Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 13, 2006

УДК

Е. С. Белкина

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАНКЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ. II

Данная статья представляет собой продолжение статьи [1], опубликованной в настоящем сборнике. На основе обобщенного сдвига Данкля определяются аналоги функциональных пространств Никольского и Бесова. Получено описание этих пространств в терминах наилучших приближений целыми функциями экспоненциального типа.

§ 1. Формулировка основных результатов

В [1] рассматривались задачи теории приближений функций из гильбертова пространства $L_{2,\alpha}$ целыми функциями из класса $\mathcal{I}_\nu$. На основе обобщенного сдвига Данкля в [1] определен модуль непрерывности $\omega_k(f,\delta)_{2,\alpha}$ и доказан аналог прямой теоремы Джексона об оценке наилучшего приближения функции через ее модуль непрерывности. Продолжая изучение задач теории приближений функций в пространстве $L_{2,\alpha}$, в настоящей работе на основе обобщенного сдвига Данкля определяются аналоги функциональных пространств Никольского и Бесова. Основными результатами статьи являются теоремы, дающие описание этих пространств в терминах наилучших приближений функциями из класса $\mathcal{I}_\nu$.

Мы будем использовать основные определения и обозначения из [1]. В частности, D — дифференциально-разностный оператор Данкля, $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ — норма в гильбертовом пространстве $L_{2,\alpha}$, T^h — оператор обобщенного сдвига Данкля, $\Delta_h^k f(x) = (I-T^h)^k f(x)$ — конечная разность порядка k с шагом $h>0$, $E_\nu(f)_{2,\alpha}$ — наилучшее приближение функции $f\in L_{2,\alpha}$ функциями из $\mathcal{I}_\nu$.

Пусть $r>0$ — действительное число, k и s — произвольные неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $k>r-s>0$.

Через $H^r_{2,\alpha}$ обозначим множество всех функций $f \in L_{2,\alpha}$, для которых $Df, D^2f, \dots, D^s f \in L_{2,\alpha}$ и для некоторого числа $A_f > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_k(D^s f, \delta)_{2,\alpha} \le A_f\, \delta^{r-s}, \qquad \delta > 0. \tag{1.1}$$

Для $f \in H^r_{2,\alpha}$ определим полунорму $h^r_{2,\alpha}(f)$:

$$h^r_{2,\alpha}(f) := \sup_{\delta>0} \frac{\omega_k(D^s f, \delta)_{2,\alpha}}{\delta^{r-s}}. \tag{1.2}$$

Множество $H^r_{2,\alpha}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{H^r_{2,\alpha}} := \|f\|_{2,\alpha} + h^r_{2,\alpha}(f).$$

В следующей теореме дается описание пространства $H^r_{2,\alpha}$ через наилучшие приближения функциями из $\mathcal{I}_\nu$, в частности, из нее следует, что пространства $H^r_{2,\alpha}$ не зависят от чисел k и s. Через $c_1, c_2, \dots$ будем обозначать не зависящие от f постоянные, которые могут зависеть от k, r, s, α.

Теорема 1.1. *Если $f \in H^r_{2,\alpha}$, то при $\nu \ge 1$ справедливо неравенство*

$$E_\nu(f)_{2,\alpha} \le c_1 \frac{h^r_{2,\alpha}(f)}{\nu^r}. \tag{1.3}$$

Обратно, если $f \in L_{2,\alpha}$ и при $\nu \ge 1$

$$E_\nu(f)_{2,\alpha} \le \frac{A}{\nu^r}, \tag{1.4}$$

где A — не зависящая от ν (но зависящая от f) постоянная, то $f \in H^r_{2,\alpha}$ и

$$\|f\|_{H^r_{2,\alpha}} \le c_2(\|f\|_{2,\alpha} + A). \tag{1.5}$$

Пусть $1 \le q \le \infty$, $r > 0$, k и s — неотрицательные целые числа, такие, что $k > r - s > 0$. Аналогично [2] скажем, что функция f принадлежит классу Никольского — Бесова $B^r_{2,q,\alpha}$, если $f, Df, \dots, D^s f \in L_{2,\alpha}$ и конечна полунорма

$$b^r_{2,q,\alpha}(f) = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\omega_k(D^s f, \delta)_{2,\alpha})^q}{\delta^{(r-s)q}} \, \frac{d\delta}{\delta} \right)^{1/q} & \text{при } q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{\delta>0} \frac{\omega_k(D^s f, \delta)_{2,\alpha}}{\delta^{r-s}} & \text{при } q = \infty. \end{cases}$$

Класс $B^r_{2,q,\alpha}$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|_{B^r_{2,q,\alpha}} := \|f\|_{2,\alpha} + b^r_{2,q,\alpha}(f). \tag{1.6}$$

Отметим, что $B^r_{2,\infty,\alpha} = H^r_{2,\alpha}$.

Теорема 1.2. *Пусть $a > 1$ — произвольное число (можно, например, взять $a = 2$). Для того чтобы функция $f \in L_{2,\alpha}$ принадлежала классу $B^r_{2,q,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы была конечна полунорма*

$$\tilde{b}^r_{2,q,\alpha}(f) := \begin{cases} \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{nrq}(E_{a^n}(f)_{2,\alpha})^q\right)^{1/q} & \text{при } q < \infty, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} a^{nr}E_{a^n}(f)_{2,\alpha} & \text{при } q = \infty, \end{cases}$$

где $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. При этом норма (1.6) в $B^r_{2,q,\alpha}$ эквивалентна норме

$$\|f\|_{2,\alpha} + \tilde{b}^r_{2,q,\alpha}(f).$$

Доказательства теорем 1.1 и 1.2 являются основной целью работы. Основным средством для доказательств этих теорем являются преобразования Данкля. Определение и основные свойства преобразований Данкля приведены в [1, §2]. В §2 настоящей статьи доказываются вспомогательные неравенства типа Бернштейна, а в §3 мы докажем теоремы 1.1 и 1.2 и, кроме того, получим некоторые эквивалентные нормировки пространств $B^r_{2,q,\alpha}$.

§ 2. Неравенства типа Бернштейна

Для доказательства обратных теорем теории приближений используются неравенства типа Бернштейна.

Лемма 2.1. *Для любой функции $f \in \mathcal{I}_\nu$ справедливо неравенство*

$$\|Df\|_{2,\alpha} \le \nu\|f\|_{2,\alpha}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Используя лемму 3.3 из [1] и равенство Парсеваля (см. формулу (2.3) в [1]), получим

$$\|Df\|^2_{2,\alpha} = A\int_{-\nu}^{\nu} |\lambda|^2\, |\widehat{f}(\lambda)|\, |\lambda|^{2\alpha+1}\, d\lambda \le \nu^2\, \|f\|^2_{2,\alpha},$$

откуда следует неравенство (2.1). □

Лемма 2.2. *При $\Phi(x) \in \mathcal{I}_\nu$ и $h > 0$ справедливо неравенство*

$$\|\Delta_h^k \Phi(x)\|_{2,\alpha} \le 2^k (\nu h)^k \|\Phi\|_{2,\alpha}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Используя леммы 2.5 и 3.4 из [1] и равенство Парсеваля, получаем

$$\|\Delta_h \Phi\|_{2,\alpha} = \|\Phi - T^h\Phi\|_{2,\alpha} = A^{1/2}\|\widehat{\Phi} - \widehat{T^h\Phi}\|_{2,\alpha} =$$
$$= A^{1/2}\|(1 - e_\alpha(\lambda h))\widehat{\Phi}(\lambda)\|_{2,\alpha} \le 2A^{1/2}|\lambda h|\|\widehat{\Phi}\|_{2,\alpha} \le 2\nu h\|\Phi\|_{2,\alpha}.$$

При этом было учтено, что $\widehat{\Phi}(\lambda) = 0$ при $|\lambda| > \nu$. Аналогично проверяется, что

$$\|\Delta_h^k \Phi\|_{2,\alpha} \le 2^k (\nu h)^k \|\Phi\|_{2,\alpha}.$$

Лемма доказана. □

§ 3. Доказательство основных теорем

Пространства $H^r_{2,\alpha}$ и $B^r_{2,q,\alpha}$ определены в §1. В теоремах 1.1 и 1.2 приводятся описания этих пространств через наилучшие приближения функциями из $\mathcal{I}_\nu$.

Доказательство теоремы 1.1. Если $f \in H^r_{2,\alpha}$, то

$$\omega_k(D^s f, \delta)_{2,\alpha} \le h^r_{2,\alpha}(f)\, \delta^{r-s}$$

и из теоремы 1.2 из [1] следует, что

$$E_\nu(f)_{2,\alpha} \le c_1 \frac{\omega_k(D^s f, 1/\nu)_{2,\alpha}}{\nu^s} \le c_1 \frac{h^r_{2,\alpha}(f)}{\nu^r}.$$

Для доказательства обратного неравенства используется обычная методика, идущая от С. Н. Бернштейна (см. [2]). Пусть выполняется неравенство (1.4). Выберем последовательность функций $\psi_n \in \mathcal{I}_{2^n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ так, чтобы

$$\|f - \psi_n\|_{2,\alpha} \le A\, 2^{-nr}.$$

Пусть $\varphi_0 = \psi_0$ и $\varphi_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ при $n \ge 1$. Тогда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n, \tag{3.1}$$

ряд сходится в $L_{2,\alpha}$ и $\varphi_n \in \mathcal{I}_{2^n}$. Оценим сверху нормы слагаемых в (3.1):

$$\|\varphi_0\|_{2,\alpha} = \|\psi_0\|_{2,\alpha} \le \|\psi_0 - f\|_{2,\alpha} + \|f\|_{2,\alpha} \le \|f\|_{2,\alpha} + A; \tag{3.2}$$

$$\|\varphi_n\|_{2,\alpha} \le \|f - \psi_n\|_{2,\alpha} + \|f - \psi_{n-1}\|_{2,\alpha} \le A(2^{-nr} + 2^{-(n-1)r}) = \\ = A(1+2^r)2^{-nr}. \tag{3.3}$$

Из неравенств (3.2) и (3.3) следует, что

$$\|\varphi_n\|_{2,\alpha} \le c_3 2^{-nr}(\|f\|_{2,\alpha} + A), \qquad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{3.4}$$

Пусть l — одно из чисел $1, 2, \dots, s$. Из леммы 2.1 получаем, что

$$\|D^l \varphi_n\|_{2,\alpha} \le (2^n)^l \, \|\varphi_n\|_{2,\alpha}. \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5) и того, что $r - l > 0$, следует, что в $L_{2,\alpha}$ сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} D^l \varphi_n,$$

а так как оператор D замкнутый, то

$$D^l f = \sum_{n=0}^{\infty} D^l \varphi_n \in L_{2,\alpha}.$$

В частности, функция $g = D^s f$ принадлежит пространству $L_{2,\alpha}$.

Пусть $\Phi_n := D^s \varphi_n$, тогда

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n, \qquad \Phi_n \in \mathcal{I}_{2^n}, \qquad \|\Phi_n\|_{2,\alpha} \le \frac{c_3}{2^{n(r-s)}}(\|f\|_{2,\alpha} + A). \tag{3.6}$$

Возьмем произвольное число $h > 0$. Из непрерывности разностного оператора Δ_h^k следует, что

$$\Delta_h^k g = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_h^k \Phi_n.$$

Подберем неотрицательное целое число N так, чтобы

$$2^{-N} \le h < 2^{-(N-1)} \tag{3.7}$$

(если $h \geq 1$, то в (3.7) оставляем только левое неравенство). Тогда

$$\Delta_h^k g = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_h^k \Phi_n + \sum_{n=N}^{\infty} \Delta_h^k \Phi_n \tag{3.8}$$

(при $N = 0$ в (3.8) остается только второе слагаемое). Оценим слагаемые в (3.8). При $n \leq N - 1$, используя неравенства (2.2), (3.6) и (3.7), получим

$$\|\Delta_h^k \Phi_n\|_{2,\alpha} \leq 2^k (2^n h)^k \|\Phi_n\|_{2,\alpha} \leq c_4(\|f\|_{2,\alpha} + A)\, 2^{n(s+k-r)} 2^{-(N-1)k}.$$

Тогда, используя (3.7),

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=0}^{N-1} \Delta_h^k \Phi_n\|_{2,\alpha} &\leq \frac{c_4(\|f\|_{2,\alpha} + A)}{2^{k(N-1)}} \sum_{n=0}^{N-1} 2^{(s+k-r)n} = \\ &= \frac{c_4(\|f\|_{2,\alpha} + A)}{2^{k(N-1)}} \, \frac{2^{(s+k-r)N} - 1}{2^{(s+k-r)} - 1} \leq \\ &\leq c_5\,(\|f\|_{2,\alpha} + A) h^{r-s}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Проверим, что при $n \geq N$ выполняется неравенство

$$\|\Delta_h^k \Phi_n\|_{2,\alpha} \leq 2^{2k} \|\Phi_n\|_{2,\alpha}. \tag{3.10}$$

Используя неравенство $\|T^h f\|_{2,\alpha} \leq 2\sqrt{2}\,\|f\|_{2,\alpha} \leq 3\,\|f\|_{2,\alpha}$ (см. неравенство (2.14) в [1]), получим

$$\|\Delta_h \Phi_n\|_{2,\alpha} = \|T^h \Phi_n - \Phi_n\|_{2,\alpha} \leq \|T^h \Phi_n\|_{2,\alpha} + \|\Phi_n\|_{2,\alpha} \leq 4\,\|\Phi_n\|_{2,\alpha},$$

откуда вытекает неравенство (3.10).

Тогда

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=N}^{\infty} \Delta_h^k \Phi_n\|_{2,\alpha} &\leq 2^{2k} c_3(\|f\|_{2,\alpha} + A) \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-(r-s)n} = \\ &= 2^{2k} c_4(\|f\|_{2,\alpha} + A)\, 2^{-N(r-s)} (1 - 2^{(s-r)})^{-1} \leq \\ &\leq c_6(\|f\|_{2,\alpha} + A)\, h^{r-s}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Из (3.9) и (3.11) следует, что

$$\|\Delta_h^k g\|_{2,\alpha} \leq c_7\, h^{r-s}(\|f\|_{2,\alpha} + A),$$

откуда

$$\omega_k(g,\delta)_{2,\alpha} \le c_7(\|f\|_{2,\alpha} + A)\delta^{r-s}, \qquad \delta > 0,$$

и

$$h^r_{2,\alpha}(f) \le c_7(\|f\|_{2,\alpha} + A).$$

В результате получаем, что $f \in H^r_{2,\alpha}$ и выполняется неравенство (1.5).

Пусть

$$\widetilde{h}^r_{2,\alpha}(f) := \sup_{\nu \ge 1} \nu^r\, E_\nu(f)_{2,\alpha}.$$

Из теоремы 1.1 следует, что пространство $H^r_{2,\alpha}$ состоит из тех и только тех функций $f \in L_{2,\alpha}$, для которых $\widetilde{h}^r_{2,\alpha}(f) < \infty$. При этом норма в $H^r_{2,\alpha}$ эквивалентна норме

$$^1\|f\|_{H^r_{2,\alpha}} := \|f\|_{2,\alpha} + \widetilde{h}^r_{2,\alpha}(f).$$

В частности, при различных k, s таких, что $k > r-s > 0$, пространства $H^r_{2,\alpha}$ совпадают и их нормы эквивалентны.

В следующей теореме будут получены различные эквивалентные нормировки пространств $B^r_{2,q,\alpha}$, в частности, из нее будет следовать теорема 1.2. Как и раньше, пусть $r > 0$, $a > 1$ — действительные числа, k и s — произвольные неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $k > r - s > 0$. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $^jB^r_{2,q,\alpha}$, $j = 1, 2, 3, 4$, если $f \in L_{2,\alpha}$ и конечна полунорма $^jb^r_{2,q,\alpha}(f)$, где:

$$^1b^r_{2,q,\alpha}(f) \quad := \quad b^r_{2,q,\alpha}(f) \quad (\text{полунорма } b^r_{2,q,\alpha}(f) \text{ определена в §1});$$

$$^2b^r_{2,q,\alpha}(f) \quad := \quad \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^a \frac{(\omega_k(D^s f,\delta)_{2,\alpha})^q}{\delta^{(r-s)q}}\,\frac{d\delta}{\delta}\right)^{1/q} & \text{при} \quad q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{0<\delta\le a} \delta^{-(r-s)}\,\omega_k(D^s f,\delta)_{2,\alpha} & \text{при} \quad q = \infty; \end{cases}$$

$$^3b^r_{2,q,\alpha}(f) \quad := \quad \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq}\ (E_{a^j}(f)_{2,\alpha})^q\right)^{1/q} & \text{при} \quad q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{j\in\mathbb{Z}_+} a^{jr}\,E_{a^j}(f)_{2,\alpha} & \text{при} \quad q = \infty; \end{cases}$$

$$
{}^4 b^r_{2,q,\alpha}(f) \quad := \quad \begin{cases} \inf\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq}\,\|Q_{a^j}\|^q_{2,\alpha}\right)^{1/q} & \text{при} \quad q<\infty, \\ \inf\left(\displaystyle\sup_{j\in\mathbb{Z}_+}\|Q_{a^j}\|_{2,\alpha}\right) & \text{при} \quad q=\infty, \end{cases}
$$

нижняя грань берется по всем представлениям f в виде сходящегося в $L_{2,\alpha}$ ряда из функций с ограниченным спектром

$$
f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} Q_{a^j}(t), \qquad Q_{a^j}(t)\in\mathcal{I}_{a^j}.
$$

Пространства ${}^j B^r_{2,q,\alpha}$ являются банаховыми пространствами (БП) относительно норм

$$
\|f\|_{{}^j B^r_{2,q,\alpha}} := \|f\|_{2,\alpha} + {}^j b^r_{2,q,\alpha}(f). \tag{3.12}
$$

Теорема 3.1. *Пространства* ${}^j B^r_{2,q,\alpha}$, $j=1,2,3,4$, *совпадают и их нормы* (3.12) *эквивалентны* (*т. е. банаховые пространства* ${}^j B^r_{2,q,\alpha}$ *эквивалентны*).

Отметим, что из эквивалентности БП ${}^1 B^r_{2,q,\alpha}$ и ${}^3 B^r_{2,q,\alpha}$ следует теорема 1.2. Для краткости будем использовать обозначения ${}^j B := {}^j B^r_{2,q,\alpha}$, ${}^j b := {}^j b^r_{2,q,\alpha}$, $E_N(f) := E_N(f)_{2,q,\alpha}$, $\|f\| := \|f\|_{2,\alpha}$ и т. д. Выражение $V_1 \hookrightarrow V_2$ будет обозначать, что БП V_1 вложено в БП V_2.

Доказательство теоремы 3.1. Общая схема доказательства соответствует схеме доказательства аналогичных теорем в [2] для обычных модулей непрерывности. Будем всюду предполагать, что $q<\infty$. Более простой случай $q=\infty$ может быть рассмотрен аналогично.

1°. Вложение ${}^1 B \hookrightarrow {}^2 B$ очевидно.

2° Докажем, что ${}^2 B \hookrightarrow {}^3 B$. Пусть $f \in {}^2 B$, тогда

$$
\begin{aligned}
\left({}^2 b(f)\right)^q &= \int_0^a (\omega_k(D^s f,\delta))^q\ \delta^{(s-r)q-1}\,d\delta = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\int_{a^{-j}}^{a^{1-j}} (\omega_k(D^s f,\delta))^q\ \delta^{(s-r)q-1}\,d\delta.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Пользуясь монотонностью модуля непрерывности $\omega_k(f,\delta)$ по δ и теоремой 1.2 из [1], получим, что

$$\int_{a^{-j}}^{a^{1-j}} (\omega_k(D^s f, \delta))^q \, \delta^{(s-r)q-1} \, d\delta \geq$$
$$\geq \left(\omega_k(D^s f, a^{-j})\right)^q \, \left(a^{1-j}\right)^{(s-r)q-1} \left(a^{1-j} - a^{-j}\right) \geq c_1 \, a^{jrq} \, (E_{a^j}(f))^q \,, \qquad (3.14)$$

где постоянная c_1 не зависит от f и j. Из (3.13) и (3.14) следует, что

$$\left({}^2 b(f)\right)^q \geq c_1 \, \left({}^3 b(f)\right)^q ,$$

откуда вытекают неравенство ${}^3 b(f) \leq c_2 \, {}^2 b(f)$ и вложение ${}^2 B \hookrightarrow {}^3 B$.

3°. Докажем, что ${}^3 B \hookrightarrow {}^4 B$. Пусть $f \in {}^3 B$. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ возьмем функцию $g_{a^j} \in \mathcal{I}_{a^j}$, удовлетворяющую условию

$$\|f - g_{a^j}\| \leq 2 \, E_{a^j}(f).$$

Пусть

$$Q_{a^0} = g_{a^0}, \quad Q_{a^j} = g_{a^j} - g_{a^{j-1}} \quad \text{при} \quad j \geq 1.$$

Тогда

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_{a^j} \,,$$

ряд сходится в $L_{2,\alpha}$, так как $E_{a^j}(f) \to 0$ при $j \to \infty$.

Заметим, что

$$\|Q_{a^0}\| \leq \|f\| + \|f - g_0\| \leq \|f\| + 2 \, E_{a^0}(f) \leq 3\|f\|,$$
$$\|Q_{a^j}\| \leq \|g_{a^j} - f\| + \|f - g_{a^{j-1}}\| \leq 4 \, E_{a^{j-1}}(f), \quad j \geq 1.$$

Используя эти неравенства, получим, что

$$\left({}^4 b(f)\right)^q \leq \sum_{j=0}^{\infty} a^{jqr} \, \|Q_{a^j}\|^q \leq 3^q \, \|f\|^q + \sum_{j=1}^{\infty} 4^q \, a^{jqr} \, \left(E_{a^{j-1}}(f)\right)^q ,$$

откуда следует, что

$${}^4 b(f) \leq c_3 \left(\|f\| + \left(\sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq} \, \left(E_{a^j}(f)\right)^q \right)^{1/q} \right) = c_3 \, \|f\|_{{}^3 B}.$$

Из последнего неравенства и вытекает вложение ${}^3 B \hookrightarrow {}^4 B$.

4°. Докажем, что ${}^4B \hookrightarrow {}^1B$. Пусть $f \in {}^4B$, $\varepsilon > 0$, тогда f можно представить в виде суммы (j во всех суммах пробегает $\mathbb{Z}_+$)

$$f = \sum Q_{a^j}, \quad Q_{a^j} \in \mathcal{I}_{a^j},$$

причем

$$\left(\sum a^{jqr} \, \|Q_{a^j}\|^q\right)^{1/q} \leq {}^4b(f) + \varepsilon. \tag{3.15}$$

Проверим, что ряд $\sum D^s Q_{a^j}$ сходится в $L_{2,\alpha}$. Для этого заметим, что

$$\|D^s Q_{a^j}\| \leq a^{js} \|Q_{a^j}\| = a^{-(r-s)j} a^{jr} \, \|Q_{a^j}\|$$

(использовано неравенство типа Бернштейна из леммы 2.1). Воспользовавшись неравенством Гельдера, получим

$$\sum \|D^s Q_{a^j}\| \leq \sum a^{-(r-s)j} a^{jr} \|Q_{a^j}\| \leq$$
$$\leq c_4 \left(\sum a^{jrq} \, \|Q_{a^j}\|^q\right)^{1/q} \leq c_4 \, \left({}^4b(f) + \varepsilon\right), \tag{3.16}$$

следовательно, ряд $\sum D^s Q_{a^j}$ сходится в $L_{2,\alpha}$. Из замкнутости оператора D вытекает, что

$$D^s f = \sum D^s Q_{a^j} \in L_{2,\alpha}. \tag{3.17}$$

Отметим также, что из (3.16) и (3.17) следует, что

$$\|D^s f\| \leq c_4 \, \left({}^4b(f) + \varepsilon\right). \tag{3.18}$$

Заметим, что имеет место очевидное неравенство

$$\omega_k(D^s f, \delta) \leq 2^{2k} \, \|D^s f\|. \tag{3.19}$$

Используя (3.18) и (3.19) получим, что

$$\int_1^\infty (\omega_k(D^s f, \delta))^q \; \delta^{-(r-s)q-1} \, d\delta \leq$$
$$\leq 2^{2kq} \|D^s f\|^q \int_1^\infty \delta^{-(r-s)q-1} \, d\delta \leq c_5 \, \left({}^4b(f) + \varepsilon\right). \tag{3.20}$$

Для любого натурального N можно написать равенство

$$\Delta_h^k(D^s f) = \sum_{j=0}^{N} \Delta_h^k(D^s Q_{a^j}) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \Delta_h^k(D^s Q_{a^j}).$$

Используя неравенства типа Бернштейна из лемм 2.1 и 2.2, получим, что

$$\|\Delta_h^k(D^s f)\| \le h^k \sum_{j=0}^{N} a^{j(k+s)} \|Q_{a^j}\| + 2^{2k} \sum_{j=N+1}^{\infty} a^{js}\, \|Q_{a^j}\|.$$

Тогда

$$\omega_k(D^s f, a^{-N}) = \sup_{0<h\le a^{-N}} \|\Delta_h^k(D^s f)\| \le$$

$$\le a^{-Nk} \sum_{j=0}^{N} a^{j(k+s)} \|Q_{a^j}\| + 2^{2k} \sum_{j=N+1}^{\infty} a^{js}\, \|Q_{a^j}\|.$$

Делая замену $\delta = a^{-u}$, имеем

$$\int_0^1 (\omega_k(D^s f, \delta))^q \; \delta^{-(r-s)q-1}\, d\delta =$$

$$= \ln a \int_0^\infty \big(\omega_k(D^s f, a^{-u})\big)^q \; a^{q(r-s)u}\, du =$$

$$= \ln a \sum_{N=0}^{\infty} \int_N^{N+1} a^{q(r-s)u} \big(\omega_k(D^s f, a^{-u})\big)^q \; du \le$$

$$\le \ln a \sum_{N=0}^{\infty} \big(\omega_k(D^s f, a^{-N})\big)^q \; a^{q(r-s)(N+1)} \le$$

$$\le c_6\, \mathcal{J}_1 + c_7\, \mathcal{J}_2, \tag{3.21}$$

где

$$\mathcal{J}_1 = \sum_{N=0}^{\infty} a^{q(r-s-k)N} \left(\sum_{j=0}^{N} a^{j(k+s)}\, \|Q_a^j\| \right)^q,$$

$$\mathcal{J}_2 = \sum_{N=0}^{\infty} a^{q(r-s)N} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} a^{js} \, \|Q_{a^j}\| \right)^q .$$

Для выражений $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ в книге [2] (см. [2], пункт 5.6, формулы (17) – (19)) получены оценки

$$\mathcal{J}_1 \leq c_8 \sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq} \|Q_{a^j}\|^q, \tag{3.22}$$

$$\mathcal{J}_2 \leq c_9 \sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq} \|Q_{a^j}\|^q. \tag{3.23}$$

Окончательно из (3.20), (3.21), (3.22) и (3.23) следует, что

$$\int_0^{\infty} (\omega_k(D^s f, \delta))^q \; \delta^{-(r-s)q-1} \, d\delta \leq c_{10} \left({}^4 b(f) + \varepsilon \right)^q ,$$

а отсюда

$${}^1 b(f) \leq c_{10} {}^4 b(f),$$

что доказывает вложение ${}^4 B \hookrightarrow {}^1 B$.

В результате получена цепочка вложений

$${}^1 B \hookrightarrow {}^2 B \hookrightarrow {}^3 B \hookrightarrow {}^4 B \hookrightarrow {}^1 B,$$

что и завершает доказательство теоремы 3.1.

Résumé

Using generalized translations of Dunkl we define Nikolskii — Besov type function spaces and obtain their description in terms of the best approximations.

Список литературы

[1] Белкина Е. С. *Гармонический анализ Данкля и некоторые задачи теории приближений функций. I* / Е. С. Белкина // Труды ПетрГУ. Сер. матем. 2006. Вып. 13. С. 3–25.

[2] Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения* / С. М. Никольский. М.: Наука, 1977.