Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 13, 2006

УДК 517.54

А. Г. Гушкалова

ОБ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ДВУХ ФУНКЦИОНАЛОВ В КЛАССЕ S

В работе исследуется вопрос о структуре функций, доставляющих локальный экстремум двум функционалам достаточно общего вида в классе S однолистных функций.

Пусть S — класс однолистных и аналитических в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$. На множестве всех аналитических в Δ функций введем метрику

$$\rho(f, g) = \max_{|z|=1/2} |f(z) - g(z)|. \tag{1}$$

Пусть $F = F(c_2, \ldots, c_n)$ и $\Phi = \Phi(c_2, \ldots, c_n)$ — непрерывные функционалы на S. Обозначим $S_{loc}(F, \Phi)$ — множество функций из S, реализующих локальный экстремум одновременно для функционалов F и Φ в метрике (1).

Далее будут приведены результаты, касающиеся описания множества $S_{loc}(F, \Phi)$ при наличии специальных ограничений на F и Φ.

A.C. Schaeffer и D.C. Spencer в работе [1] показали, что

$$f_0 \in S_{loc}(|c_n|, |c_m|) \Longrightarrow f_0 \in Q = \left\{ \frac{z}{(1 - \eta z)(1 - \sigma z)}, |\eta| = |\sigma| = 1 \right\}$$

при $n - 1$ и $m - 1$ взаимно простых. Таким образом, была решена задача описания множества $S_{loc}(F, \Phi)$ для $F = |c_n|$, $\Phi = |c_m|$ и $n - 1$, $m - 1$ взаимно простых.

В. В. Старковым в работе [2] был получен вид функции, реализующей локальный экстремум функционалов $|c_n|$ и $|c_m|$ без дополнительных требований к рассматриваемым функционалам: если $f_0 \in S_{loc}(|c_n|, |c_m|)$, то

$$f_0(z) = z[(1 - e^{i\tau_1} z^{d_0})(1 - e^{i\tau_2} z^{d_0})]^{-1/d_0}, \tag{2}$$

здесь под степенной функцией понимается главная ее ветвь, $\tau_1, \ \tau_2 \in \mathbb{R}$, d_0 — некоторый общий делитель $(n-1)$ и $(m-1)$.

Этот результат был существенно обобщен В. В. Старковым (см. [3]).

Теорема А. *Пусть* $\psi_1(\zeta) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l(\zeta-1)^l, \ \psi_2(\zeta) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} B_l(\zeta-1)^l$ — *функции, регулярные в окрестности точки* $\zeta = 1$, $A_1 B_1 \neq 0$; *пусть* $n \neq m$ — *натуральные числа,* $m \geq 2, \ n \geq 2$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq \dfrac{n}{n-1}, \ \beta \neq \dfrac{m}{m-1}$. *Обозначим*

$$\sigma_n(j) = \begin{cases} 2, & j \neq \dfrac{n+1}{2} \\ 1, & j = \dfrac{n+1}{2} \end{cases}; \quad \sigma_m(j) = \begin{cases} 2, & j \neq \dfrac{m+1}{2} \\ 1, & j = \dfrac{m+1}{2} \end{cases};$$

φ_n — *n-й тейлоровский коэффициент аналитической в* Δ *функции* φ *в ее разложении по степеням z. Пусть также*

$$\frac{\sigma_n(j) A_2(\alpha + (1-\alpha)(n-j+1))(\alpha + (1-\alpha)j)}{A_1(\alpha + (1-\alpha)n)}(m - 2j + 1) -$$
$$- \frac{\sigma_m(j) B_2(\beta + (1-\beta)(m-j+1))(\beta + (1-\beta)j)}{B_1(\beta + (1-\beta)m)}(n - 2j + 1) \neq j(n-m)$$

для всех натуральных j, $2 \leq j < \min(n, m)$. *Тогда, если функция* $f_0(z)$ *дает локальный экстремум в классе* S *функционалам*

$$\begin{aligned} F = F(c_2, \ldots, c_n) &= Re\left[\left\{\psi_1\left(\alpha \frac{f(z)}{z} + (1-\alpha) f'(z)\right)\right\}_{n-1}\right], \\ \Phi = \Phi(c_2, \ldots, c_m) &= Re\left[\left\{\psi_2\left(\beta \frac{f(z)}{z} + (1-\beta) f'(z)\right)\right\}_{m-1}\right], \end{aligned} \tag{3}$$

то $f_0(z)$ имеет вид (2).

Далее будем рассматривать функционалы более общего вида, чем в (3):

$$F = F(c_2, \ldots, c_n) = Re \left[\left\{ \psi_1 \left(\alpha \frac{f(z)}{z} + (1-\alpha)[f'(z)]^\gamma \right) \right\}_{n-1} \right],$$
$$\Phi = \Phi(c_2, \ldots, c_m) = Re \left[\left\{ \psi_2 \left(\beta \frac{f(z)}{z} + (1-\beta)[f'(z)]^\gamma \right) \right\}_{m-1} \right], \tag{4}$$

где $\gamma \in \mathbb{C}$. При $\gamma = 1$ они принимают вид (3).

В этой работе получен аналог теоремы А для функционалов (4): предъявлены условия, при выполнении которых, если $f_0 \in S_{loc}(F, \Phi)$, то f_0 имеет вид (2). Далее будем использовать обозначения, введенные в формулировке теоремы А.

Теорема 1. *Пусть* $\psi_1(\zeta) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l(\zeta - 1)^l$, $\psi_2(\zeta) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} B_l(\zeta - 1)^l$ — *функции, регулярные в окрестности точки* $\zeta = 1$,

$$A_1 B_1 \neq 0; \tag{5}$$

пусть $n \neq m$ — *натуральные числа,* $m \geq 2$, $n \geq 2$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\alpha \neq \frac{n\gamma}{n\gamma - 1}, \ \beta \neq \frac{m\gamma}{m\gamma - 1}. \tag{6}$$

Пусть также

$$\begin{gathered}\sigma_n(j)(m-2j+1)\left[\frac{A_2(\alpha+(1-\alpha)(n-j+1)\gamma)(\alpha+(1-\alpha)j\gamma)}{A_1(\alpha+(1-\alpha)n)}+\right.\\ \left.+\frac{A_1(1-\alpha)(\gamma-1)\gamma(n-j+1)j}{2A_1(\alpha+(1-\alpha)n)}\right]-\\ -\sigma_m(j)(n-2j+1)\left[\frac{B_2(\beta+(1-\beta)(m-j+1)\gamma)(\beta+(1-\beta)j\gamma)}{B_1(\beta+(1-\beta)m)}+\right.\\ \left.+\frac{B_1(1-\beta)(\gamma-1)\gamma(m-j+1)j}{2B_1(\beta+(1-\beta)m)}\right]\neq j(n-m)\end{gathered} \tag{7}$$

для всех натуральных j, $2 \leq j < \min(n, m)$. Тогда, если функция $f_0(z)$ дает локальный экстремум в классе S функционалам (4), то $f_0(z)$ имеет вид (2).

Доказательство. 1) Для функционалов $F = F(c_2, \ldots, c_n)$ и $\Phi = \Phi(c_2, \ldots, c_n)$ обозначим:

$$\bar{\lambda}_k = 2\frac{\partial F}{\partial c_k}, \quad k = 2, \ldots, n;$$

$$\bar{\mu}_l = 2\frac{\partial \Phi}{\partial c_l}, \quad l = 2, \ldots, m.$$

Пусть далее $u \in [2, n]$— наибольший номер, для которого $\lambda_u \neq 0$; аналогично v — наибольший номер, для которого $\mu_v \neq 0$. Известно [1] (см. также [4]), если $w = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots = f_0 \in S$ доставляет локальный экстремум функционалу $F = F(c_2, \ldots, c_n)$, то она удовлетворяет в Δ уравнению

$$\left(\frac{zw'}{w}\right)^2 Q_u(w) + P_u(z) = 0, \tag{8}$$

где

$$Q_u(w) = \sum_{k=2}^{u} \bar{\lambda}_k q_k(w), q_k(w) = \left\{\frac{f_0(z)^2}{f_0(z) - w}\right\}_k,$$

$$P_u(z) = \sum_{k=2}^{u} \left[\bar{\lambda}_k \left(\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)a_{k-j}z^{-j}\right) + (k-1)\bar{\lambda}_k a_k + \right.$$
$$\left. + \lambda_k \left(\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\bar{a}_{k-j}z^{j}\right)\right].$$

Таким же образом, если $w = f_0 \in S$ реализует локальный экстремум функционала $\Phi = \Phi(c_2, \ldots, c_m)$, то она удовлетворяет аналогичному уравнению

$$\left(\frac{zw'}{w}\right)^2 Q_v(w) + P_v(z) = 0. \tag{9}$$

Для функционалов (4) находим:

$$\bar{\lambda}_n = A_1(\alpha + (1-\alpha)n\gamma) \neq 0, \qquad \bar{\mu}_m = B_1(\beta + (1-\beta)m\gamma) \neq 0.$$

λ_n и μ_m не равны нулю, поскольку выполнены условия (5) и (6). Таким образом, $\operatorname{grad} F \neq 0 \neq \operatorname{grad} \Phi$; следовательно, функция $f_0(z) = \sum\limits_{j=2}^{\infty} a_j z^j$ удовлетворяет уравнениям (8) и (9) с $u = n$, $v = m$. Теперь, повторяя рассуждения из [4] (см. также [5]), покажем, что $f_0(z)$ продолжима на расширенную комплексную плоскость ($\bar{\mathbb{C}}$) как алгебраическая функция: разделим (8) на (9), получим

$$\frac{Q_n(w)}{Q_m(w)} = \frac{P_n(z)}{P_m(z)} \Longleftrightarrow w^{m-n} G(w) = z^{m-n} H(z), \tag{10}$$

где $H(z)$ и $G(w)$ — рациональные функции своих аргументов, $G(0) = H(0) = 1$. Из (10) следует, что $w = f_0(z)$ является алгебраической функцией. Таким образом, $f_0(z)$ аналитически продолжима из Δ на $\bar{\mathbb{C}}$ за исключением конечного числа полюсов и точек ветвления. Данное аналитическое продолжение обозначим $w = F$. Оно удовлетворяет уравнениям (8) и (9), следовательно, удовлетворяет и уравнению (10). Если извлечь корень степени $(m - n)$ из обеих частей (10), то получим:

$$\varphi(w) = e^{i\theta} \psi(z), \tag{11}$$

где φ и ψ — аналитические в окрестности нуля функции $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \psi'(0) = 1$, $e^{i\theta(m-n)} = 1$. Из (11) следует, что любая ветвь $F(z)$ в окрестности нуля имеет разложение

$$F(z) = \varphi^{-1}(e^{i\theta}\psi(z)) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, \quad b_1 = e^{i\theta}. \tag{12}$$

Уравнение (11) однозначно разрешимо относительно w, следовательно, различным элементам $F(z)$ соответствуют различные b_1, иначе уравнение (11) при одном и том же θ определяло бы два различных элемента $F(z)$. Для одной из ветвей аналитической функции $F(z)$ коэффициент $b_1 = 1$. Если также в разложении всех других аналитических элементов $F(z)$ в окрестности нуля $b_1 = 1$, то все ветви $F(z)$ совпадают в окрестности нуля. Тогда $F(z)$ будет однозначной во всей области своего определения. Действительно, пусть w(z) — одна из ветвей $F(z)$ в окрестности нуля и пусть продолжение элемента (U, w) вдоль путей γ_1 и γ_2 приводит к различным элементам (U_1, w_1) (U_1, w_2). Если все ветви совпадают в окрестности нуля, то в результате продолжения элемента (U_1, w_2) вдоль пути γ_1^{-1} получим (U, w). Но тогда и (U_1, w_1) и (U_1, w_2) получаются в результате аналитического продолжения вдоль γ_1 элемента (U, w). А это невозможно, поскольку результат аналитического продолжения вдоль пути определяется однозначно. Значит, $F(z)$ однозначна, поэтому $F(z)$ — алгебраическая функция без точек ветвления, т. е. рациональная функция.

Известно (см. [1]), что рациональная функция $f_0 \in S$, удовлетворяющая уравнению (8), принадлежит Q. Следовательно, $f_0(z)$ имеет вид (2) с $d_o = 1$.

Предположим, что для некоторой ветви $F(z)$ в разложении (12) $b_1 \neq 1$, d — наименьшее натуральное число, для которого $b_1^d = 1$. Докажем, что a_j, b_j, λ_{n-j+1}, μ_{m-j+1} могут быть отличны от нуля только при $j = dk+1$ ($k \geq 0$, целое). Доказательство проводим по индукции.

2) База индукции: докажем это утверждение для $j = 2$. Рассмотрим вначале функцию $\alpha\frac{f(z)}{z} + (1-\alpha)f'(z)$, фигурирующую в (4). Акцентируем внимание на слагаемых, содержащих c_{n-1}. Поскольку $f(z) = z + c_2z^2 + \ldots$, то

$$\alpha\frac{f(z)}{z} = \alpha(1 + c_2z + c_3z^2 + \ldots) = \alpha + c_2\alpha z + \ldots + c_n\alpha z^{n-1} + \ldots,$$

$$[f'(z)]^\gamma = 1 + \gamma(2c_2z + \ldots + nc_nz^{n-1} + \ldots) +$$
$$+\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}(2c_2z + \ldots + nc_nz^{n-1} + \ldots)^2 + \ldots$$

Таким образом,

$$\alpha\frac{f(z)}{z} + (1-\alpha)[f'(z)]^\gamma = 1 + (c_2\alpha + 2c_2\gamma(1-\alpha))z + \ldots +$$
$$+(\alpha c_n + (1-\alpha)\gamma nc_n)z^{n-1} +$$
$$+\frac{(1-\alpha)\gamma(\gamma-1)}{2}(2c_2z + \ldots + nc_nz^{n-1} + \ldots)^2 + \ldots$$
$$F(c_2, \ldots, c_n) = Re\{A_0 + A_1[c_2(\alpha + 2\gamma(1-\alpha))z + \ldots$$
$$+(c_n(\alpha + n\gamma(1-\alpha)) + (1-\alpha)\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}2c_2c_{n-1}(n-1))\sigma_n(2)z^{n-1} + \ldots] +$$
$$+A_2[c_2(\alpha + 2\gamma(1-\alpha)z + \ldots + c_{n-1}(\alpha + (n-1)\gamma(1-\alpha)z^{n-2} + \ldots]^2 +$$
$$+\langle\text{слагаемые, не содержащие } c_{n-1}$$
$$\text{в одночленах вида } Az^{n-1},\ \text{A=const}\rangle\}_{n-1} =$$

$$= Re\{A_1\sigma_n(2)(c_n(\alpha+n\gamma(1-\alpha))+(1-\alpha)\gamma(\gamma-1)c_2c_{n-1}(n-1))+$$
$$+A_2\sigma_n(2)c_2(\alpha+2\gamma(1-\alpha))c_{n-1}(\alpha+(n-1)\gamma(1-\alpha))+$$
$$+\langle\text{слагаемые, не содержащие } c_{n-1}\rangle\},$$

поэтому

$$\bar{\lambda}_{n-1}=\sigma_n(2)c_2[A_1(1-\alpha)\gamma(\gamma-1)(n-1)+$$
$$+A_2(\alpha+2\gamma(1-\alpha))(\alpha+(n-1)\gamma(1-\alpha))].$$

Аналогично

$$\bar{\mu}_{m-1}=\sigma_m(2)c_2[B_1(1-\beta)\gamma(\gamma-1)(m-1)+$$
$$+B_2(\beta+2\gamma(1-\beta))(\beta+(n-1)\gamma(1-\beta))].$$

Подставим функцию $f_0(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ в уравнения (8) и (9). Сравнивая коэффициенты при степенях z^{n-1} и z^{n-2} в уравнении (8) в точности так, как это было сделано в [3], получим следующие соотношения:

$$b_1^{1-n}=1, \tag{13}$$

$$(n-3)b_2-a_2b_1((n-1)b_1-2)=\frac{\bar{\lambda}_{n-1}}{\bar{\lambda}_n}b_1(b_1-1). \tag{14}$$

Аналогично из уравнения (9) получим

$$b_1^{1-m}=1, \tag{15}$$

$$(m-3)b_2-a_2b_1((m-1)b_1-2)=\frac{\bar{\mu}_{n-1}}{\bar{\mu}_n}b_1(b_1-1). \tag{16}$$

Из (13) и (15) заключаем, что d — общий делитель для $(n-1)$ и $(m-1)$. Исключая b_2 из (14) и (16), найдем

$$2a_2(n-m)=\frac{\bar{\lambda}_{n-1}}{\bar{\lambda}_n}(m-3)+\frac{\bar{\mu}_{m-1}}{\bar{\mu}_m}(n-3)=$$
$$=a_2\left[\sigma_n(2)(m-3)\left(\frac{A_2(\alpha+2\gamma(1-\alpha))(\alpha+(n-1)\gamma(1-\alpha))}{A_1(\alpha+\gamma(1-\alpha)n)}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{A_1(1-\alpha)\gamma(\gamma-1)(n-1)}{A_1(\alpha+\gamma(1-\alpha)n)}\right)-$$
$$-\sigma_n(2)(n-3)\left(\frac{B_2(\beta+2\gamma(1-\beta))(\beta+(m-1)\gamma(1-\beta))}{B_1(\beta+\gamma(1-\beta)m)}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{B_1(1-\beta)\gamma(\gamma-1)(m-1)}{B_1(\beta+\gamma(1-\beta)m)}\right)\right],$$

что противоречит (7) (с $j = 2$), если $a_2 \neq 0$. Следовательно, $a_2 = 0$, $\lambda_{n-1} = \mu_{m-1} = 0$. Из (14) или (16) получаем $b_2 = 0$. Тем самым утверждение доказано для $j = 2$.

3) Пусть наше утверждение доказано для всех номеров, предшествующих $kd+1+l$; $k \geq 0$, целое; l — натуральное, $0 < l < d$. Покажем:

$$a_{kd+1+l} = b_{kd+1+l} = \lambda_{n-kd-l} = \mu_{m-kd-l} = 0.$$

3.1) Рассмотрим сначала случай, когда $kd + 1 + l < \min(n, m)$. Из индуктивного предположения следует, что при натуральных $j < kd + l$ числа λ_{n-j} могут быть отличны от нуля только при $j = rd$ ($r \geq 0$, целое). Теперь выделим в $F(c_2, \dots, c_n)$ слагаемые, содержащие c_{n-kd-l},

$$F = Re\Big\{A_0 + A_1\Big[(c_2\alpha + 2c_2\gamma(1-\alpha))z + \dots + (\alpha c_n + (1-\alpha)\gamma c_n)z^{n-1} +$$

$$+\frac{(1-\alpha)\gamma(\gamma-1)}{2}(2c_2 + \dots + nc_n z^{n-1} + \dots)^2 +$$

$$+\frac{(1-\gamma)\gamma(\gamma-1)}{3!}(2c_2 z + \dots + nc_n z^{n-1} + \dots)^3 + \dots\Big] +$$

$$+A_2\Big[(c_2\alpha + 2c_2\gamma(1-\alpha))z + \dots + (\alpha c_n + (1-\alpha)\gamma n c_n)z^{n-1} +$$

$$+\frac{(1-\alpha)\gamma(\gamma-1)}{2}(2c_2 z + \dots + nc_n z^{n-1} + \dots)^2 + \dots\Big]^2 + \dots\Big\}_{n-1}.$$

$$F = Re\{A_1[c_n(\alpha + n\gamma(1-\alpha)) + \dots + \tag{17}$$

$$+\frac{(1-\alpha)(\gamma)(\gamma-1)}{2}(c_{kd+l+1}c_{n-kd-l}(kd+l+1)(n-kd-l))\sigma_n(kd+l+1)] +$$

$$+A_2[\sigma_n(kd+1+l)c_{kd+1+l}(\alpha + \gamma(1-\alpha)(kd+1+l))c_{n-kd-l} \times$$

$$\times(\alpha + \gamma(1-\alpha)(n-kd-l))] +$$

$$+\langle \text{слагаемые вида } Bc_{n-kd-l}^{l_0}c_{j_1}^{l_1} \times \dots \times c_{i_p}^{l_p}, \text{ где}$$

$$l_0(n-kd-l-1) + l_1(j_1-1) + \dots + l_p(j_p-1) = n-1\rangle +$$

$$+\langle, \quad \mathrm{c_{n-kd-l}}\rangle\}.$$

В разложении $f_0 = z + a_2 z^2 + \dots$ по индуктивному предположению $a_j \neq 0$ только при $j = dr + 1 < kd + l$, $r \geq 0$, целое. Поэтому в (17) при $f = f_0$ (т. е. $c_j = a_j\ \forall j$) из всех слагаемых вида

$$Ba_{n-kd-l}^{l_0}a_{j_1}^{l_1} \times \dots \times a_{i_p}^{l_p},$$

где
$$l_0(n-kd-l-1)+l_1(j_1-1)+\ldots+l_p(j_p-1)=n-1,$$
неравными нулю могут быть только
$$\sigma_n(kd+l+1)a_{kd+l+1}[A_2(\alpha+\gamma(1-\alpha)(kd+l+1))(\alpha+\gamma(1-\alpha)(n-kd-l))]+$$
$$+\sigma_n(kd+l+1)a_{kd+l+1}[A_1((1-\alpha)\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}(n-kd-l)(kd+l+1))].$$
Следовательно,
$$\bar{\lambda}_{n-kd-l}=\sigma_n(kd+l+1)a_{kd+l+1}[A_2(\alpha+\gamma(1-\alpha)(kd+l+1))\times \tag{18}$$
$$\times(\alpha+\gamma(1-\alpha)(n-kd-l))+A_1((1-\alpha)\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}(n-kd-l)(kd+l+1))].$$
$$\bar{\mu}_{m-kd-l}=\sigma_m(kd+l+1)a_{kd+l+1}[B_2(\beta+\gamma(1-\beta)(kd+l+1))\times \tag{19}$$
$$\times(\beta+\gamma(1-\beta)(m-kd-l))+B_1((1-\beta)\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}(m-kd-l)(kd+l+1))].$$
Далее символом $R_j(\zeta)$ будем обозначать некоторый полином от ζ степени не выше j, $R_j(0)=0$; символ $h_j(\zeta)$ будет обозначать некоторую аналитическую в окрестности нуля функцию, $h_j(\zeta)=O(\zeta^j)$ при $\zeta\to 0$. Имеем:
$$\frac{1}{(F(z))^j}=\frac{1}{(b_1z+b_2z^2+\ldots)^j}=\frac{1}{(b_1z)(1+\frac{b_2}{b_1}z+\frac{b_3}{b_1}z^2)+\ldots}=$$
(но мы предположили, что для номеров $j<kd+l+1$, $b_j\neq 0$ только при $j=dk+1$, где k—целое, следовательно, неравными нулю могут быть только $b_1,b_{d+1},b_{2d+1},\ldots,b_{kd+1}$)
$$=(b_1z)^{-j}\left[1+\frac{b_{k+1}}{b_1}z^d+\ldots+\frac{b_{kd+1}}{b_1}z^{kd}+\frac{b_{kd+l+1}}{b_1}z^{kd+l}+\ldots\right]^{-j}=$$
$$=\frac{1}{(b_1z)^j}\left[1-j\left(\frac{b_{d+1}}{b_1}z^d+\ldots+\frac{b_{kd+1}}{b_1}z^{kd}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{b_{kd+1+l}}{b_1}z^{kd+l}+O(z^{kd+1+l})\right)+\frac{j(j+1)}{2}\left(\frac{b_{d+1}}{b_1}z^d+\ldots+\right.$$

$$+\ \frac{b_{kd+1}}{b_1}z^{kd}+\frac{b_{kd+1+l}}{b_1}z^{kd+l}+O(z^{kd+1+l})\Big)^2+\ldots\Big]=$$

$$=\frac{1}{(b_1z)^j}\left[1+R_k(z^d)-j\frac{b_{kd+l+1}}{b_1}z^{kd+l}+h_{kd+l+1}(z)\right],$$

$$\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^2=\Bigg[\Bigg(1+R_k(z^d)+(kd+l+1)\frac{b_{kd+l+1}}{b_1}z^{kd+l}\ +$$

$$+h_{kd+l+1}(z)\Bigg)\times\left(1+R_k(z^d)+\frac{b_{kd+l+1}}{b_1}z^{kd+l}+h_{kd+l+1}(z)\right)^{-1}\Bigg]^2=$$

$$=\left[1+R_k(z^d)+(kd+l)\frac{b_{kd+l+1}}{b_1}z^{kd+l}+h_{kd+l+1}(z)\right]^2=$$

$$=1+R_k(z^d)+2(kd+l)\frac{b_{kd+l+1}}{b_1}z^{kd+1}+h_{kd+l+1}(z);$$

$$Q_n(w)=\sum_{r=0}^{k}\bar\lambda_{n-rd}q_{n-rd}(w)+\bar\lambda_{n-kd-l}q_{n-kd-l}(w)+\sum_{\nu=2}^{n-kd-l-1}\bar\lambda_\nu q_\nu(w),$$

где $q_{n-rd}(w)=-\sum\limits_{j=1}^{n-rd-1}\{f_0^{j+1}(z)\}_{n-rd}w^{-j}$. Такой вид первой из сумм, составляющих $Q_n(w)$, обусловлен индуктивным предположением. А именно: $\bar\lambda_{n-j+1}\neq 0$ только в случаях $j=dk+1$ (подразумевается, что j меньше, чем $kd+l+1$). Таким образом, неравными нулю могут быть только $\bar\lambda_n,\bar\lambda_{n-d},\bar\lambda_{n-2d},\ldots,\bar\lambda_{n-kd}$. Причем числа

$$\{f_0^{j+1}(z)\}_{n-rd}=\{(1+R_k(z^d)+a_{kd+l+1}z^{kd+l}+h_{kd+l+1}(z))^{j+1}\}_{n-rd-j-1}$$

могут быть отличны от нуля лишь для $j=n-rd-1,\ n-(r+1)d-1,\ldots,n-(r+k)d-1,\ n-(r+k)d-1-l$ и для номеров $j<n-(r+k)d-1-l$. Очевидно, $\{f_0^{n-kd-l}(z)\}_n=a_{kd+l+1}(n-kd-l)$. Следовательно, при целых $r\in[0,k]$

$$q_{n-rd}(w)=D_{r,0}w^{rd-n+1}+D_{r,1}w^{(r+1)d-n+1}+\ldots+$$

$$+D_{r,k}w^{(r+k)d-n+1}+D_{r,k+l}w^{(r+k)d+l-n+1}+\ldots,$$

$$q_{n-kd+l}(w)=-w^{1-n}[w^{kd+l}+h_{kd+l+1}(w)]$$

($D_{r,0},\ D_{r,1},\ldots$ — некоторые числа) и

$$Q_n(w) = -\frac{\bar\lambda_n}{w^{n-1}}\left[1 + R_k(w^d) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\bar\lambda_{n-kd-l}}{\bar\lambda_n} + a_{kd+l+1}(n-kd-l)\right) w^{kd+l} + h_{kd+l+1}(w)\right].$$

Поэтому

$$Q_n(F(z)) = -\frac{\bar\lambda_n}{(b_1 z)^{n-1}} \times$$

$$\times \left[1 + R_k(z^d) - (n-1)\frac{b_{kd+l+1}}{b_1} z^{kd+l} + h_{kd+l+1}(z)\right] \times$$

$$\times \left[1 + R_k(z^d) + (b_1 z)^{kd+l} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\bar\lambda_{n-kd-l}}{\bar\lambda_n} + a_{kd+l+1}(n-kd-l)\right) + h_{kd+l+1}(z)\right] =$$

$$= -\frac{\bar\lambda_n}{z^{n-1}}\left[1 + R_k(z^d) + z^{kd+l}\left(b_1^l\left(\frac{\bar\lambda_{n-kd-l}}{\bar\lambda_n} + a_{kd+l+1}(n-kd-l)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -(n-1)\frac{b_{kd+l+1}}{b_1}\right) + h_{kd+l+1}(z)\right].$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^2 Q_n(F(z)) =$$

$$= \left[1 + R_k(z^d) + 2(kd+l)\frac{b_{kd+l+1}}{b_1} z^{kd+l} + h_{kd+l+1}(z)\right] \times$$

$$\times \left[1 + R_k(z^d) + \left(b_1^l \frac{\bar\lambda_{n-kd-l}}{\bar\lambda_n} + b_1^l a_{kd+l+1}(n-kd-l) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -(n-1)\frac{b_{kd+l+1}}{b_1}\right) z^{kd+l} + h_{kd+l+1}(z)\right]\left(-\frac{\bar\lambda_n}{z^{n-1}}\right) =$$

$$= -\frac{\bar\lambda_n}{z^{n-1}}\left[1 + R_k(z^d) + z^{kd+l}\left(b_1^l \frac{\bar\lambda_{n-kd-l}}{\bar\lambda_n} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + b_1^l a_{kd+l+1}(n-kd-l) + (2(kd+l) - n + 1)\frac{b_{kd+l+1}}{b_1}\right) + h_{kd+l+1}(z)\right].$$

Из индуктивного предположения следует, что

$$P_n(z) = \bar\lambda_n \left(\frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_{d+1}(d+1)}{z^{n-1-d}} + \ldots + \frac{a_{kd+1}(kd+1)}{z^{n-1-kd}} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{kd+l+1}(kd+l+1)}{z^{n-1-kd-l}} + \frac{h_{kd+l+1}(z)}{z^{n-1}}\right) +$$

$$+\bar\lambda_{n-d}\left(\frac{1}{z^{n-1-d}} + \ldots + \frac{a_{kd+l+1}(kd+l+1)}{z^{n-(k+1)d-l-1}} + \frac{h_{kd+d+l}(z)}{z^{n-1}}\right) +$$

$$+ \ldots + \bar\lambda_{n-kd-l}\left(\frac{1}{z^{n-kd-l-1}} + \frac{h_{kd+l+1}(z)}{z^{n-1}}\right) + \frac{h_{kd+l+1}(z)}{z^{n-1}} =$$

$$= z^{1-n}\left[\bar\lambda_n + R_k(z^d) + z^{kd+l}(\bar\lambda_n a_{kd+l+1}(kd+l+1) + \bar\lambda_{n-kd-l}) + \right.$$

$$\left. + h_{kd+l+1}(z)\right].$$

Сравнивая коэффициенты в (8) при $z^{kd+l+1-n}$, получаем:

$$-\bar\lambda_n\left(b_1^l\frac{\bar\lambda_{n-kd-l}}{\bar\lambda_n} + b_1^l(n-kd-l)a_{kd+l+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{b_{kd+l+1}}{b_1}(2(kd+l)-n+1)\right) +$$

$$+\bar\lambda_n\left(a_{kd+l+1}(kd+l+1) + \frac{\bar\lambda_{n-kd-l}}{\bar\lambda_n}\right) = 0,$$

то есть

$$b_{kd+l+1}(n-1-2(kd+l)) - a_{kd+l+1}b_1(b_1^l(n-kd-l)-(kd+l+1)) =$$

$$= \frac{\bar\lambda_{n-kd-l}}{\bar\lambda_n}b_1(b_1^l-1), \tag{20}$$

здесь $\bar\lambda_{n-kd-l}$ имеет вид (18).

Аналогичное рассуждение для функционала Φ приводит к условию

$$b_{kd+l+1}(m-1-2(kd+l)) - a_{kd+l+1}b_1(b_1^l(m-kd-l)-(kd+l+1)) =$$

$$= \frac{\bar\mu_{m-kd-l}}{\bar\mu_m}b_1(b_1^l-1). \tag{21}$$

Умножая равенство (20) на $(m-1-2(kd+l))$ и вычитая из полученного равенство (21), умноженное на $(n-1-2(kd+l))$, легко приходим к равенству

$$a_{kd+l+1}[(b_1^l(m-kd-l)-(kd+l+1))(n-1-2(kd+l))-$$

$$-(b_1^l(n-kd-l)-(kd+l+1))(m-1-2(kd+l))]=$$

$$=(b_1^l-1)\left(\frac{\bar{\lambda}_{n-kd-l}}{\bar{\lambda}_n}(m-1-2(kd+l))-\frac{\bar{\mu}_{m-kd-l}}{\bar{\mu}_m}(n-1-2(kd+l))\right).$$

Левая часть этого равенства может быть преобразована в следующее выражение

$$a_{kd+l+1}(b_1^l-1)(1+kd+l)(n-m).$$

Поэтому последнее равенство примет вид

$$a_{kd+l+1}(b_1^l-1)(kd+l+1)(n-m)= \tag{22}$$

$$=(b_1^l-1)\left(\frac{\bar{\lambda}_{n-kd-l}}{\bar{\lambda}_n}(m-1-2(kd+l))-\frac{\bar{\mu}_{m-kd-l}}{\bar{\mu}_m}(n-1-2(kd+l))\right).$$

Покажем, что $a_{kd+l+1}=0$ методом от противного. Пусть $a_{kd+l+1}\neq 0$. Поскольку $b_1^l\neq 1$, то из (22), (18) и (19) вытекает, что

$$\sigma_n(kd+l+1)(m-1-2(kd+l))\times$$

$$\times\left[\frac{A_2(\alpha+(1-\alpha)(n-kd-l)\gamma)(\alpha+(1-\alpha)(kd+l+1)\gamma)}{A_1(\alpha+(1-\alpha)n)}+\right.$$

$$\left.+\frac{A_1(1-\alpha)(\gamma-1)\gamma(n-kd-l)}{A_1(\alpha+(1-\alpha)n)}\right]-$$

$$-\sigma_m(kd+l+1)(n-1-2(kd+l))\times$$

$$\times\left[\frac{B_2(\beta+(1-\beta)(m-kd-l)\gamma)(\beta+(1-\beta)(kd+l+1)\gamma)}{B_1(\beta+(1-\beta)m)}+\right.$$

$$\left.+\frac{B_1(1-\beta)(\gamma-1)\gamma(n-kd-l)}{B_1(\beta+(1-\beta)m)}\right]=(kd+l+1)(n-m),$$

это противоречит (7) при $j=kd+l+1$. Следовательно, неверно предположение о том, что $a_{kd+l+1}\neq 0$ и

$$a_{kd+l+1}=0=\lambda_{n-kd-l}=\mu_{m-kd-l}.$$

Из (20) получим также, что $b_{kd+l+1} = 0$.

Можно считать, что $\min(n, m) = n$. Методом индукции мы доказали утверждаемое для натуральных $j \in [2, n)$. Отсюда следует, что $Q_n(w)$ и $P_n(z)$ содержат только степени своих аргументов, кратные d.

3.2) Пусть теперь $kd + l + 1 > \min(n, m) = n$ ($kd + l + 1 \neq n, m$, так как $l \neq 0$). В этом случае, следуя [3], обозначим $n_0 - 1 = \dfrac{n-1}{d}$. Тогда $k \geq n_0 - 1$ и

$$Q_n(w) = -\frac{\bar{\lambda}_n}{w^{n-1}}[1 + R_{n_0-2}(w^d)];$$

$$Q_n(F(z)) = -\frac{\bar{\lambda}_n}{(b_1 z)^{n-1}}\left[1 + R_k(z^d) - (n-1)\frac{b_{kd+l+1}}{b_1}z^{kd+l} + \right.$$

$$\left. + h_{kd+l+1}(z)\right][1 + R_k(z^d) + h_{(k+1)d}(z)] =$$

$$= -\frac{\bar{\lambda}_n}{z^{n-1}}\left[1 + R_k(z^d) - (n-1)\frac{b_{kd+l+1}}{b_1}z^{kd+l} + h_{kd+l+1}(z)\right];$$

$$\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right)^2 Q_n(F(z)) =$$
$$= -\frac{\bar{\lambda}_n}{z^{n-1}}\left[1 + R_k(z^d) + \frac{b_{kd+l+1}}{b_1}(2kd + 2l - n + 1)z^{kd+l} + h_{kd+l+1}(z)\right].$$

С другой стороны, $P_n(z)$ не содержит $z^{kd+l+1-n}$, поскольку в (8) $a_s = 0$, кроме $s \neq kd + 1$, $k \in [0, n_0 - 1)$. Поэтому сравнение в (8) коэффициентов при $z^{kd+l+1-n}$ дает $b_{kd+l+1} = 0$ (поскольку $kd+l+1 > n$) для любой ветви $F(z)$. В частности, $a_{kd+l+1} = 0$. Отсюда и из (19) следует доказываемое утверждение относительно μ_j ($2 \leq j \leq m$). Тем самым полностью доказано утверждение о равенстве нулю чисел a_j, b_j, λ_{n-j+1}, μ_{m-j+1}.

Таким образом,

$$f_0(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kd+1} z^{kd+1}, \tag{23}$$

причем $P_n(z)$, $P_m(z)$, $Q_n(w)$ и $Q_m(w)$ содержат только степени своих аргументов, кратные d.

Обозначим d_ν $(1 \le \nu \le s)$ натуральные числа, обладающие следующим свойством: для любого такого d_ν существует ветвь $F(z) = b_1 z + \ldots$ такая, что $b_1^{d_\nu} = 1$, $b_1^l \ne 1$ для всех целых $l \in [1, d_\nu)$. Введенное ранее число d — одно из этих чисел d_ν. Обозначим d_0 — наименьшее натуральное число, кратное $d_1, \ldots, d_s$. Так как (23) справедливо для каждого из чисел $d_1, \ldots, d_s$, то

$$f_0(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kd_0+1} z^{kd_0+1},$$

а $P_n(z)$, $P_m(z)$, $Q_n(w)$ и $Q_m(w)$ содержат только степени своих аргументов, кратные d_0, причем для любой ветви $F(z) = b_1 z + \ldots$ имеем: $b_1^{d_0} = 1$, то есть в окрестности нуля получим разложение

$$w^{d_0} = F^{d_0}(z) = z^{d_0} + \sum_{j=2}^{\infty} c_j z^{d_o j}. \qquad (24)$$

Это дает возможность сделать в (8) и (9) замену $w_1 = w^{d_0}$, $z_1 = z^{d_0}$. Обозначим $m_1 - 1 = \dfrac{m-1}{d_0}$, $n_1 - 1 = \dfrac{n-1}{d_0}$, m_1 и n_1 — натуральные числа. Обозначим также $f_1(z_1) = f_1(z^{d_0}) = f^{d_0}(z)$, $\tilde{P}_{n_1}(z_1) = \tilde{P}_{n_1}(z^{d_0}) = P_n(z)$, $\tilde{Q}_{n_1}(w_1) = \tilde{Q}_{n_1}(w^{d_0}) = Q_n(w)$, $\tilde{P}_{m_1}(z_1) = P_m(z)$, $\tilde{Q}_{m_1}(w_1) = Q_m(w)$. Из определения f_1 ясно, что $f_1(z_1) \in S$ (см., например, [6]). Поскольку $\dfrac{z dw}{w dz} = \dfrac{z_1 dw_1}{w_1 dz_1}$, то в новых обозначениях уравнения (8) и (9) примут вид

$$\left(\frac{z_1}{w_1}\frac{dw_1}{dz_1}\right)^2 \tilde{Q}_{n_1}(w_1) + \tilde{P}_{n_1}(z_1) = 0 \qquad (25)$$

и

$$\left(\frac{z_1}{w_1}\frac{dw_1}{dz_1}\right)^2 \tilde{Q}_{m_1}(w_1) + \tilde{P}_{m_1}(z_1) = 0, \qquad (26)$$

а (10) запишется в виде

$$w_1^{m_1-n_1} G_1(w_1) = z_1^{m_1-n_1} H_1(z_1), \qquad (27)$$

где $G_1(w_1)$ и $H_1(z_1)$ — рациональные функции своих аргументов, $G_1(0) = H_1(0) = 1$. Так как функция $f(z)$ удовлетворяет уравнениям (8) и (9), то $f_1(z_1)$ удовлетворяет уравнениям (25) и (26). Из (27) следует, что $w_1 = w_1(z_1)$ — алгебраическая функция. Как и раньше, получаем, что любая ветвь функции $w_1(z_1)$ в окрестности нуля имеет разложение $w_1(z_1) = B_1 z_1 + \ldots$. Из (24) следует, что здесь $B_1 = 1$ для любой ветви $w_1(z_1)$. Отсюда, как и при аналогичных рассуждениях в пункте 1), вытекает, что $w_1(z_1)$ (а следовательно, и $f_1(z_1)$) — рациональная функция и $f_1(z_1) \in Q$. Следовательно, $f_0(z)$ имеет вид (2). $\square$

Замечание. Если функционалы (4) заменить на

$$F = F(c_2, \ldots, c_n) = Re\left[\{\psi_1\left(\alpha \exp f(z) + (1-\alpha)[f'(z)]^\gamma\right)\}_{n-1}\right]$$

и

$$\Phi = \Phi(c_2, \ldots, c_m) = Re\left[\{\psi_2\left(\beta \exp f(z) + (1-\beta)[f'(z)]^\gamma\right)\}_{m-1}\right],$$

а условие (7) заменить на аналогичное, то теорема останется верна.

Résumé

In this paper we consider given form functionals. We investigate the form of function that realises local extremum to two such functionals.

Список литературы

[1] Schaeffer A. C. *Coefficients region for schlicht functions.* / A. C. Schaeffer. New York, 1950.

[2] Старков В. В. *Об однолистных функциях, локально максимизирующих модули двух коэффициентов* / В. В. Старков // ДАН СССР. 1986. Т. 289. N4. С. 804-805.

[3] Starkov V. V. *Univalent functions that are local extrema of two real functionals* / V. V. Starkov //Studia Mathematica Bulgaria PLISKA. 1989. V. 10. P. 16–26.

[4] Бабенко К. И. *К теории экстремальных задач для однолистных функций класса S* / К. И. Бабаенко //Труды МИАН СССР. 1972. Т. CI.

[5] Duren P. L. *Univalent functions.* / P. L. Duren. New York: Springer-Verlag, 1983.

[6] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* / Г. М. Голузин. М.: Наука, 1966.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: agush@petrsu.ru