Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 13, 2006

УДК 515.12

Е. В. Кашуба

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА КАТЕТОВА ДЛЯ ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРОВ

В статье доказаны обобщение теоремы Катетова о кубе для полунормальных функторов и свойства наследственной $\mathcal{K}$-нормальности.

Классическая теорема Катетова утверждает, что если куб компакта X наследственно нормален, то пространство X метризуемо. Так как операция возведения в куб является нормальным функтором[1] степени три, возник естественный вопрос, будет ли компакт X метризуем, если для нормального функтора $\mathcal{F}$ степени не меньше трех компакт $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормален. На этот вопрос В. В. Федорчуком [1] был получен положительный ответ. А. П. Комбаров [2] заменил в теореме Федорчука наследственную нормальность компакта $\mathcal{F}(X)$ на наследственную $\mathcal{K}$-нормальность.

Распространение теоремы на случай полунормальных функторов приводит к необходимости рассмотрения степенного спектра функтора $\mathcal{F}$-множества степеней точек пространства $\mathcal{F}(X)$. Для нормального функтора степенной спектр представляет собой натуральный ряд или отрезок натурального ряда, начиная с 1. В теореме Федорчука требование наследственной нормальности пространства $\mathcal{F}(X)$ можно ослабить до наследственной нормальности пространства $\mathcal{F}_3(X) \setminus X$. Для случая полунормального функтора суперрасширения λ имеется следующий результат Т. Ф. Жураева [4]: если пространство $\lambda_4(X) \setminus X$ наследственно нормально, то компакт X метризуем. Здесь произошла замена индекса 3 на индекс 4, поскольку 4 является третьим по счету элементом степенного спектра функтора суперрасширения λ.

---

[1]Необходимые определения можно найти в [5].

В работе А. В. Иванова [3] доказано, что если $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, удовлетворяющий некоторому комбинаторному условию (*), и спектр $sp(\mathcal{F}) = \{1, m, n, \ldots\}$, то наследственная нормальность пространства $\mathcal{F}_n(X) \setminus X$ влечет метризуемость X.

В настоящей работе получен следующий результат: если $sp(\mathcal{F}) = \{1, m, n, \ldots\}$ — спектр полунормального функтора $\mathcal{F}$, этот функтор удовлетворяет комбинаторному условию (*), и пространство $\mathcal{F}_n(X) \setminus X$ наследственно $\mathcal{K}$-нормально, то компакт X метризуем. Доказательство опирается на идеи и методы, используемые в статьях [2] и [3].

Будем рассматривать ковариантные функторы, действующие из категории Comp компактов и их непрерывных отображений в ту же категорию.

Функтор $\mathcal{F}$ называется *мономорфным*, если для любого вложения $i : Y \to X$ отображение $\mathcal{F}(i) : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ тоже является вложением. Для мономорфного функтора $\mathcal{F}$ и замкнутого в пространстве X подмножества Y пространство $\mathcal{F}(Y)$ естественно отождествляется с подпространством $\mathcal{F}(i)(\mathcal{F}(Y))$ пространства $\mathcal{F}(X)$.

Мономорфный функтор *сохраняет пересечения*, если для любого семейства $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств пространства X выполнено соотношение

$$\mathcal{F}(\cap\{Y_\alpha : \alpha \in A\}) = \cap\{\mathcal{F}(Y_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Для мономорфного сохраняющего пересечения функтора $\mathcal{F}$ определен носитель $\mathrm{supp}(a)$ произвольной точки множества $\mathcal{F}(X)$ по следующему правилу:

$$\mathrm{supp}(a) = \cap\{Y \subset X : Y\text{- замкнуто, } a \in \mathcal{F}(Y)\}.$$

Обозначение $\mathcal{F}_n(X)$ используется для множества

$$\{a \in \mathcal{F}(X) : |\mathrm{supp}(a)| \leq n\}.$$

Если $\mathcal{F}$ — мономорфный, сохраняющий пересечения функтор, то подпространство $\mathcal{F}_n(X)$ замкнуто в пространстве $\mathcal{F}(X)$ для любого компакта X и любого натурального числа n. Кроме того, соответствие $X \to \mathcal{F}_n(X)$ однозначно определяет подфунктор функтора $\mathcal{F}$.

Функтор $\mathcal{F}$ называется *непрерывным*, если он перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра.

Мономорфный непрерывный сохраняющий пересечения функтор называется *полунормальным*, если он сохраняет точку и пустое множество. В случае, если $\mathcal{F}$ является полунормальным функтором, его подфунктор $\mathcal{F}_n$ также полунормален для любого натурального числа n. Пространство $\mathcal{F}_1(X)$ гомеоморфно пространству X, и можно считать, что компакт X является подпространством пространства $\mathcal{F}(X)$.

Функтор $\mathcal{F}$ *сохраняет прообразы*, если для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ и любого замкнутого подмножества $A \subset Y$

$$\mathcal{F}(f^{-1}(A)) = (\mathcal{F}(f))^{-1}(\mathcal{F}(A)).$$

Функтор $\mathcal{F}$ называется *эпиморфным*, если он сохраняет эпиморфизмы. Функтор $\mathcal{F}$ *сохраняет вес*, если для любого бесконечного компакта X $w(X) = w(\mathcal{F}(X))$. Полунормальный функтор является *нормальным*, если он эпиморфен и сохраняет вес и прообразы.

Обозначим через π_n отображение

$$\pi_n : X^n \times \mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}(X),$$

определяемое равенством $\pi_n(x, \xi) = \mathcal{F}(x)(\xi)$. Здесь каждая точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства X^n отождествляется с отображением $x : n \to \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$, где символ n используется также для обозначения n-элементного дискретного множества. Для любого непрерывного функтора $\mathcal{F}$ и любого компакта X отображение π_n непрерывно. Для полунормального функтора $\mathcal{F}$ справедливо равенство $Im\, \pi_n = \mathcal{F}_n(X)$.

При $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_{n-1}(X)$ через $\mathcal{F}_{nn}(X)$. *Степенной спектр* функтора $\mathcal{F}$ определяется следующим образом:

$$sp(\mathcal{F}) = \{k : k \in \mathbb{N}, \mathcal{F}_{kk}(k) \neq \emptyset\}.$$

Степенной спектр любого полунормального функтора содержит 1.

Пусть $\mathcal{F}$ является полунормальным функтором и спектр $sp(\mathcal{F}) = \{1, m, n, \ldots\}$, причем элементы спектра расположены в порядке возрастания. Отображение $\varphi_{nm} : n \to m$ определяется по следующему правилу: $\varphi_{nm}(i) = i$ при $i < m$ и $\varphi(i) = m - 1$ при $i \geq m$. Будем говорить, что функтор $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию (*), если

$$\mathcal{F}(\varphi_{nm})(\mathcal{F}_{nn}(n)) \cap \mathcal{F}_{mm}(m) \neq \emptyset.$$

Пусть пространство X является компактом и $\Delta_n = \{(x_1, ..., x_n) : \exists i \exists j (i \neq j, x_i = x_j)\}$ — обобщенная диагональ пространства X^n. В работе [3] доказана следующая

Лемма 1. *Если обобщенная диагональ Δ_n является G_δ-множеством в пространстве X^n, то пространство X метризуемо.*

Пусть $\mathcal{K}$ — класс пространств, представимых в виде объединения счетного числа компактных подпространств. Хаусдорфово пространство X называется *$\mathcal{K}$-нормальным*, если в нем любые два непересекающиеся замкнутые подмножества, одно из которых принадлежит классу $\mathcal{K}$, содержатся в непересекающихся окрестностях.

Пространство X называется *наследственно $\mathcal{K}$-нормальным*, если всякое его подпространство $\mathcal{K}$-нормально.

Множество F называется *регулярным G_δ-множеством*, если F является пересечением не более чем счетного числа замкнутых множеств, внутренность каждого из которых содержит F.

В дальнейших выкладках сыграет определенную роль доказанная в [2]

Лемма 2. *Пусть X — счетно компактное бесконечное пространство и произведение $X \times Y$ наследственно $\mathcal{K}$-нормально. Тогда всякий компакт в пространстве Y является регулярным G_δ-множеством.*

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, спектр $sp(\mathcal{F}) = \{1, m, n, \ldots\}$ и функтор $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию (*). Если для компакта X пространство $\mathcal{F}_n(X) \setminus X$ наследственно $\mathcal{K}$-нормально, то компакт X метризуем.*

Доказательство. Рассмотрим возможные альтернативы для пространства X:

1) в компакте X имеются, по крайней мере, две неизолированные точки;
2) компакт X имеет единственную неизолированную точку.

Случай 1. Выберем точку $\delta \in \mathcal{F}_{nn}(n)$ так, чтобы

$$\mathcal{F}(\varphi_{nm})(\delta) \in \mathcal{F}_{mm}(m).$$

Заметим, точка δ существует в силу условия (*). Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — набор различных точек из пространства X, в котором x_1 не является изолированной точкой, и пусть U и V — окрестности точек x_1 и x_m

соответственно, причем такие, что $x_2, \ldots, x_{m-1} \notin [U] \cup [V]$ и $[U] \cap [V] = \emptyset$. Рассмотрим в пространстве X^n множество

$$T = [U] \times \{x_2\} \times \{x_3\} \times \ldots \times \{x_{m-1}\} \times [V]^{n-m+1}$$

и положим

$$f = \pi_n|_{T \times \{\delta\}} : T \times \{\delta\} = T \to \mathcal{F}_n(X).$$

Через R обозначим разбиение, которое порождает на множестве T отображение f, а именно

$$R = \{f^{-1}(\xi) : \xi \in \mathcal{F}_n(X)\}.$$

Покажем, что каждый элемент разбиения R лежит в некотором слое $T_z = \{z\} \times \{x_2\} \times \ldots \times \{x_{m-1}\} \times [V]^{n-m+1}$ произведения T, $z \in [U]$, и на всех слоях разбиение R одинаково.

Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n) \in T$. Покажем, что

$$\{y_1, \ldots, y_{m-1}\} \subset \mathrm{supp}(f(y)) \subset \{y_1, \ldots, y_n\}. \tag{1}$$

По определению отображения f имеем $f(y) = \mathcal{F}(y)(\delta)$. Если отображение y — взаимно однозначное (то есть все координаты точки y различны), то $\mathrm{supp}(f(y)) = \{y_1, \ldots, y_n\}$, так как $\mathrm{supp}(\delta) = n$. Если же среди координат точки y имеются совпадающиеся, то рассмотрим отображение $q : \{y_1, \ldots, y_n\} \to \{y_1, \ldots, y_m\}$, определяемое следующим образом: $q(y_i) = y_i$ при $i \leq m$, $q(y_i) = y_m$ при $i > m$. Очевидно, что композиция $q \circ y$ гомеоморфна отображению φ_{nm}. Следовательно,

$$|\mathrm{supp}(\mathcal{F}(q \circ y)(\delta))| = |\mathrm{supp}(\mathcal{F}(\varphi_{nm})(\delta))| = m.$$

Значит, $\mathrm{supp}(\mathcal{F}(q \circ y)(\delta)) = \{y_1, \ldots, y_m\}$, откуда следует, что

$$\mathrm{supp}(\mathcal{F}(y)(\delta)) \supset \{y_1, \ldots, y_{m-1}\}.$$

Включение (1) доказано.

Пусть $y^1 = (y_1^1, \ldots, y_n^1)$, $y^2 = (y_1^2, \ldots, y_n^2)$ — две точки из различных слоев $T_{y_1^1}$ и $T_{y_1^2}$ разбиения T, то есть $y_1^1 \neq y_1^2$. Тогда в силу включения (1) $f(y_1^1) \neq f(y_1^2)$. Таким образом, элементы разбиения R не могут пересекать два различных слоя одновременно.

Покажем теперь, что если $f(y_1, y_2^1, \ldots, y_n^1) = f(y_1, y_2^2, \ldots, y_n^2)$, где $y_1 \in [U]$, то равенство $f(y_1', y_2^1, \ldots, y_n^1) = f(y_1', y_2^2, \ldots, y_n^2)$ имеет место для любого элемента $y_1' \in [U]$. Введем обозначения:

$$\begin{array}{ll} a^k = (y_1, y_2^k, \ldots, y_n^k), & b^k = (y_1', y_2^k, \ldots, y_n^k), \\ A^k = \{y_1, y_2^k, \ldots, y_n^k\}, & B^k = \{y_1', y_2^k, \ldots, y_n^k\}, \end{array}$$

где $k = 1; 2$. Пусть отображения $q_k : A^k \to B^k$ определяются по формулам: $q_k(y_1) = y_1'$, $q_k(y_i^k) = y_i^k$, $i = 2, \ldots, n$, $k = 1; 2$. Тогда $b_k = q_k \circ a^k$, $k = 1; 2$ и $q_1|_{A_1 \cap A_2} = q_2|_{A1 \cap A2}$. Имеем

$$\mathcal{F}(a^1)(\delta) = \mathcal{F}(a^2)(\delta) \in \mathcal{F}(A_1) \cap \mathcal{F}(A_2) = \mathcal{F}(A_1 \cap A_2).$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}(b^1)(\delta) = \mathcal{F}(q_1|_{A_1 \cap A_2})(\mathcal{F}(a^1)(\delta)) = \mathcal{F}(q_2|_{A_1 \cap A_2})(\mathcal{F}(a^2)(\delta)) = \mathcal{F}(b^2)(\delta),$$

что и требовалось доказать.

Итак, разбиение R порождает на всех слоях T_z произведения T одинаковые разбиения R'. Слои T_z гомеоморфны пространству $[V]^{n-m+1}$, следовательно, фактор-пространство $T/R = f(T) \subset \mathcal{F}_n(X)$ гомеоморфно произведению $\Pi = [U] \times ([V]^{n-m+1}/R')$. В силу включения (1) $\Pi = f(T) \subset \mathcal{F}_n(X) \setminus X$, следовательно, произведение Π наследственно $\mathcal{K}$-нормально. Поскольку множество $[U]$ по построению бесконечно, то по лемме 2 наследственная $\mathcal{K}$-нормальность произведения Π влечет, что любой компакт в пространстве $[V]^{n-m+1}/R'$ является регулярным G_δ-множеством.

Возьмем теперь произвольный слой T_z, гомеоморфный $[V]^{n-m+1}$, и рассмотрим отображение

$$g = f|_{T_z} : [V]^{n-m+1} \to [V]^{n-m+1}/R' \subset \mathcal{F}_n(X).$$

Пусть Δ_{n-m+1} — обобщенная диагональ пространства $[V]^{n-m+1}$. Тогда выполнено соотношение $g^{-1}(g(\Delta_{n-m+1})) = \Delta_{n-m+1}$, поскольку при $x \in \Delta_{n-m+1}$ $|\mathrm{supp}(g(x))| = m$, а при $x \notin \Delta_{n-m+1}$ $|\mathrm{supp}(g(x))| = n$, что следует из доказательства включения (1). Следовательно, обобщенная диагональ Δ_{n-m+1} является G_δ-множеством в пространстве $[V]^{n-m+1}$. Значит, по лемме 1 пространство $[V]$ метризуемо.

Итак, показано, что любая точка $x = x_m \in X$ имеет метризуемую окрестность. Следовательно, компакт X метризуем.

Отметим, что при доказательстве был существенно использован тот факт, что в X имеется отличная от x_m неизолированная точка x_1.

Таким образом, остается рассмотреть случай 2), когда компакт X имеет единственную неизолированную точку. Предположим, что пространство X неметризуемо. Тогда оно является александровской компактификацией несчетного дискретного пространства: $X = A \cup \{t\}$. Разложим множество A на три непересекающихся подмножества: $A =$

$B \cup C \cup D$, где B — счетно, C и D — несчетны. Рассмотрим в пространстве $X^n \setminus \Delta_n$ подмножества

$$F_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in B, x_2 = t, x_3 = x_3^0, \ldots, x_n = x_n^0\},$$
$$F_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = t, x_2 \in C, x_3 = x_3^0, \ldots, x_n = x_n^0\},$$

где $x_3^0, \ldots, x_n^0$ — фиксированные несовпадающие точки из множества D. Множества F_1 и F_2 замкнуты в пространстве $X^n \setminus \Delta_n$ и не пересекаются, кроме того $F_1 \in \mathcal{K}$.

Покажем, что множества F_1 и F_2 не имеют в пространстве $X^n \setminus \Delta_n$ непересекающихся окрестностей. Для произвольной фиксированной окрестности OF_1 множества F_1 и для произвольной точки $x = (x_1, t, x_3^0, \ldots, x_n^0) \in F_1 \subset OF_1$ существует окрестность Ox точки x вида $Ox = \{x_1\} \times Ot^x \times \{x_3^0\} \times \ldots \{x_n^0\} \subset OF_1$, где $Ot^x = X \setminus E_x$ — окрестность точки t в пространстве X, E_x — конечное множество элементов из пространства A. Положим $E = \bigcup_{x \in B} E_x$. Множество E не более чем счетное, значит, $C \setminus E \neq \emptyset$. Пусть $y_2' \in C \setminus E$. Тогда $y' = (t, y_2', x_3^0, \ldots, x_n^0) \in F_2$. Для любой окрестности OF_2 множества F_2 существует окрестность Oy' точки y' вида $Ot^{y'} \times \{y_2'\} \times \{x_3^0\} \times \ldots \times \{x_n^0\} \subset OF_2$, где $Ot_{y'} = X \setminus E_{y'}$ — окрестность точки t в пространстве X, $E_{y'}$ — конечное множество элементов из пространства A. Пусть $x_1' \in B \setminus E_{y'}$. Тогда точка $x' = (x_1', t, x_3^0, \ldots, x_n^0) \in F_1$ и содержится в окрестности OF_1 множества F_1. Окрестность Ox' точки x' содержится в окрестности OF_1 множества F_1. Получаем, что $OF_1 \cap OF_2 \supset Ox' \cap Oy' \neq \emptyset$ для произвольных окрестностей OF_1 и OF_2 множеств F_1 и F_2 соответственно.

Положим

$$h = \pi_n|_{X^n \times \{\delta\}} : X^n \times \{\delta\} \to \mathcal{F}_n(X).$$

Тогда $h^{-1}(h(\Delta_n)) = \Delta_n$. Отображение $h|_{X_n \setminus \Delta_n}$ замкнуто и $h(F_1) \cap h(F_2) = \emptyset$. Поскольку $h(X^n \setminus \Delta_n) \subset \mathcal{F}_n(X) \setminus X$ и $\mathcal{F}_n(X)$ — наследственно $\mathcal{K}$-нормально, а $h(F_1) \in \mathcal{K}$, то множества $h(F_1)$ и $h(F_2)$ имеют в $h(X^n \setminus \Delta_n)$ непересекающиеся окрестности, прообразы которых будут непересекающимися окрестностями множеств F_1 и F_2 в пространстве X^n. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Résumé

A generalization of the Katetov Theorem for seminormal functors and the property of hereditarily K-normality is proved.

Список литературы

[1] Федорчук В. В. *К теореме Катетова о кубе* / В. В. Федорчук // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 1989. № 4. С. 93–96.

[2] Комбаров А. П. *К теореме Катетова—Федорчука о кубе* / А. П. Комбаров // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 2004. № 5. С. 59–61.

[3] Иванов А. В. *Теорема Катетова о кубе и полунормальные функторы* / А. В. Иванов // http://topology.karelia.ru/arh.html

[4] Жураев Т. Ф. *Функтор λ и метризуемость бикомпактов* / Т. Ф. Жураев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 1999. № 4. С. 54–56.

[5] Федорчук В. В. *Общая топология. Основные конструкции* / В. В. Федорчук, В. В. Филиппов. М.: Изд-во МГУ, 1988.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33