Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 15, 2009

УДК 517.54

Е. Г. Ганенкова

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ ЛЕММЕ ВОЛЬФА

В статье приводится пример, показывающий, что лемма Вольфа, имеющая широкое применение в комплексном анализе, не может быть усилена.

В [1] доказательство большого числа результатов, касающихся граничных свойств регулярных и однолистных в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций (в частности, соответствия границ при указанных отображениях, вопросов о гомеоморфном продолжении таких функций на границу области определения и т. п.), опирается на следующую лемму.

Лемма Вольфа [1, с. 20–22]. *Пусть $c \in \mathbb{C}$, $f(z)$ — регулярная функция, однолистно отображающая единичный круг Δ на некоторую область G. Для $r > 0$ обозначим $C(r) = \{z :\ z \in \Delta, |z - c| = r\}$. Через $l(r)$ обозначим длину образа дуги $C(r)$ при отображении $f(z)$. Тогда существует такая убывающая к нулю последовательность (r_n), что $l(r_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.*

Возникает вопрос: будет ли верным утверждение леммы для любой регулярной и однолистной в Δ функции $f(z)$ и для любой последовательности $r_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. В данной работе дается отрицательный ответ: приводится пример такой функции $f(z)$ с указанными свойствами и такой убывающей к нулю последовательности (r_n), что $\lim\limits_{n\to\infty} l(r_n) \neq 0$.

Заметим, что в случаях, когда $c \in \Delta$ и $c \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}$ лемма будет справедлива для любых описанных выше функций и последовательностей. Поэтому будем рассматривать ситуацию, когда точка c принадлежит границе единичного круга.

В качестве искомой возьмем функцию $f(z)$, однолистно отображающую единичный круг Δ на область G, представляющую собой прямоугольник с разрезами

$$G = \{z = x + iy : \ -1 < x < 1, \ 0 < y < 1\} \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{i}{n}; \frac{i}{n} + 1\right].$$

Существование такой функции гарантирует теорема Римана.

Введем необходимые определения (см., например, [1, 2]). Рассмотрим некоторую область H.

Определение 1. *Жорданова дуга с концами на границе области H, остальные точки которой лежат в H, называется разрезом области H.*

Определение 2. *Последовательность $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ разрезов области H называется цепью разрезов, если выполнены следующие условия:*

1) никакие два разреза не имеют общих точек (включая и их концы);

2) разрез C_n разделяет область H на две подобласти, одна из которых содержит C_{n-1}, другая C_{n+1};

3) $\operatorname{diam} C_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{C'_n\}_{n=0}^{\infty}$ — некоторые цепи разрезов области G. Через V_n (V'_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ будем обозначать ту из двух компонент $G \setminus C_n$ $(G \setminus C'_n)$, которая не содержит разреза C_0 (C'_0).

Определение 3. *Две цепи $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{C'_n\}_{n=0}^{\infty}$ называются эквивалентными, если для достаточно большого m существует такой номер n, что $V_n \subset V'_m$ и $V'_n \subset V_m$.*

Определение 4. *Простым концом области G назовем класс эквивалентных цепей, носитель простого конца определим как $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{V}_n$.*

Рассмотрим цепь разрезов, представляющую собой последовательность отрезков с концами i/n, $-1/n$, $n = 1, 2 \ldots$ Эта цепь принадлежит простому концу p области G с носителем $I(p)$, равным отрезку $[0; 1]$.

По [1, с. 30, теорема 2.15] (см. также [2, с. 228; 3, с. 40]) регулярное однолистное отображение единичного круга на односвязную область индуцирует взаимно однозначное соответствие между точками единичной окружности и простыми концами этой области. Следовательно, на границе единичного круга существует точка, соответствующая простому концу p. Обозначим эту точку c. По вышеуказанной теореме каждой точке на $\partial\Delta\backslash\{c\}$ будет соответствовать некоторый простой конец области G, носителем которого является точка, принадлежащая или границе квадрата без отрезка $[0;1]$, или одному из разрезов.

Рассмотрим всевозможные последовательности $(\zeta_n^{(1)}) \subset \partial\Delta$, такие что

$$\arg\zeta_n^{(1)} > \arg\zeta_{n+1}^{(1)} > \arg c,\ n = 1, 2\ldots \quad \text{и} \quad \zeta_n^{(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c.$$

Каждой точке $\zeta_n^{(1)}$ будет соответствовать простой конец области G, носителем которого является некоторая точка $w_n^{(1)}$. Причем с ростом n точка $w_n^{(1)}$, двигаясь в отрицательном направлении обхода по границе области G, будет приближаться к отрезку $[0;1]$. Из последовательности $(\zeta_n^{(1)})$ выберем такую подпоследовательность (обозначим ее снова $(\zeta_n^{(1)})$), что соответствующая ей последовательность $(w_n^{(1)})$ сходится при $n \to \infty$ к некоторой точке $A \in (0;1]$.

Обозначим $r_n = |c - \zeta_n^{(1)}|$. Рассмотрим последовательность $(\zeta_n^{(2)})$, где $\zeta_n^{(2)} \in \partial\Delta \bigcap \{z : |z - c| = r_n\}$ и $\zeta_n^{(2)} \neq \zeta_n^{(1)}$. Последовательность $(\zeta_n^{(2)})$ обладает свойствами

$$\arg\zeta_n^{(2)} < \arg\zeta_{n+1}^{(2)} < \arg c,\ n = 1, 2\ldots \quad \text{и} \quad \zeta_n^{(2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c.$$

Точкам этой последовательности будут соответствовать простые концы области G, носителями которых являются точки $w_n^{(2)} \in \partial\Delta$. Из сохранения направления обхода следует, что $w_n^{(2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0-$.

Рассмотрим теперь дуги окружностей $C(r_n)$ с вышеопределенными r_n. Предельное множество $C(f, \zeta_n^{(i)})$ функции f в точке $\zeta_n^{(i)}$ ($i = 1, 2$) (то есть множество точек $w \in \mathbb{C}$, таких что существует последовательность $(z_k) \subset \Delta$, $z_k \underset{k\to\infty}{\to} \zeta_n^{(i)}$ и $f(z_k) \underset{k\to\infty}{\to} w$) совпадает с носителем простого конца, соответствующего точке $\zeta_n^{(i)}$ [1, с. 34], то есть с точкой $w_n^{(i)}$. Поэтому образом каждой дуги $C(r_n)$ будет кривая с концами $w_n^{(1)}$ и $w_n^{(2)}$. А так как $w_n^{(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ и $w_n^{(2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} l(r_n) \geq A$.

Таким образом, нашли такую регулярную и однолистную в Δ функцию $f(z)$ и такую убывающую к нулю последовательность (r_n), что $\varliminf\limits_{n\to\infty} l(r_n) \neq 0$. Заметим, что в рассмотренном случае последовательность $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ можно выбрать так, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} l(r_n)$ не существует.

Résumé

In this paper we show that Wolff lemma, wide-spreaded in complex analysis, can't be improved.

Список литературы

[1] Pommerenke Ch. *Boundary Behaviour of Conformal Maps*/ Ch. Pommerenke. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.

[2] Коллингвуд Э. *Теория предельных множеств* / Э. Коллингвуд, А. Ловатер. М.: Мир, 1971.

[3] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* / Г. М. Голузин. М.: Наука, 1966.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: g_ek@inbox.ru