Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 13, 2006

УДК 517.54

В. В. Старков

ОБ ОБЛАСТЯХ, КОНФОРМНО ИЗОМОРФНЫХ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ

Доказано, что расширенная комплексная плоскость с разрезами по вещественной оси конформно изоморфна круговой области, симметричной относительно этой оси.

В начале 2005 г. проф. В.И. Данченко попросил меня доказать следующее утверждение: расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с n ($n \in \mathbb{N}$) невырожденными разрезами на прямой конформно изоморфна области вида $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_j = E$, где K_j — замкнутые попарно дизъюнктные круги с центрами на вещественной оси; такие ограниченные окружностями области E называются *круговыми*. Этот факт был нужен В.И. Данченко в его задачах теории приближений. Доказательство я выслал и вот дошла очередь до публикации. Итак,

Теорема 1. *Область*

$$D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} [a_j, b_j], \quad -\infty < a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n < \infty,$$

можно конформно и однолистно отобразить на круговую n-связную область $E = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_j$ ($K_j \bigcap K_m = \emptyset$ при $j \neq m$), K_j — замкнутые круги с центрами на вещественной оси.

Идея доказательства этого факта не нова, подобным образом Кебе и Голузин доказывали, например, следующую теорему Кебе—Голузина—Келдыша [1, гл. 5, §6, теорема 2]:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00962)

Теорема А. *Всякую n-связную область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $D \ni \infty$, можно однолистно и конформно отобразить на круговую область $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, $E \ni \infty$. Среди этих отображений существует только одно вида*

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{-k}}{z^k}. \tag{1}$$

Специфика доказываемой в этой статье теоремы, таким образом, заключается в том, что для рассматриваемой области D все центры кругов K_j — связных дополнений области E — лежат на $\mathbb{R}$, при этом будет показано, что отображающая функция имеет вид (1) (как и в теореме А, такая функция вида (1) будет единственной).

Доказательство теоремы 1. Обозначим $\{D_X^*\}$ множество всех конечносвязных круговых областей $D_X^* \equiv \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_j$, содержащих ∞ и таких, что центры замкнутых кругов K_j лежат на вещественной оси; здесь

$$X = (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \ -\infty < a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n < \infty, \tag{2}$$

где a_j, b_j — точки пересечения окружности ∂K_j с $\mathbb{R}$. Обозначим $D_X = D_X^* \bigcap P$, $\quad P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Рассмотрим множество всех конформных однолистных отображений $f : D_X \longrightarrow P$ таких, что $f(\infty) = \infty$. Для каждой области D_X существует несчетное множество таких отображений f. Эти функции f продолжимы до гомеоморфизма $\bar{D}_X$ на $\bar{P}$ (см. [1, с. 46]), и потому функция f продолжима аналитически в D_X^* (из принципа симметрии следует, что не имеет значения, через какой промежуток вещественной оси осуществляется продолжение — оно единственно). Продолженные аналитически такие отображения (их тоже обозначим f) переводят области D_X^* на области $E_Y^* = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$, где

$$Y = (f(a_1), f(b_1), \ldots, f(a_n), f(b_n)) = (c_1, d_1, \ldots, c_n, d_n), \tag{3}$$

$$-\infty < c_1 < d_1 < \ldots < c_n < d_n < \infty.$$

Причем в окрестности $z = \infty \in D_X^*$ функция f имеет разложение

$$f(z) = B_1 z + B_0 + B_{-1} z^{-1} + \ldots, \quad B_1 > 0, B_0 \in \mathbb{R}$$

(последнее следует из условия $f(\partial D_X) = \overline{\mathbb{R}}$ и из сохранения ориентации при отображении f). В дальнейшем из всех таких отображений f фиксированной области D_X^* будем рассматривать только то, которое имеет вид (1); единственность такого отображения вида (1) для данной области D_X^* вытекает из структуры конформных автоморфизмов полуплоскости P :

$$\frac{az+b}{cz+d}: \quad ad-bc>0, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},$$

и из самого разложения (1). Тогда естественным образом возникает отображение F, которое каждому $X \in A$ ставит в соответствие единственное $Y \in A$ по формуле (3), в которой f имеет вид (1). Таким образом, имеем однозначное отображение

$$F : A \longrightarrow A.$$

Покажем, что отображение F взаимно однозначно. Действительно, пусть $X_1, X_2 \in A$, $X_1 \neq X_2$, но $F(X_1) = F(X_2) = Y$, и $D_{X_1}^*, D_{X_2}^*, E_Y^*$ — области выше определенного вида, ассоциированные с векторами X_1, X_2, Y. Тогда по определению отображения F существуют функции f_1 и f_2 вида (1) однолистно и конформно отображающие области $D_{X_1}^*$ и $D_{X_2}^*$ соответственно на область E_Y^* . А это невозможно по теореме А, примененной к области E_Y^*, поскольку отображение, обратное к f из (1), имеет тот же вид (1).

Покажем, что $F-$ непрерывно. Действительно, если $A \ni X_k \to X_0 \in A$, $X_k = (a_1^{(k)}, b_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}, b_n^{(k)})$, то по теореме Каратеодори [1, гл.2, §5] $D_{X_k} \to D_{X_0}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, как к ядру, следовательно, существует равномерный внутри P предел функций $\varphi_k = f_{X_k}^{-1}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi_0$, φ_0 конформно и однолистно переводит P на D_{X_0}. То же верно и для обратных функций: $f_{X_k} \to f_{X_0} = \varphi_0^{-1}$ равномерно внутри D_{X_0} ([1, гл. 2, §5]). Если $Y_k = F(X_k)$ не сходится к $Y_0 = F(X_0)$, то пусть, например, $f_{X_k}(a_j^{(k)})$ не сходится к $f_{X_0}(a_j^{(0)})$ при некотором j. Следовательно, существует такая подпоследовательность (обозначим ее так же) последовательности $f_{X_k}(a_j^{(k)})$, что

$$\lim_{k\to\infty} f_{X_k}(a_j^{(k)}) = c_j^0 \neq f_{X_0}(a_j^{(0)}). \tag{4}$$

Из равномерной сходимости на любом отрезке Γ из $\mathbb{R}$ последовательности φ_k [1, гл.2, §5, теорема 2] получаем:

$$\forall\epsilon > 0 \qquad |\varphi_k(z) - \varphi_0(z)| < \epsilon \quad \forall z \in \Gamma, k > N(\epsilon)$$

$$\Longrightarrow |\varphi_k(f_{X_k}(a_j^{(k)}) - \varphi_0(f_{X_k}(a_j^{(k)})| < \epsilon \quad \forall k > N(\epsilon).$$

Поскольку границы областей P и D_{X_0} являются кривыми Жордана на сфере Римана, то, как доказал Каратеодори [1, гл. 2, §3, теорема 4], функция φ_0 непрерывна вплоть до границы $\partial P = \overline{\mathbb{R}}$. Поэтому

$$|\varphi_0(f_{X_k}(a_j^{(k)}) - \varphi_0(c_j^0)| < \epsilon \quad \forall k > N_1(\epsilon),$$

отсюда получаем:

$$|a_j^{(k)} - \varphi_0(c_j^0)| < 2\epsilon \quad \forall k > N_2(\epsilon) = \max(N(\epsilon), N_1(\epsilon)).$$

Следовательно, $a_j^{(k)} \to \varphi_0(c_j^0)$ при $k \to \infty$, т. е. $a_j^{(0)} = \varphi_0(c_j^0)$ — противоречие с (4). Таким образом, F — топологическое отображение множества A на его открытое подмножество.

Предположим, $F(A) \neq A$. Тогда на границе $F(A)$ существует точка $Y_0 \in A$. Рассмотрим последовательность $Y_k \in F(A), Y_k \to Y_0, X_k = F^{-1}(Y_k)$. Тогда последовательность X_k может иметь предельные точки только на границе A, пусть X_0 такая предельная точка последовательности X_k, ее подпоследовательность (которую тоже обозначим X_k) сходится к X_0, пусть f_{X_k} — соответствующая последовательность отображений. Как отмечено выше, $f_{X_k} \to f_{X_0}$ равномерно внутри D_{X_0}, причем f_{X_0} однолистно и конформно переводит $D^*_{X_0}$ на расширенную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с n разрезами, определяемыми вектором Y_0. Следовательно, $D^*_{X_0}$ — n-связная область без вырожденных в точку компонент. Поэтому среди координат вектора X_0 нет совпадающих. Среди этих координат нет и ∞, т. к. $\infty \in D^*_{X_0}$ (см.(1)). Но тогда $X_0 \in A$. Противоречие. Следовательно, $F(A) = A$. Это доказывает теорему.

Résumé

It is proved that extended complex plane with n slits on the real axis is conformally isomorphed to a circular domain, symmetric with respect to this axis.

Список литературы

[1] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* / Г. М. Голузин. М., 1966.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: Vstar@petrsu.ru