'_\alpha(0) = 0$, то $e_\alpha(0) = 1$.

Пусть $\mathcal{E} = C^\infty$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, C — множество непрерывных функций на $\mathbb{R}$, C_c — множество непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем (все функции предполагаются комплекснозначными). Пространства $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, C, C_c снабжаются обычными топологиями. Через $\mathcal{D}'$ обозначим множество всех обобщенных функций, т. е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}$ будем обозначать $\langle f, \varphi\rangle$.

Через $L_{2,\alpha}$ обозначим гильбертово пространство (ГП), состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $\mathbb{R}$ (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль), для которых конечна норма

$$\|f\|_{2,\alpha} := \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,|x|^{2\alpha+1}\,dx\Big)^{1/2}.$$

Скалярное произведение в ГП $L_{2,\alpha}$ определяется формулой

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x)\,g(x)\,|x|^{2\alpha+1}\,dx, \qquad f, g \in L_{2,\alpha}. \tag{1.5}$$

Пространство $L_{2,\alpha}$ вкладывается в $\mathcal{D}'$, если для $f \in L_{2,\alpha}$ и $\varphi \in \mathcal{D}$ положить

$$\langle f, \varphi \rangle := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,|x|^{2\alpha+1}\,dx.$$

Оператор обобщенного сдвига Данкля $T^y f(x)$ можно определять различными способами. Для функции $f(x) \in \mathcal{D}$ оператор обобщенного сдвига Данкля $u(x,y) = T^y f(x)$ можно определить как решение следующей задачи Коши (см., например, [11]):

$$D_x u(x,y) = D_y u(x,y); \tag{1.6}$$

$$u(x,0) = f(x), \tag{1.7}$$

где D_x и D_y — дифференциально-разностные операторы Данкля, примененные по переменным x и y соответственно.

Оператор T^y продолжается по непрерывности с подпространства $\mathcal{D} \subset L_{2,\alpha}$ на все пространство $L_{2,\alpha}$ (см. далее §2), продолженный оператор также будем обозначать T^y.

Обозначим через $\mathcal{I}_\nu$, $\nu > 0$, множество всех функций $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $g(x)$ — целая функция экспоненциального типа $\leq \nu$;
2) $g(x)$ принадлежит пространству $L_{2,\alpha}$.

Функции из $\mathcal{I}_\nu$ будут использоваться в качестве средства приближения. Отметим (см. подробнее §3), что функции из $\mathcal{I}_\nu$ допускают также другое описание: $g(x) \in \mathcal{I}_\nu$ тогда и только тогда, когда $g(x) \in L_{2,\alpha}$ и ее преобразование Данкля $\widehat{g}(\lambda)$ равно 0 при $|\lambda| > \nu$ (такие функции мы будем называть функциями с ограниченным спектром порядка ν).

При помощи обобщенного сдвига Данкля для любой функции $f(x) \in L_{2,\alpha}$ определим разности с шагом $h > 0$:

$$\Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x) := f(x) - T^h f(x), \quad \ldots, \quad \Delta_h^k f(x) := \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(x)).$$

Можно также написать, что

$$\Delta_h^k f(x) = (I - T^h)^k f(x),$$

где I — единичный оператор.

Для любого натурального k обобщенный модуль непрерывности порядка k в метрике $L_{2,\alpha}$ определим формулой

$$\omega_k(f,\delta)_{2,\alpha} := \sup_{0<h\le\delta} \|\Delta_h^k f\|_{2,\alpha}, \quad \delta>0, \quad f\in L_{2,\alpha}.$$

Наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\alpha}$ функциями из $\mathcal{I}_\nu$ определяется как

$$E_\nu(f)_{2,\alpha} := \inf_{g\in\mathcal{I}_\nu} \|f-g\|_{2,\alpha}.$$

Следующая теорема является аналогом классической первой теоремы Джексона из теории приближения функций.

Теорема 1.1. *При $f\in L_{2,\alpha}$ справедливо неравенство*

$$E_\nu(f)_{2,\alpha} \le c_1\,\omega_k(f,1/\nu)_{2,\alpha}, \tag{1.8}$$

где c_1 — некоторая положительная постоянная, зависящая только от k и α.

Действие оператора D расширяется на пространство $\mathcal{D}'$, если положить

$$\langle Df,\varphi\rangle := -\langle f, D\varphi\rangle, \qquad f\in\mathcal{D}', \quad \varphi\in\mathcal{D}.$$

В частности, т. к. $L_{2,\alpha}\subset\mathcal{D}'$, то для любой функции $f\in L_{2,\alpha}$ определены обобщенные функции $Df, D^2f,\ldots$, принадлежащие $\mathcal{D}'$.

Следующая теорема является аналогом второй прямой теоремы Джексона.

Теорема 1.2. *Пусть функции $f, Df,\ldots,D^sf$ принадлежат пространству $L_{2,\alpha}$, где D — оператор Данкля. Тогда*

$$E_\nu(f)_{2,\alpha} \le c_2\,\nu^{-s}\omega_k(D^sf,1/\nu)_{2,\alpha}, \tag{1.9}$$

где $c_2=c_2(k,s,\alpha)>0$ — некоторая постоянная.

Доказательство теорем 1.1 и 1.2 (см. §4) является основной целью настоящей статьи. В §2 приводятся необходимые сведения о преобразованиях Данкля и обобщенных сдвигах Данкля. В §3 рассматриваются функции с ограниченным спектром и их свойства.

§ 2. Преобразования Данкля и обобщенные сдвиги Данкля

Приведем необходимые сведения о преобразованиях Данкля и обобщенных сдвигах Данкля (см. [11, 12]).

Преобразованием Данкля называется следующее интегральное преобразование

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e_\alpha(\lambda x)\, |x|^{2\alpha+1}\, dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Обратное преобразование Данкля задается формулой

$$f(x) = \big(2^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)\big)^{-2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)\, e_\alpha(-\lambda x)\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda. \tag{2.2}$$

При $f \in \mathcal{D}$ преобразования (2.1) и (2.2) определены и являются взаимно обратными, при этом справедливо равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, |x|^{2\alpha+1}\, dx = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda, \tag{2.3}$$

где

$$A = (2^\alpha\,\Gamma(\alpha+1))^{-2}\,. \tag{2.4}$$

Отображение $f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ продолжается по непрерывности до изоморфизма гильбертова пространства $L_{2,\alpha}$ на себя. Продолженное отображение будем также обозначать $f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ и называть преобразованием Данкля, при этом остается справедливой формула (2.3), которую можно также записать в виде

$$\|f\|_{2,\alpha}^2 = A\,\|\widehat{f}\|_{2,\alpha}^2. \tag{2.5}$$

В §1 мы определили оператор обобщенного сдвига Данкля $T^y f(x)$ как решение задачи Коши (1.6) - (1.7). Для любой функции $f(x) \in \mathcal{E}$ решение этой задачи Коши существует, единственно и может быть выписано в явном виде (см. [11]):

$$T^y f(x) = C\left(\int_0^\pi f_e(\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi})\, h^e(x,y,\varphi)\, \sin^{2\alpha}\varphi\, d\varphi + \right.$$

$$+\int_0^\pi f_o(\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi})\, h^o(x,y,\varphi)\, \sin^{2\alpha}\varphi\, d\varphi\Big), \tag{2.6}$$

где

$$C=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(1/2)}.$$

$$h^e(x,y,\varphi)=1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi,$$

$$h^o(x,y,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)(1-\operatorname{sign}(xy)\,\cos\varphi)}{\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi}} & \text{для } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{для } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f_e(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right),\quad f_o(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right). \tag{2.7}$$

По формуле (2.6) оператор T^y может быть определен и для более широкого, чем $\mathcal{E}$, класса функций. В частности, оператор $T^y f$ определен для любой непрерывной функции f. Далее будет показано, что по формуле (2.6) оператор T^y продолжается до непрерывного оператора в $L_{2,\alpha}$.

Для краткости записи формул введем обозначение

$$K(x,y,\varphi):=\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi}.$$

Лемма 2.1. *Пусть $f_e(x)$ — четная и $f_o(x)$ — нечетная функции, тогда справедливы неравенства*

$$|T^y f_e(x)|^2\le 2T^y|f_e(x)|^2,$$
$$|T^y f_o(x)|^2\le 2T^y|f_o(x)|^2.$$

Доказательство. Введем на отрезке $[0,\pi]$ меру $dm(\varphi)=C(\sin\varphi)^{2\alpha}\,d\varphi$, где C — коэффициент из формулы (2.6). Тогда $\int_0^\pi dm(\varphi)=1$. Заметим, что

$$(1-\operatorname{sign}(xy)\,\cos\varphi)^2=1-2\operatorname{sign}(xy)\,\cos\varphi+\cos^2\varphi\le 2(1-\operatorname{sign}(xy)\,\cos\varphi).$$

Используя формулу (2.6) и неравенство Коши — Буняковского, получим, что

$$|T^y f_e(x)|^2=\Big|\int_0^\pi f_e(K(x,y,\varphi))(1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)\cdot 1\, dm(\varphi)\Big|^2\le$$

$$\leq \left(\int_0^\pi \left|f_e(K(x,y,\varphi))\right|^2 (1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)^2\,dm(\varphi)\right)\left(\int_0^\pi dm(\varphi)\right) \leq$$
$$\leq 2\int_0^\pi |f_e(K(x,y,\varphi))|^2(1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)\,dm(\varphi) = 2T^y|f_e(x)|^2.$$

Докажем вторую часть леммы. Используя неравенство Коши – Буняковского, получим, что

$$|T^y f_o(x)|^2 =$$
$$= \left|\int_0^\pi f_o(K(x,y,\varphi))\frac{(x+y)(1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)}{K(x,y,\varphi)}\cdot 1\,dm(\varphi)\right|^2 \leq$$
$$\leq \left(\int_0^\pi \left|f_o(K(x,y,\varphi))\right|^2 \frac{(x+y)^2(1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)^2}{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi}\,dm(\varphi)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\int_0^\pi dm(\varphi)\right) = \int_0^\pi \left|f_o(K(x,y,\varphi))\right|^2 (1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)\cdot$$
$$\cdot\frac{(x+y)^2(1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)}{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi}\,dm(\varphi). \tag{2.8}$$

Докажем, что

$$\frac{(x+y)^2(1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)}{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi} \leq 2. \tag{2.9}$$

Пусть $xy > 0$ (случай $xy < 0$ рассматривается аналогично), тогда $\operatorname{sign}(xy) = 1$ и $|xy| = xy$. Заметим, что

$$\frac{(x+y)^2(1-\cos\varphi)}{x^2+y^2-2xy\cos\varphi} - 2 = \frac{(x-y)^2(1+\cos\varphi)}{x^2+y^2-2xy\cos\varphi} \geq 0,$$

откуда следует (2.9).

Из (2.8) и (2.9) следует, что

$$|T^y f_o(x)|^2 \leq 2\int_0^\pi |f_o(K(x,y,\varphi))|^2(1-\operatorname{sign}(xy)\cos\varphi)\,dm(\varphi) =$$
$$= 2T^y|f_o(x)|^2.$$

При этом использовано, что $|f_o(x)|^2$ — четная функция. □

Лемма 2.2. *Пусть* $g(x)$ — *непрерывная четная функция и для всех* $x \in [0, a+|y|]$ *выполняется неравенство* $|g(x)| \le A \quad (a, A, y \in \mathbb{R},\ a > 0,\ A > 0)$. *Тогда для* $x \in [-a, a]$ *справедливо неравенство*

$$|T^y g(x)| \le 2A.$$

Доказательство. Так как $g(x)$ — четная функция, то из (2.6) следует, что

$$T^y g(x) = C \int_0^\pi g(K(x,y,\varphi))\, h^e(x,y,\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi.$$

Заметим, что $0 \le \sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi} \le |x|+|y|$. Поэтому, если $x \in [-a,a]$, то $\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi} \in [0, a+|y|]$ и $g(\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\varphi}) \le A$. Так как $0 \le h^e(x,y,\varphi) \le 2$, то

$$|T^y g(x)| \le C \int_0^\pi A\, h^e(x,y,\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi \le 2AC \int_0^\pi (\sin\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi = 2A.$$

□

Лемма 2.3. *Пусть* $f(x)$ — *непрерывная функция и* $|f(x)| \le A$ *для любого* $x \in [-a-|y|, a+|y|]$ $(a > 0, \quad A > 0)$. *Тогда при* $x \in [-a, a]$ *справедливо неравенство*

$$|T^y f(x)| \le 4A. \tag{2.10}$$

Доказательство. Представим $f(x)$ как сумму четной и нечетной функций: $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$, где $f_e(x)$ и $f_o(x)$ определяются формулами (2.7). Функции $|f_e(x)|^2$ и $|f_o(x)|^2$ четные и на отрезке $[0, a+|y|]$ не превосходят A^2. По лемме 2.2 получаем, что

$$T^y |f_e(x)|^2 \le 2A^2, \qquad T^y |f_o(x)|^2 \le 2A^2$$

при $x \in [-a, a]$. Используя лемму 2.1 и неравенство $(u+v)^2 \le 2(u^2+v^2)$ получим, что

$$\begin{aligned} |T^y f(x)|^2 = |T^y f_e(x) + T^y f_o(x)|^2 \le 2\left(|T^y f_e(x)|^2 + |T^y f_o(x)|^2\right) \le \\ \le 4\left(|T^y f_e(x)|^2 + |T^y f_o(x)|^2\right) \le 4(2A^2 + 2A^2) = 16A^2, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство (2.10). □

Следствие 2.1. *Пусть последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на любом отрезке $[-N, N] \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}$ последовательность $T^y f_n(x)$ сходится к $T^y f(x)$ равномерно на любом отрезке.*

Доказательство. Равномерная сходимость $T^y f_n(x)$ к $T^y f(x)$ на отрезке $[-a, a]$ эквивалентна тому, что

$$\max_{|x|\le a} |T^y f_n(x) - T^y f(x)| \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Но, по лемме 2.3,

$$\max_{|x|\le a} |T^y f_n(x) - T^y f(x)| \le 4 \max_{|x|\le a+|y|} |f_n(x) - f(x)|,$$

а $\max\limits_{|x|\le a+|y|} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, так как $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на отрезке $[-a - |y|, a + |y|]$. □

Лемма 2.4. *Для любых функций $f(x) \in C$ и $g(x) \in C_c$ и любого $y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (T^y f(x)) g(x) |x|^{2\alpha+1}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (T^{-y} g(x)) |x|^{2\alpha+1}\, dx. \tag{2.11}$$

Доказательство. Если $f(x), g(x) \in \mathcal{D}$, то равенство (2.11) доказано в [13, Proposition 3.2.]. Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, $g(x) \in C_c$. Предположим, что $\operatorname{supp} g \subseteq [-N, N]$ ($\operatorname{supp} g$ — носитель функции g). Возьмем произвольную последовательность функций $f_n(x) \in \mathcal{D}$, которая сходится к $f(x)$ равномерно на каждом отрезке, и последовательность функций $g_n(x) \in \mathcal{D}$ так, что $\operatorname{supp} g_n \subseteq [-N, N]$ и последовательность $g_n(x)$ сходится к $g(x)$ равномерно на отрезке $[-N, N]$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (T^y f_n(x)) g_n(x) |x|^{2\alpha+1}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) (T^{-y} g_n(x)) |x|^{2\alpha+1}\, dx. \tag{2.12}$$

Из следствия 2.1 вытекает, что последовательность $T^y f_n(x)$ сходится к $T^y f(x)$ равномерно на любом отрезке, а последовательность

$T^{-y}g_n(x)$ сходится к $T^{-y}g(x)$ равномерно на отрезке $[-N-|y|, N+|y|]$. Переходя в равенстве (2.12) к пределу при $n \to \infty$, получим (2.11). $\Box$

Заметим, что функция $u(x,y) = e_\alpha(\lambda y)e_\alpha(\lambda x)$ удовлетворяет уравнению (1.6) с начальным условием

$$u(x,0) = e_\alpha(\lambda x).$$

Из единственности решения задачи Коши (1.6) — (1.7) тогда следует, что

$$T^y e_\alpha(\lambda x) = e_\alpha(\lambda y)e_\alpha(\lambda x). \tag{2.13}$$

Проверим, что

$$\|T^y f\|_{2,\alpha} \le 2\sqrt{2}\|f\|_{2,\alpha} \tag{2.14}$$

при $f \in C_c$.

Заметим, что если $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$, то

$$\|T^y f\|_{2,\alpha} = \|T^y f_e + T^y f_o\|_{2,\alpha} \le \|T^y f_e\|_{2,\alpha} + \|T^y f_o\|_{2,\alpha}.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности.

$$\|T^y f_e\|_{2,\alpha}^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |T^y f_e(x)|^2 |x|^{2\alpha+1}\,dx \le 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} T^y |f_e(x)|^2 |x|^{2\alpha+1}\,dx =$$

$$= 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_e(x)|^2 (T^{-y}1)|x|^{2\alpha+1}\,dx = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_e(x)|^2 |x|^{2\alpha+1}\,dx = 2\|f_e\|_{2,\alpha}^2.$$

$$\|T^y f_o\|_{2,\alpha}^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |T^y f_o(x)|^2 |x|^{2\alpha+1}\,dx \le 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} T^y |f_o(x)|^2 |x|^{2\alpha+1}\,dx =$$

$$= 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_o(x)|^2 (T^{-y}1)|x|^{2\alpha+1}\,dx = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_o(x)|^2 |x|^{2\alpha+1}\,dx = 2\|f_o\|_{2,\alpha}^2.$$

При этом были использованы лемма 2.1 и соотношение (2.11) в частном случае, когда $g(x) = 1$.

Вернемся к доказательству неравенства (2.14):

$$\|T^y f\|_{2,\alpha} \le \|T^y f_e\|_{2,\alpha} + \|T^y f_o\|_{2,\alpha} \le 2\sqrt{2}\|f\|_{2,\alpha}.$$

Из неравенства (2.14) следует, что оператор T^y продолжается по непрерывности с $\mathcal{D}$ до ограниченного оператора в $L_{2,\alpha}$. Продолженный оператор будем также обозначать T^y, и для него остается справедливым неравенство (2.14).

Лемма 2.5. *Пусть $f \in L_{2,\alpha}$, тогда*

$$(\widehat{T^y f})(\lambda) = e_\alpha(\lambda y)\,\widehat{f}(\lambda), \tag{2.15}$$

где $f \to \widehat{f}$ — преобразование Данкля.

Доказательство. Для функций $f \in \mathcal{D}$ равенство (2.15) доказано в [12, Corollary 5.4]. Так как $\mathcal{D}$ является плотным подмножеством в $L_{2,\alpha}$, то (2.15) остается справедливым и при $f \in L_{2,\alpha}$. □

Свертка функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ на $\mathbb{R}$ определяется соотношением

$$(f * \varphi)(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (T^{-y} f(x))\,\varphi(y)\,|y|^{2\alpha+1}\,dy. \tag{2.16}$$

Свертка имеет смысл, если определен интеграл в правой части (2.16), в частности, когда $\varphi, f \in C_c$, причем тогда и свертка $f*\varphi$ принадлежит C_c.

Лемма 2.6. *При преобразовании Бесселя свертка функций $f, \varphi \in C_c$ переходит в произведение, т. е.*

$$(\widehat{f * \varphi})(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\,\widehat{\varphi}(\lambda). \tag{2.17}$$

Доказательство. Изменяя порядок интегрирования и используя соотношение (2.11), получим, что

$$(\widehat{f * \varphi})(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (T^y f(x))\ \varphi(y)\,|y|^{2\alpha+1}\,dy \right) e_\alpha(\lambda x)\,|x|^{2\alpha+1}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(T^{-y} f(x)\big)\ e_\alpha(\lambda x)\,|x|^{2\alpha+1}\,dx \right) \varphi(y)\,|y|^{2\alpha+1}\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(T^y e_\alpha(\lambda x))\ |x|^{2\alpha+1}\,dx \right) \varphi(y)\,|y|^{2\alpha+1}\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)\,e_\alpha(\lambda y)\,\varphi(y)\,|y|^{2\alpha+1}\,dy = \widehat{f}(\lambda)\,\widehat{\varphi}(\lambda).$$

Лемма доказана. □

§ 3. Функции с ограниченным спектром и их свойства

В качестве средства приближения мы будем использовать функции из $L_{2,\alpha}$ с ограниченным спектром. В этом параграфе будут рассмотрены некоторые свойства этих функций.

Для любых функций $f \in L_{2,\alpha}$, $\varphi \in C_c$ определена свертка $f * \varphi$ и при этом

$$\|f * \varphi\|_{2,\alpha} \le 2\sqrt{2}\|f\|_{2,\alpha} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)|\,|y|^{2\alpha+1}\,dy \right),$$

в частности, $f * \varphi \in L_{2,\alpha}$. Действительно, используя обобщенное неравенство Минковского и свойство (2.14), получим, что

$$\|f * \varphi\|_{2,\alpha} \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|T^{-y} f\|_{2,\alpha} |\varphi(y)|\,|y|^{2\alpha+1}\,dy \le$$

$$\le 2\sqrt{2}\|f\|_{2,\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)|\,|y|^{2\alpha+1}\,dy.$$

Лемма 3.1. *Пусть $f \in L_{2,\alpha}$. Для того чтобы отображение $\varphi \mapsto f * \varphi$ из C_c в $L_{2,\alpha}$ продолжалось до непрерывного отображения из $L_{2,\alpha}$ в $L_{2,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\widehat{f}(\lambda)$ была существенно ограничена на $\mathbb{R}$, т. е. $\widehat{f}(\lambda) \in L_\infty(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Из того, что C_c плотно в $L_{2,\alpha}$, следует, что равенство (2.17) справедливо и при $f \in L_{2,\alpha}$, $\varphi \in C_c$. Из равенства

Парсеваля (см. (2.3)) вытекает, что

$$\|f*\varphi\|_{2,\alpha}^2 = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2\,|\widehat{\varphi}(\lambda)|^2\,|\lambda|^{2\alpha+1}\,d\lambda. \tag{3.1}$$

Пусть отображение $\varphi\mapsto f*\varphi$ из C_c в $L_{2,\alpha}$ продолжается до непрерывного отображения из $L_{2,\alpha}$ в $L_{2,\alpha}$, которое будем также обозначать $\varphi\mapsto f*\varphi$ ($\varphi\in L_{2,\alpha}$). Проверим, что $\widehat{f*\varphi}=\widehat{f}\,\widehat{\varphi}$ для всех $\varphi, f\in L_{2,\alpha}$.

Для любой функции $\varphi\in L_{2,\alpha}$ найдется последовательность функций $\varphi_n\in C_c$, сходящаяся к φ в пространстве $L_{2,\alpha}$. Тогда $f*\varphi_n\to f*\varphi$ в $L_{2,\alpha}$ и $\widehat{f*\varphi_n}\to\widehat{f*\varphi}$ в $L_{2,\alpha}$. Но $\widehat{f*\varphi_n}=\widehat{f}\,\widehat{\varphi}_n$ и $\widehat{\varphi}_n\to\widehat{\varphi}$ в $L_{2,\alpha}$. Переходя, если необходимо, к некоторой подпоследовательности, можно считать, что $\widehat{\varphi}_n\to\widehat{\varphi}$ почти всюду, тогда и $\widehat{f}\widehat{\varphi}_n\to\widehat{f}\widehat{\varphi}$ почти всюду, следовательно, $\widehat{f*\varphi}=\widehat{f}\widehat{\varphi}$. Поэтому оператор умножения на функцию $\widehat{f}$ должен быть непрерывным оператором в $L_{2,\alpha}$, но для этого необходимо, чтобы $\widehat{f}\in L_\infty(\mathbb{R})$.

Действительно, если $\widehat{f}\notin L_\infty$, тогда для любого $k>0$ мера множества $P_k=\{x : |\widehat{f}(x)|\geq k\}$ положительная. Возьмем любую функцию $\varphi(x)$, такую, что $\varphi(x)=0$ при $x\notin P_k$, $\varphi(x)\neq 0$ при $x\in P_k$ и $\|\varphi\|_{2,\alpha}=1$. Тогда

$$\|\widehat{f}(x)\varphi(x)\|_{2,\alpha} = \left(\int\limits_{P_k} |\widehat{f}(x)\varphi(x)|^2|x|^{2\alpha+1}\,dx\right)^{1/2} \geq$$

$$\geq k\left(\int\limits_{P_k} |\varphi(x)|^2|x|^{2\alpha+1}\,dx\right)^{1/2} = k,$$

т. е. оператор умножения на $\widehat{f}(x)$ не является ограниченным, а значит, и непрерывным.

Обратно, если $\widehat{f}(\lambda)\in L_\infty$, то из (3.1) и из равенства Парсеваля следует, что при $\varphi\in C_c$

$$\|f*\varphi\|_{2,\alpha}\leq\|\widehat{f}\|_\infty\|\varphi\|_{2,\alpha}, \tag{3.2}$$

где

$$\|\widehat{f}\|_\infty=\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\operatorname{vrai}|\widehat{f}(\lambda)|.$$

Из (3.2) вытекает, что оператор $\varphi \mapsto f * \varphi$ продолжается до непрерывного оператора из $L_{2,\alpha}$ в $L_{2,\alpha}$. Отметим, что равенство (2.17) остается справедливым для любого $\varphi \in L_{2,\alpha}$. □

Назовем функцию $f \in L_{2,\alpha}$ функцией с ограниченным спектром порядка $\nu > 0$, если $\widehat{f}(\lambda) = 0$ при $|\lambda| > \nu$. Множество всех таких функций обозначим $\mathcal{I}_\nu$. Очевидно, что функция f принадлежит $\mathcal{I}_\nu$ тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде

$$f(x) = \int_{-\nu}^{\nu} \varphi(t)\, e_\alpha(xt)\, |t|^{2\alpha+1}\, dt$$

для некоторой функции $\varphi(t) \in L_{2,\alpha}$.

Определим функцию $G_\nu \in L_{2,\alpha}$ как функцию на $\mathbb{R}$, преобразование Данкля которой равно

$$\widehat{G}_\nu(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |\lambda| \le \nu, \\ 0 & \text{при} \quad |\lambda| > \nu. \end{cases}$$

Введем оператор

$$P_\nu : f \mapsto G_\nu * f.$$

По лемме 3.1 P_ν будет непрерывным оператором из $L_{2,\alpha}$ в $L_{2,\alpha}$. Из (2.17) следует, что P_ν является проектором пространства $L_{2,\alpha}$ на подпространство $\mathcal{I}_\nu$. Явный вид функций из $\mathcal{I}_\nu$ может быть описан с помощью следующих теорем типа Пэли — Винера.

Пусть $\mathcal{S}$ — пространство основных функций на $\mathbb{R}$, т.е. множество всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Обычным образом пространство $\mathcal{S}$ снабжается топологией и становится локально–выпуклым пространством (см. [14]). Пусть $\mathcal{S}'$ — множество линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{S}$, т.е. пространство обобщенных функций медленного роста. Для $f \in \mathcal{S}'$ и $\varphi \in \mathcal{S}$ через $\langle f, \varphi \rangle$ будем обозначать значение функционала f на функции φ. Пространство $L_{2,\alpha}$ вкладывается в пространство $\mathcal{S}'$, если для $f(x) \in L_{2,\alpha}$ и $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ положить

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, |x|^{2\alpha+1}\, dx.$$

Преобразование Данкля является топологическим изоморфизмом пространства $\mathcal{S}$ на себя. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства

$$\langle f, \widehat{g} \rangle = \langle \widehat{f}, g \rangle \qquad \forall f, g \in \mathcal{S}.$$

С учетом этого равенства преобразование Данкля расширяется на обобщенные функции из класса $\mathcal{S}'$ по формуле:

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle := \langle f, \widehat{\varphi} \rangle, \qquad f \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}.$$

Теорема 3.1. *Пусть $f \in \mathcal{S}'$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\operatorname{supp} f(x) \subset [-\nu, \nu]$;
2) *$\widehat{f}(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа $\leq \nu$ и существуют числа $m > 0$ и $C > 0$, такие, что справедливо неравенство*
$$|\widehat{f}(\lambda)| \leq C(1 + |\lambda|)^m e^{\nu |\operatorname{Im} \lambda|}.$$

Доказательство. См. ([12], Theorem 4.9.). □

Теорема 3.2. *Пусть $f \in L_{2,\alpha}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\operatorname{supp} f(x) \subseteq [-\nu, \nu]$;
2) $\widehat{f}(\lambda) \in \mathcal{I}_\nu$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp} f \subseteq [-\nu, \nu]$, тогда функция $\widehat{f}(\lambda) \in L_{2,\alpha}$ и является целой функцией экспоненциального типа ν, значит, $\widehat{f}(\lambda) \in \mathcal{I}_\nu$.

Обратно, если $\widehat{f}(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа ν и $\widehat{f}(\lambda) \in L_{2,\alpha}$, то $\widehat{f}(\lambda) \in L_2(\mathbb{R})$, значит, выполняется неравенство (см. [14, формула (7), с. 101.]) $|\widehat{f}(\lambda)| \leq Ce^{\nu |\operatorname{Im} \lambda|}$, следовательно, по теореме 3.1, $\operatorname{supp} f \subseteq [-\nu, \nu]$. □

Напомним (см. [15, гл. VIII]), что линейный оператор A в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения называется в существенном самосопряженным, если его замыкание $\bar{A}$ является самосопряженным оператором. Отметим также, что для самосопряженного в существенном оператора A справедливо равенство $\bar{A} = A^*$ (т. е. замыкание оператора A совпадает с сопряженным оператором).

Лемма 3.2. *Оператор $T = iD$, где D — оператор Данкля, с областью определения $\mathcal{D}$ является в существенном самосопряженным.*

Доказательство. Интегрированием по частям проверяется кососимметричность оператора D, т. е.

$$(Df, g) = -(f, Dg) \tag{3.3}$$

для любых $f, g \in \mathcal{D}$, где (f, g) — скалярное произведение в $L_{2,\alpha}$, определенное формулой (1.5).

Из (3.3) следует, что оператор $T = iD$ является симметрическим, т. е.

$$(Tf, g) = (f, Tg) \tag{3.4}$$

для всех $f, g \in \mathcal{D}$.

Отметим, что равенства (3.3) и (3.4) справедливы и в случае, когда $f \in \mathcal{D}$, $g \in \mathcal{E}$.

Для симметрического оператора A существует следующий критерий самосопряженности в существенном (см. [15, гл.VIII, следствие из теор. VIII.3]): A самосопряжен в существенном тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}(A^* + i) = \{0\}$. Чтобы доказать, что оператор $T = iD$ самосопряжен в существенном, достаточно проверить, что $\mathrm{Ker}(T^* + i) = \{0\}$.

Пусть

$$(T^* + i)g = 0, \qquad g \in D(T^*). \tag{3.5}$$

Учитывая симметричность оператора T, получим, что равенство (3.5) равносильно следующему равенству:

$$(T + i)g = 0. \tag{3.6}$$

Равенство (3.6) эквивалентно равенству

$$Dg = -g. \tag{3.7}$$

Пусть $g(x) = g_e(x) + g_o(x)$, где $g_e(x)$ — четная часть функции $g(x)$, $g_o(x)$ — нечетная, тогда равенство (3.7) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dg_e}{dx}(x) = -g_o(x) \\ \dfrac{dg_o}{dx}(x) + \dfrac{(2\alpha + 1)}{x} g_o(x) = -g_e(x). \end{cases}$$

Решая систему, имеем

$$(-\mathcal{B}+1)g_e=0,$$

где

$$\mathcal{B}=\frac{d^2}{dx^2}+(2\alpha+1)\frac{d}{dx}$$

— дифференциальный оператор Бесселя. В [9, лемма 3.2.] показано, что из равенства $(-\mathcal{B}+1)g_e=0$ и того, что $g_e\in L_{2,\alpha}$, следует, что $g_e(x)=0$, значит, и $g_o(x)=0$, т. е. $g(x)=0$. □

Следствие 3.1. *Если функции f и Df принадлежат пространству $L_{2,\alpha}$ (действие оператора D понимается в смысле теории обобщенных функций), то найдется последовательность функций $f_n\in\mathcal{D}$, такая, что $f_n\to f$ и $Df_n\to Df$ в пространстве $L_{2,\alpha}$.*

Действительно, из определения сопряженного оператора $(iD)^*$ следует, что f принадлежит области определения оператора $(iD)^*$ и $g=(iD)^*f$ тогда и только тогда, когда $g=(iD)f$ в смысле теории обобщенных функций. Остается воспользоваться тем, что из самосопряженности в существенном следует, что замыкание оператора iD совпадает с $(iD)^*$. Значит, найдется последовательность функций $f_n\in\mathcal{D}$ такая, что $f_n\to f$ и $(iD)f_n\to(iD)f$ в пространстве $L_{2,\alpha}$, откуда следует, что $Df_n\to Df$ в пространстве $L_{2,\alpha}$.

Лемма 3.3. *Пусть функции f и Df принадлежат пространству $L_{2,\alpha}$, тогда*

$$(\widehat{Df})(\lambda)=-i\lambda\widehat{f}(\lambda). \tag{3.8}$$

Доказательство. По следствию 3.1 существует последовательность функций $f_n\in\mathcal{D}$, для которой $f_n\to f$ и $Df_n\to Df$ в $L_{2,\alpha}$, поэтому (3.8) достаточно доказать для $f\in\mathcal{D}$. Используя равенства (1.3) и (3.3), получим, что

$$(\widehat{Df})(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(Df)(x)\,e_\alpha(\lambda x)\,|x|^{2\alpha+1}\,dx=$$

$$=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\ (De_\alpha(\lambda x))\ |x|^{2\alpha+1}dx=$$

$$= -i\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e_\alpha(\lambda x)\, |x|^{2\alpha+1}\, dx = -i\lambda \widehat{f}(\lambda).$$

Лемма доказана. □

В следующей лемме будет получено несколько оценок для функций $e_\alpha(x)$, которые мы в дальнейшем будем использовать.

Лемма 3.4. *Для $x \in \mathbb{R}$ справедливы следующие неравенства:*

1) $|e_\alpha(x)| \le 1$;
2) $|1 - e_\alpha(x)| \le 2|x|$;
3) $|1 - e_\alpha(x)| \ge c$ *при* $|x| \ge 1$, *где* $c > 0$ — *некоторая постоянная, зависящая только от* α.

Доказательство. Для функции $j_\alpha(x)$ имеется следующее интегральное представление (см. [16, формула 8.411]):

$$j_\alpha(x) = c_1 \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\alpha}\, \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi, \tag{3.9}$$

где

$$c_1 = \left(\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi \right)^{-1} = \frac{2\,\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}.$$

Используя формулы (1.3) и (3.9), получим следующее интегральное представление функции $e_\alpha(x)$:

$$e_\alpha(x) = c_1 \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\alpha}\, \left[\cos(x\sin\varphi) + i \sin\varphi \sin(x\sin\varphi)\right]\, d\varphi.$$

Тогда

$$|e_\alpha(x)| \le c_1 \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\alpha}\, \left[\cos^2(x\sin\varphi) + \sin^2\varphi \sin^2(x\sin\varphi)\right]^{1/2}\, d\varphi \le$$

$$\le c_1 \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2\alpha} \cdot\, d\varphi = 1,$$

причем равенство $e_\alpha(x) = 1$ достигается только при $x = 0$.

Воспользуемся представлением (1.2) функции $e_\alpha(x)$ и оценками для $j_\alpha(x)$ (см. [9, лемма 3.5.]):

$$e_\alpha(x) = j_\alpha(x) + (2(\alpha+1))^{-1} i x j_{\alpha+1}(x);$$

$$|j_\alpha(x)| \le 1; \tag{3.10}$$

$$1 - j_\alpha(x) \le x^2/2. \tag{3.11}$$

Тогда

$$|1 - e_\alpha(x)| \le |1 - j_\alpha(x)| + (2(\alpha+1))^{-1} \cdot |x| \cdot |j_{\alpha+1}(x)|.$$

При $|x| \le 1$ из (3.10) – (3.11) следует, что

$$|1 - e_\alpha(x)| \le \frac{|x|^2}{2} + (2(\alpha+1))^{-1} \cdot |x| \le \frac{|x|}{2} + (2(\alpha+1))^{-1}|x| < 2|x|.$$

При $|x| \ge 1$ из (3.10) следует, что

$$|1 - e_\alpha(x)| \le 2 \le 2|x|,$$

т. е. неравенство $|1 - e_\alpha(x)| \le 2|x|$ справедливо для любого x.

Из асимптотических формул для функций Бесселя следует, что $j_\alpha(x) \to 0$ и $j'_\alpha(x) \to 0$ при $x \to \infty$, поэтому, учитывая соотношение (1.3), имеем, что $e_\alpha(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Значит, существует такое число $x_0 > 0$, что при $x \ge x_0$ справедливо неравенство $|e_\alpha(x)| \le 1/2$. Пусть

$$m = \min_{x \in [1, x_0]} (|1 - e_\alpha(x)|).$$

При $x \ge 1$ выполняется неравенство $|1 - e_\alpha(x)| \ge c$, если взять $c = \min\{m, 1/2\}$. $\square$

§ 4. Прямые теоремы джексоновского типа

В этом параграфе будут доказаны теоремы 1.1 и 1.2, сформулированные в §1.

Доказательство теоремы 1.1. Воспользуемся оператором проектирования P_ν на подпространство $\mathcal{I}_\nu$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\|f - P_\nu(f)\|^2_{2,\alpha} = A \int\limits_{|\lambda| \ge \nu} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \, |\lambda|^{2\alpha+1} \, d\lambda. \tag{4.1}$$

Из леммы 3.4 вытекает, что

$$|1 - e_\alpha(\lambda/\nu)| \geq c$$

при $|\lambda| \geq \nu$, поэтому из (4.1), используя лемму 2.5 и равенство Парсеваля, получим

$$\|f - P_\nu(f)\|_{2,\alpha}^2 \leq \frac{A}{c^{2k}} \int\limits_{|\lambda|\geq\nu} (1 - e_\alpha(\lambda/\nu))^{2k}\, |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \leq$$

$$\leq \frac{A}{c^{2k}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 - e_\alpha(\lambda/\nu))^{2k}\, |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda =$$

$$= c^{-2k} \|\bigl(I - T^{1/\nu}\bigr)^k f(x)\|_{2,\alpha}^2 \leq c^{-2k} \bigl(\omega_k(f, 1/\nu)_{2,\alpha}\bigr)^2,$$

откуда следует неравенство (1.8) с $c_1 = c^{-k}$.

Доказательство теоремы 1.2. Из лемм 2.5, 3.3, 3.4 и равенства Парсеваля следует, что

$$\|(I - T^h)f\|_{2,\alpha}^2 = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |1 - e_\alpha(\lambda h)|^2\, |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1} d\lambda \leq$$

$$\leq A(4h^2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 |\widehat{f}(\lambda)|^2\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda = 4h^2 \|Df\|_{2,\alpha}^2.$$

Следовательно,

$$\|(I - T^h)f\|_{2,\alpha} \leq 2h \|Df\|_{2,\alpha}. \tag{4.2}$$

Рассуждая как при доказательстве теоремы 1.1, получим, что

$$\|f - P_\nu(f)\|_{2,\alpha} \leq c^{-(k+s)}\, \|(I - T^{1/\nu})^{k+s} f(x)\|_{2,\alpha}. \tag{4.3}$$

Последовательно s раз применяя неравенство (4.2) к правой части неравенства (4.3), получим, что

$$\|f - P_\nu(f)\|_{2,\alpha} \leq c^{-(k+s)} 2^s \nu^{-s}\, \|(I - T^{1/\nu})^k D^s f\|_{2,\alpha} \leq$$
$$\leq c_2\, \nu^{-s}\, \omega_k(D^s f, 1/\nu)_{2,\alpha},$$

где $c_2 = c^{-(k+s)}2^s$.

Résumé

Some problems of aproximations of functions on the real line $\mathbb{R}$ in the L_2-metric with certain weight by entire functions of exponential growth are studied. Modules of continuity which used in problems are constructed with help of generalized translations of Dunkl. Direct theorems of Jacson type are proved.

Список литературы

[1] Butzer P. L. *Semi-groups of operators and approximation* / P. L. Butzer, H. Behrens. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.

[2] Терехин А. П. *Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение* / А. П. Терехин // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Саратовского гос. университета, 1975. Вып. 2. С. 3–28.

[3] Левитан Б. М. *Теория операторов обобщенного сдвига* / Б. М. Левитан. М.: Наука, 1973.

[4] Löfstróm J. *Approximation theorems connected with generalized translations* / J. Löfstróm, J. Peetre // Math. Ann. 1969. V. 181. P. 255–268.

[5] Butzer P. L. *Higher order moduli of continuity based on the Jacobi translation operator and best approximation* / P. L. Butzer, R. L. Stens, M. Wehrens // Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1980. V. 11. No. 2. P. 83–88.

[6] Потапов М. К. *О теоремах Джексона для обобщенного модуля гладкости* / М. К. Потапов, В. М. Федоров // Тр. Матем. ин–та АН СССР. 1985. Т. 182. С. 291–295.

[7] Потапов М. К. *О применении оператора обобщенного сдвига в теории приближений* / М. К. Потапов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механика. 1998. N 3. С. 38–48.

[8] Платонов С. С. *Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций в метрике $L_{2,\alpha}$. I* / С. С. Платонов // Труды ПетрГУ. Сер. матем. Петрозаводск, 2000. Вып. 7. С. 70–82.

[9] Платонов С. С. *Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций в метрике $L_{2,\alpha}$. II* / С. С. Платонов // Труды ПетрГУ. Сер. матем. Петрозаводск, 2001. Вып. 8. С. 3–17.

[10] Левитан Б. М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье* / Б. М. Левитан // Успехи матем. наук. 1951. Т. 6. N 2. С. 102–143.

[11] Neijb B. S. *Mean-periodic functions associated with the Dunkl operators* / B. S. Neijb, K. Samir // Integral Transforms and Special Functions. 2004. V. 15. No 2. P. 155–179.

[12] Mohamed A. M. *Transmutation operators and Paley-Wiener theorem associated with a singular differential-difference operator on the real line* / A. M. Mohamed, T. Khalifa // Analysis and Applications. 2003. V. 1. No 1. P. 43–70.

[13] Sundaram T. *Convolution and maximal function for Dunkl transform* / T. Sundaram, X. Yuan // Архив электр. препринтов. http://front.math.ucdavis.edu /math.CA/0403049.

[14] Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения* / С. М. Никольский. М.: Наука, 1977.

[15] Рид М. *Методы современной математической физики*: в 4 т. Т. 1 / М. Рид, Б. М. Саймон. М.: Мир, 1977.

[16] Градштейн И. С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Наука, 1971.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33