Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 13, 2006

УДК 519.85

Р. В. Воронов, В. В. Поляков

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПСЕВДОИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В статье показано, что число положительных переменных в оптимальном решении задачи линейного программирования с псевдоинтервальными переменными не превышает числа ограничений задачи.

В работах [1–3] было показано, что при моделировании технологических комплексов непрерывного действия в целях решения задач координации функционирования элементов технологической системы возникает следующая математическая задача:

$$\sum_{j\in N} c_j w_j \to \max, \tag{1}$$

ограничения

$$\sum_{j\in N} a_{ij}x_j \le b_i, \qquad i\in M, \tag{2}$$

должны выполняться для всех значений x_j, попадающих в интервалы:

$$x_j \in [w_j-\sigma_j; w_j+\sigma_j] \quad \text{при} \quad w_j \ge \sigma_j, \quad j\in N, \tag{3}$$

$$x_j \in [0; w_j+\sigma_j] \quad \text{при} \quad 0 < w_j < \sigma_j, \quad j\in N, \tag{4}$$

$$x_j = 0 \quad \text{при} \quad w_j = 0, \quad j\in N, \tag{5}$$

$$w_j \ge 0, \quad j\in N, \tag{6}$$

где w_j — основные переменные задачи, определяющие интервалы возможных значений переменных x_j; x_j — вспомогательные переменные, которые могут быть названы псевдоинтервальными, со срединными значениями интервалов w_j, необходимые для определения условий (2)–(5) (ограничения (2) должны выполняться для любого значения псевдоинтервальной переменной x_j, принадлежащего интервалу, определяемому соотношениями (3)–(5); σ_j — положительная величина, определяющая ширину интервала значений j-й псевдоинтервальной переменной); a_{ij}, b_i, c_j — константы.

Задача (1)–(6) вследствие специфического характера переменных x_j не является стандартной задачей, и требуется поиск методов ее решения. Как показано в [4], задача (1)–(6) преобразуется к следующей задаче нелинейного программирования, часть переменных которой — логические:

$$\sum_{j\in N} c_j w_j \to \max, \tag{7}$$

$$\sum_{j\in N} \left(a_{ij}w_j + a_{ij}^{+}\sigma_j z_j + a_{ij}^{-} w_j z_j + |a_{ij}|\,\sigma_j y_j\right) \le b_i, \quad i \in M, \tag{8}$$

$$\sigma_j y_j \le w_j \le \sigma_j z_j + D_j y_j, \qquad j \in N, \tag{9}$$

$$z_j + y_j \le 1, \qquad j \in N, \tag{10}$$

$$z_j,\ y_j \in \{0,1\}, \qquad j \in N, \tag{11}$$

$$w_j \ge 0, \qquad j \in N, \tag{12}$$

где D_j — большие числа, а преобразования “+” и “−” определяются следующим образом:

$$\alpha^{+} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\alpha^{-} = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } \alpha < 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение возникающей нелинейной задачи (7)–(12) может быть сведено к решению $3^{|N|}$ ($|N|$ — количество элементов множества N) задач линейного программирования, получаемых путем фиксации значений переменных y_j и z_j. Таким образом, вычислительная сложность решения этой задачи экспоненциально зависит от числа основных переменных, задача является вычислительно трудоемкой и, следовательно, требуется поиск более эффективных методов решения.

Далее будет доказано, что если задача (1)–(6) имеет решение, то, подобно задаче линейного программирования, существует оптимальное решение, содержащее не более $|M|$ ненулевых переменных w_j. В этом случае решение нашей задачи может быть сведено к направленному перебору базисных решений задач вида:

$$\sum_{j\in N} c_j w_j \to \max, \tag{13}$$

$$\sum_{j\in N} a_{ij} w_j + u_i = b'_i, \qquad i \in M, \tag{14}$$

$$w_j \geq 0, \qquad j \in N, \tag{15}$$

$$u_i \geq 0, \qquad i \in M, \tag{16}$$

каждое из которых также содержит не более чем $|M|$ ненулевых переменных. Здесь u_i — дополнительные переменные, b'_i — правые ограничения, вид которых уточняется ниже.

Теорема 1. *Если задача (1)–(6) имеет решение, то существует ее решение, содержащее не более $|M|$ положительных значений переменных w_j.*

Доказательство. Пусть w^* — оптимальное решение задачи (1)–(6). Введем в рассмотрение обозначения трех индексных множеств — одно для нулевых, два других — для положительных значений величин w_j^*:

$$\tilde{N}_0 = \{j \mid j \in N,\ w_j^* = 0\},$$

$$\tilde{N}_1 = \{j \mid j \in N,\ 0 < w_j^* < \sigma_j\},$$

$$\tilde{N}_2 = \{j \mid j \in N,\ w_j^* \geq \sigma_j\}.$$

Так как для значений w_j^* $(j \in N)$ выполнены условия (2)–(5), то справедливо неравенство:

$$\sum_{j\in\tilde N_1} a_{ij}^+(w_j^* + \sigma_j) + \sum_{j\in\tilde N_2} a_{ij}(w_j^* + \mathrm{sign}(a_{ij})\sigma_j) \le b_i, \quad i \in M,$$

или

$$\sum_{j\in\tilde N_1} a_{ij}^+ w_j^* + \sum_{j\in\tilde N_1} a_{ij}^+\sigma_j + \sum_{j\in\tilde N_2} a_{ij} w_j^* + \sum_{j\in\tilde N_2} |a_{ij}|\sigma_j \le b_i, \quad i \in M,$$

где

$$a_{ij}^+ = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } a_{ij} > 0, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

или, иначе,

$$\sum_{j\in\tilde N_1} a_{ij}^+ w_j^* + \sum_{j\in\tilde N_2} a_{ij} w_j^* \le b_i - \sum_{j\in\tilde N_1} a_{ij}^+\sigma_j - \sum_{j\in\tilde N_2} |a_{ij}|\sigma_j, \quad i \in M. \tag{17}$$

Теперь мы получаем возможность рассмотреть следующую задачу линейного программирования, в которой срединные значения псевдоинтервальных переменных исходной задачи w_j $(j \in \tilde N_1 \cup \tilde N_2)$ выступают в качестве обычных переменных, причем $\tilde N_1 \cap \tilde N_2 = \emptyset$, $\tilde N_1 \subset N$, $\tilde N_2 \subset N$, а u_i — дополнительные переменные, необходимые для приведения задачи к каноническому виду:

$$\sum_{j\in\tilde N_1\cup\tilde N_2} c_j w_j \to \max, \tag{18}$$

$$\sum_{j\in\tilde N_1} a_{ij}^+ w_j + \sum_{j\in\tilde N_2} a_{ij} w_j + u_i = b_i - \sum_{j\in\tilde N_1} a_{ij}^+\sigma_j - \sum_{j\in\tilde N_2} |a_{ij}|\sigma_j, \quad i \in M, \tag{19}$$

$$w_j \ge 0, \qquad j \in \tilde N_1 \cup \tilde N_2, \tag{20}$$

$$u_i \ge 0, \qquad i \in M. \tag{21}$$

Рассмотрим оптимальное допустимое базисное решение $(\hat w, \hat u)$ задачи (18)–(21), включающее переменные w_j $(j \in \tilde N_1 \cup \tilde N_2)$ и u_i $(i \in M)$.

Очевидно, что значение целевой функции (18) на решении $\hat{w}$ не меньше, чем значение целевой функции (1) на решении w^* (в силу того, что $\hat{w}$ является оптимальным решением задачи (18)–(21)). Покажем, что $\hat{w}$ является решением задачи (1)–(6).

Может оказаться, что в решении $\hat{w}$ некоторая базисная переменная $\hat{w}_j$ из множества $\tilde{N}_1$ будет не меньше, чем σ_j, что не согласуется с определением множества $\tilde{N}_1$. Аналогичным образом, может оказаться, что некоторая переменная $\hat{w}_j$ из множества $\tilde{N}_2$ будет меньше, чем σ_j, что не согласуется с определением множества $\tilde{N}_2$. Но мы можем на основе базисного решения $\hat{w}$ задачи (18)–(21) сформировать новые множества $\hat{N}_1$ и $\hat{N}_2$, по аналогии с определением множеств $\tilde{N}_1$ и $\tilde{N}_2$:

$$\hat{N}_1 = \{j \,|\, j \in N, \quad 0 < \hat{w}_j < \sigma_j\},$$

$$\hat{N}_2 = \{j \,|\, j \in N, \quad \hat{w}_j \geq \sigma_j\}.$$

После этого нужно показать, что из равенств (19) следуют неравенства

$$\sum_{j \in \hat{N}_1} a_{ij}^{+} \hat{w}_j + \sum_{j \in \hat{N}_2} a_{ij} \hat{w}_j \leq b_i - \sum_{j \in \hat{N}_1} a_{ij}^{+} \sigma_j - \sum_{j \in \hat{N}_2} |a_{ij}| \sigma_j, \quad i \in M, \tag{22}$$

что и будет сделано ниже.

Введем следующие обозначения:

$$\hat{N}_{10} = \{j \,|\, j \in \tilde{N}_1,\ \hat{w}_j = 0\},$$

$$\hat{N}_{11} = \{j \,|\, j \in \tilde{N}_1,\ 0 < \hat{w}_j < \sigma_j\},$$

$$\hat{N}_{12} = \{j \,|\, j \in \tilde{N}_1,\ \hat{w}_j \geq \sigma_j\},$$

$$\hat{N}_{20} = \{j \,|\, j \in \tilde{N}_2,\ \hat{w}_j = 0\},$$

$$\hat{N}_{21} = \{j \,|\, j \in \tilde{N}_2,\ 0 < \hat{w}_j < \sigma_j\},$$

$$\hat{N}_{22} = \{j \mid j \in \tilde{N}_2,\ \hat{w}_j \geq \sigma_j\},$$

с использованием которых перепишем неравенства (22) для переменных $\hat{w}_j$ в следующем виде:

$$\sum_{j \in \hat{N}_{10} \cup \hat{N}_{11} \cup \hat{N}_{12}} a_{ij}^{+} \hat{w}_j + \sum_{j \in \hat{N}_{20} \cup \hat{N}_{21} \cup \hat{N}_{22}} a_{ij} \hat{w}_j \leq$$

$$\leq b_i - \sum_{j \in \hat{N}_{10} \cup \hat{N}_{11} \cup \hat{N}_{12}} a_{ij}^{+} \sigma_j - \sum_{j \in \hat{N}_{20} \cup \hat{N}_{21} \cup \hat{N}_{22}} |a_{ij}| \sigma_j, \quad i \in M.$$

Так как $\hat{w}_j = 0$ для $j \in \hat{N}_{10} \cup \hat{N}_{20}$, то

$$\sum_{j \in \hat{N}_{11} \cup \hat{N}_{12}} a_{ij}^{+} \hat{w}_j + \sum_{j \in \hat{N}_{21} \cup \hat{N}_{22}} a_{ij} \hat{w}_j \leq$$

$$\leq b_i - \sum_{j \in \hat{N}_{11} \cup \hat{N}_{12}} a_{ij}^{+} \sigma_j - \sum_{j \in \hat{N}_{21} \cup \hat{N}_{22}} |a_{ij}| \sigma_j, \quad i \in M.$$

Если $a_{ij} < 0$ для некоторых $i \in M$ и $j \in \hat{N}_{21}$, то, так как $\hat{w}_j < \sigma_j$, имеем $a_{ij}\hat{w}_j > a_{ij}\sigma_j$. Вычтем слева и справа такие $a_{ij}\hat{w}_j$ и $a_{ij}\sigma_j$, что не изменит знака неравенства. Получим:

$$\sum_{j \in \hat{N}_{11} \cup \hat{N}_{21} \cup \hat{N}_{12}} a_{ij}^{+} \hat{w}_j + \sum_{j \in \hat{N}_{22}} a_{ij} \hat{w}_j \leq$$

$$\leq b_i - \sum_{j \in \hat{N}_{11} \cup \hat{N}_{21} \cup \hat{N}_{12}} a_{ij}^{+} \sigma_j - \sum_{j \in \hat{N}_{22}} |a_{ij}| \sigma_j, \quad i \in M.$$

Аналогичным образом, если $a_{ij} < 0$ для некоторых $i \in M$ и $j \in \hat{N}_{12}$, то, так как $\hat{w}_j \geq \sigma_j$, имеем $a_{ij}\hat{w}_j \leq a_{ij}\sigma_j$. Прибавим слева и справа такие $a_{ij}\hat{w}_j$ и $a_{ij}\sigma_j$. Получим:

$$\begin{gathered}\sum_{j \in \hat{N}_{11} \cup \hat{N}_{21}} a_{ij}^{+} \hat{w}_j + \sum_{j \in \hat{N}_{12} \cup \hat{N}_{22}} a_{ij} \hat{w}_j \leq \\ \leq b_i - \sum_{j \in \hat{N}_{11} \cup \hat{N}_{21}} a_{ij}^{+} \sigma_j - \sum_{j \in \hat{N}_{12} \cup \hat{N}_{22}} |a_{ij}| \sigma_j, \quad i \in M.\end{gathered} \tag{23}$$

Получившееся неравенство (23) эквивалентно неравенству (22), так как

$$\hat{N}_1 = \hat{N}_{11} \cup \hat{N}_{21},$$

$$\hat{N}_2 = \hat{N}_{12} \cup \hat{N}_{22}.$$

Поскольку переменные, не входящие в множества $\hat{N}_{11}$, $\hat{N}_{12}$, $\hat{N}_{21}$ и $\hat{N}_{22}$, равны нулю, то для переменных $\hat{w}$ выполняются ограничения задачи (1)–(6) и, следовательно, $\hat{w}_j$ является решением псевдоинтервальной задачи (1)–(6). Набор переменных $\hat{w}_j$ является базисным для задачи (18)–(21) и, следовательно, среди этих переменных ненулевых не более чем $|M|$. $\square$

Таким образом, можно привести задачу в комбинаторной формулировке, эквивалентную задаче с псевдоинтервальными переменными (1)–(6):

$$\sum_{j \in N_1 \cup N_2} c_j w_j \to \max,$$

$$\sum_{j \in N_1} a_{ij}^{+} w_j + \sum_{j \in N_2} a_{ij} w_j + u_i = b_i - \sum_{j \in N_1} a_{ij}^{+} \sigma_j - \sum_{j \in N_2} |a_{ij}| \sigma_j, \quad i \in M,$$

$$w_j \geq 0, \qquad j \in N_1 \cup N_2,$$

$$|N_1 \cup N_2| \leq |M|,$$

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset, \quad N_1 \subset N, \quad N_2 \subset N.$$

В этой задаче искомыми являются два дизъюнктных подмножества N_1 и N_2 множества N. Для каждых таких подмножеств допустимое базисное решение содержит не более $|M|$ положительных значений переменных w_j.

Следовательно, если задача с псевдоинтервальными переменными имеет решение, то всегда существует такое оптимальное решение, которое содержит не более $|M|$ положительных значений основных переменных w_j. Таким образом, в этой части свойства оптимального решения задачи с псевдоинтервальными переменными подобны свойствам оптимального решения обычной задачи линейного программирования. Данное обстоятельство позволяет искать эвристические алгоритмы решения задачи (1)–(6), подобные симплексному методу и связанные с направленным перебором базисных решений задач линейного программирования вида (18)–(21).

Résumé

The optimization task with linear constraints of pseudo-interval variables is discussed in the article. It is proofed that if the task has optimal solution, then there is a solution that has not more than M non-zero variables (M is the number of constraints of the task).

Список литературы

[1] Поляков В. В. *Об одном подходе к моделированию задач оптимального планирования работы целлюлозно-бумажного производства* / В. В. Поляков // I МНТК "Новые информационные технологии в ЦБП": Тез. докл. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 1994. С. 33–34.

[2] Поляков В. В. *Некоторые аспекты моделирования работы нефтехимического предприятия* / В. В. Поляков, Т. С. Терновская // Труды ПетрГУ. Сер. Прикладная математика и информатика. 2002. Вып. 9. С. 39–46.

[3] Поляков В. В. *О возможности использования задач оптимизации с интервальными решениями в оперативно-диспетчерском управлении* / В. В. Поляков, С. В. Поляков, Е. А. Корольков // VI МНТК "Новые информационные технологии в ЦБП и энергетике": Мат. конф. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2004. С. 81–85.

[4] Визерова А. В. *Задачи линейной оптимизации с абсолютными интервальными переменными* / А. В. Визерова, Р. В. Воронов, В. В. Поляков; Петрозаводский государственный университет. Петрозаводск, 2005. 6 с. Деп. в ВИНИТИ 15.02.2005, є 224–В2005.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: rvoronov@karelia.ru, poljakov.v@karelia.ru