Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 16, 2009

УДК 515

М. А. Добрынина

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРОВ

В данной работе рассматриваются вопросы о нормальности пространства максимальных 3-сцепленных систем, а также о построении максимальной сцепленной системы с заданным носителем. Изучается вопрос о существовании подфунктора функтора суперрасширения, аналогичного функтору континуальной экспоненты. Также получен результат о степенных спектрах полунормальных функторов, сохраняющих точки взаимной однозначности.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

В работе Ван Милла [7] в 1983 г. было рассмотрено пространство максимальных k-сцепленных систем компакта X — $\lambda^k(X)$, а также показано, что при $k > 2$ пространство $\lambda^k(X)$, как правило, не компактно. А. В. Иванов в 1986 в работе [8] определил $N^k(X)$ как пространство полных k-сцепленных систем и в работе [3] доказал, что $\lambda^k(X)$ всюду плотно в $N^k(X)$ для любого компакта X без изолированных точек. Естественно возникает вопрос о других свойствах пространства $\lambda^k(X)$, в частности, о нормальности пространства. В данной работе приведен пример компакта X, показывающий, что при $k = 3$ пространство $\lambda^k(X)$ может не быть нормально.

В 2004 г. в статье Е. В. Кашубы [2] был приведен пример построения максимальной сцепленной системы (МСС) ξ из суперрасширения пространства X с носителем $\mathrm{supp}(\xi)$, совпадающим с X, при $X = [0, 1]$. В данной работе этот алгоритм обобщается для всех сепарабельных пространств X. Также получены следующие результаты о существовании маскимальных сцепленных систем с заданным носителем:

Если в X найдется открытое сепарабельное подпространство, то существует МСС ξ такая, что $\mathrm{supp}(\xi) = X$.

Пусть X сепарабельно. Тогда для любого кардинала μ существует МСС ξ из суперрасширения $\lambda(X^\mu)$ такая, что $\mathrm{supp}(\xi) = X^\mu$.

Одним из классических примеров функторов является функтор exp и его подфунктор $\exp^c$. Пространство $\exp(X)$ состоит из замкнутых подмножеств пространства X, а его подпространство $\exp^c(X)$ — из связных замкутых подмножеств X, то есть из точек $\exp(X)$ со связными носителями. Вполне естественно возникает вопрос, нельзя ли, используя определение носителя, аналогичным образом задать подфунктор функтора суперрасширения, рассмотрев подпространство $\lambda^c(X)$ пространства $\lambda(X)$, состоящее из максимальных сцепленных систем со связными носителями. Также интересен вопрос о сохранении связности носителей систем при отображениях максимальных сцепленных систем.

В даннойв работе приведен пример пространства X, показывающий, что множество максимальных сцепленных систем со связными носителями может не быть замкнуто в $\lambda(X)$, откуда следует, что $\lambda^c(X)$ не попадает в категорию компактов для данного X. Также получен более общий результат для всех связных сепарабельных пространств:

Пусть X — связно и сепарабельно. Тогда множество МСС со связными носителями всюду плотно в $\lambda(X)$.

Для непрерывных отображений максимальных сцепленных систем получен следующий результат:

Существует непрерывное отображение $f : X \to Y$ и МСС $\xi \in \lambda(X)$ со связным носителем такая, что носитель МСС $\eta = \lambda f(\xi)$ несвязен.

Тем самым доказано, что операция λ^c не является ковариантным функтором.

В работе А. В. Иванова, Е. В. Кашубы, посвященной обобщенной теореме Катетова для полунормальных функторов, был построен пример неметризуемого компакта, в частности, удовлетворяющего следующему свойству:

для любого сохраняющего вес и точки взаимной однозначности полунормального функтора $\mathcal{F}$ со степенным спектром $sp\mathcal{F} = \{1, k, \dots\}$ пространство $\mathcal{F}_k(X)$ наследственно нормально.

В связи с этим возникает вопрос о связи свойства сохранения точек взаимной однозначности полунормальным функтором и его степенного спектра.

В данной работе получены следующие результаты.

Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, сохраняющий точки взаимной однозначности и $sp\mathcal{F} = \{1, k, \dots\}$. Тогда $k \leq 3$.

Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор и $sp\mathcal{F} = \{1, k\}, k \leq 2$. Тогда $\mathcal{F}$ сохраняет точки взаимной однозначности.

В случае степенного спектра $\{1, 3\}$ возможно как сохранение полунормальным функтором точек взаимной однозначности, так и не сохранение.

§ 2. Предварительные сведения

В данной работе мы рассматриваем исключительно компактные хаусдорфовы пространства, все отображения предполагаем непрерывными. Далее компактное хаусдорфово пространство будем называть компактом. Замыкание множества F в топологическом пространстве X будем обозначать $[F]_X$, или просто $[F]$, если ясно, о каком пространстве идет речь. Дискретные пространства мощности μ будем обозначать, следуя [6], как $D(\mu)$. В работе рассматриваются только ковариантные функторы, действующие в категории компактов $Comp$. Необходимые определения, а также определения функторов exp, $\exp^c X$, $\exp^K$ можно найти в [5] и [4]. Определение функтора N^k можно найти в [8].

Система замкнутых подмножеств ξ называется *k-сцепленной,* если пересечение любых ее k элементов непусто. При $k = 2$ будем называть систему *сцепленной.*

k-сцепленная система ξ называется *максимальной k-сцепленной (MkCC)*, если она не содержится ни в какой другой k-сцепленной системе.

Определим пространство λ^k. Для всякой полной k-сцепленной системы определен непустой носитель

$$\mathrm{supp}(\xi) = [\cup\{F_\alpha : F_\alpha - \text{минимальный по включению элемент} \xi\}].$$

Пространство, состоящее из MkCC с конечными носителями, с топологией, открытую предбазу которой образуют множества вида

$$O(U) = \{\xi \in \lambda^k(X) : \text{существует такое } F \in \xi, \text{ что } F \subset U\},$$

где U — открыто в X, будем обозначать, следуя [3], $\lambda^k(X)$.

В отличие от случая $k = 2$, при $k > 2$ пространство λ^k, как правило, не является компактом.

Имеет место следующий результат (см [3]).

Теорема 1. $[\lambda^k(X)] = N^k(X)$ *для любого компакта* X *без изолированных точек.*

Заметим, что данный результат имеет место также для пространства всех максимальных k-сцепленных систем с описанной выше топологией.

Приведем определения свойства нормальности ковариантных функторов.

Функтор $\mathcal{F}$ называется *мономорфным,* если для любого вложения $i : Y \to X$ отображение $\mathcal{F}(i) : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ также является вложением.

Мономорфный функтор $\mathcal{F}$ *сохраняет пересечения,* если для любого компакта X и любой системы $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств X имеет место равенство

$$\mathcal{F}(\cap\{Y_\alpha : \alpha \in A\}) = \cap\{\mathcal{F}(Y_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Функтор $\mathcal{F}$ называется *непрерывным,* если он перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра.

Непрерывный мономорфный сохраняющий пересечения функтор называется *полунормальным,* если он сохраняет точку и пустое множество (см. [5]). Все рассмотренные выше функторы являются полунормальными.

Если $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор, то для любой точки $a \in \mathcal{F}$ определен *носитель* $\mathrm{supp}(a)$ следующим образом:

$$\mathrm{supp}(a) = \cap\{Y \subset X : a \in \mathcal{F}(Y)\}.$$

Заметим, что для функтора N^k данные определения носителей точек также совпадают.

Для любого натурального n через $\mathcal{F}_n$ обозначается множество

$$\mathcal{F}_n(X) = \{a \in \mathcal{F}(X) : |\,\mathrm{supp}(a)| \leq n\}.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathcal{F}_{nn}(X) = \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_{n-1}(X)$. При этом считаем $(\mathcal{F}_0(X) = \emptyset)$.

Степенным спектром функтора $\mathcal{F}$ называется следующее множество
$$sp(\mathcal{F}) = \{k : k \in \mathbb{N}, \mathcal{F}(k)_{kk} \neq \emptyset.\}$$

Будем говорить, что полунормальный функтор $\mathcal{F}$ *сохраняет точки взаимной однозначности,* если для любого отображения $f : X \to Y$ и любой точки $y \in Y$ такой, что $|f^{-1}(y)| = 1$, отображение $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ также взаимнооднозначно в точке $y \in Y \subset \mathcal{F}(Y)$: $|(\mathcal{F}(f))^{-1}(y)| = 1$.

Имеют место следующие предложения (см. [9]).

Предложение 1. *Суперрасширение λ сохраняет точки взаимной однозначности.*

Предложение 2. *Функтор exp^K не сохраняет точки взаимной однозначности при $K = \{1, 3\}$.*

§ 3. Пространство максимальных 3-сцепленных систем

Пример 1. *Существует компакт X такой, что пространство $\lambda^3(X)$ не является нормальным.*

Положим $X = A(\omega_0) \times A(\omega_1)$, где $A(\omega_0), A(\omega_1)$ — Александровские компактификации дискретных пространств $D(\omega_0)$ и $D(\omega_1)$ соответственно; $\{x_0\}$, $\{y_0\}$ — наросты соответствующих компактификаций. Пусть $B = \{x_0\} \times (A(\omega_1) \backslash \{y_0\})$, $C = (A(\omega_0) \backslash \{x_0\}) \times \{y_0\}$, $z_0 = (x_0, y_0)$.

Построим непересекающиеся замкнутые в $\lambda^3(X)$ множества H_1 и H_2 следующим образом.

Возьмем последовательность точек $x_n \in A(\omega_0) \backslash \{x_0\}$, $x_n = n$, тогда $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Пусть $z_1^0, z_2^0 \in X \setminus (B \cup C \cup \{z_0\})$, $z_1^0 \neq z_2^0$. Положим $z_n = (x_n, y_0)$, $z_{n+1} = (x_{n+1}, y_0)$. Пусть $F_n^1 = \{z_1^0, z_2^0, z_n\}$, $F_n^2 = \{z_1^0, z_2^0, z_{n+1}\}$, $F_n^3 = \{z_1^0, z_n, z_{n+1}\}$, $F_n^4 = \{z_2^0, z_n, z_{n+1}\}$.

Система $\xi_n^0 = \{F_n^i\}_{i=1}^4$ является 3-сцепленной. Значит, она может быть достроена до некоторой МЗСС ξ_n.

Построим ПЗСС ξ следующим образом. Возьмем систему η, состоящую из множеств $\Phi_1 = \{z_0, z_1^0\}$ и $\Phi_2 = \{z_0, z_2^0\}$. В качестве ξ возьмем пополнение системы η.

Проверим, что $\xi_n \to \xi$ в $N^3(X)$ при $n \to \infty$.

Пусть $O(U_1, \ldots, U_m)(V_1, \ldots, V_k)$ — произвольная окрестность ξ. Тогда $z_0 \in \cap_{i=1}^m U_i$. Значит, существует n^0 : для $n \geq n^0$ имеем $z_n, z_{n+1} \in$

$\cap_{i=1}^m U_i$. Кроме того, в каждое множество U_i попадет как минимум одна из точек z_1^0, z_2^0. Значит, как минимум одно из множеств F_n^3 или F_n^4 лежит в U_i при $n \geq n^0$. Из того, что для любого j и любого элемента $F \in \xi$ $V_j \cap F \neq \emptyset$ следует, что либо $z_1^0, z_2^0 \in V_j$, либо $z_0 \in V_j$. В первом случае получим, что $V_j \cap F_n^i \neq \emptyset$ для любых n, i. Для остальных V_j положим их пересечение равным V. Так как $z_0 \in V$, существует n^1 : для $n \geq n^1$ имеем $z_n, z_{n+1} \in V$. Тогда $V \cap F_n^i \neq \emptyset$ для $n \geq n^1$. Взяв $n^2 = max\{n^0, n^1\}$, получим, что для $n \geq n^2$ $\xi_n \in O(U_1, \ldots, U_m)(V_1, \ldots, V_k)$.

В качестве H_1 рассмотрим последовательность МЗСС $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$.

Построим множество H_2 следующим образом. Для произвольных $y_a, y_b \in A(\omega_1) \setminus \{y_0\}$, $y_a \neq y_b$ положим $z'_a = (x_0, y_a)$, $z'_b = (x_0, y_b)$. Пусть $G_{ab}^1 = \{z_1^0, z_2^0, z'_a\}$, $G_{ab}^2 = \{z_1^0, z_2^0, z'_b\}$, $G_{ab}^3 = \{z_1^0, z'_a, z'_b\}$, $G_{ab}^4 = \{z_2^0, z'_a, z'_b\}$. Система $\eta_{ab}^0 = \cup\{G_{ab}^i\}_{i=1}^4$ является 3-сцепленной. Значит, она может быть достроена до некоторой МЗСС η_{ab}. Положим $H_2 = [\cup_{z'_a, z'_b \in B}\{\eta_{ab}\}]$.

Докажем, что $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Пусть $\xi_n \in H_1$. Рассмотрим ее окрестность $O(U)(X)$, где $U = \{z_1^0\} \cup (\{x_n, x_{n+1}\} \times (A(\omega_1) \setminus \{z_2^0\}))$. Тогда для любых a, b получим, что $G_{ab}^4 \cap U = \emptyset$, и, значит, η_{ab} не лежит в $O(U)(X)$. То есть $O(U)(X) \cap H_2 = \emptyset$.

Покажем, что для H_1 и H_2 в $\lambda^3(X)$ не существует непересекающихся окрестностей.

Пусть O^1 и O^2 — произвольные окрестности множеств H_1 и H_2 соответственно. Без ограничения общности можно считать, что

$$O^1 = \bigcup_{\xi_n \in H_1} O\xi_n; \; O^2 \supset \bigcup_{\eta_{ab} \in H_2} O\eta_{ab},$$

где $O\xi_n = O(U_1^n, \ldots, U_m^n)$, $O\eta_{ab} = (W_1^{ab}, \ldots, W_k^{ab})$ — базисные окрестности систем ξ_n и η_{ab} соответственно в $\lambda^3(X)$.

Заметим, что из построения систем ξ_n следует, что для любой окрестности $O\xi_n$ и для любого фиксированного i выполнено $U_i^n \supset \{x_l\} \times (A(\omega_1) \setminus K_n)$, где $l = n$ или $l = n + 1$, K_n — некоторое конечное подмножество $A(\omega_1) \setminus \{y_0\}$. Также хотя бы одна из точек z_1^0, z_2^0 попадает в U_i^n для каждого i.

Аналогично, из построения систем η_{ab} следует, что для любой окрестности $O\eta_{ab}$ и для любого фиксированного j выполнено $W_j^{ab} \supset \{y_c\} \times (A(\omega_0) \setminus K_c)$, где $c = a$ или $c = b$, K_c — некоторое конечное подмножество $A(\omega_0) \setminus \{x_0\}$. Также хотя бы одна из точек z_1^0, z_2^0 попадает в W_j^{ab} для каждого j.

Далее, для любой $\xi_n \in H_1$ положим $Oz_n = \cap\{U_i^n : z_n \in U_i^n\}$; $Oz_{n+1} = \cap\{U_i^n : z_{n+1} \in U_i^n\}$, где U_i^n — из определения $O\xi_n$.

Аналогично, для любой $\eta_{ab} \in H_2$ положим $Oz'_a = \cap\{W_j^{ab} : z'_a \in W_j^{ab}\}$; $Oz'_b = \cap\{W_j^{ab} : z'_b \in W_j^{ab}$, где $W_j^{ab}\}$ — из определения $O\eta_{ab}$.

Из свойств пространства X и сделанных выше замечаний следует, что существуют такие точки $z'_a, z'_b \in B$ и такие номера n^a, n^b что для $n \geq max\{n^a, n^b\}$ верно: $Oz'_a \cap Oz_n \neq \emptyset$, $Oz'_a \cap Oz_{n+1} \neq \emptyset$, $Oz'_b \cap Oz_n \neq \emptyset$, $Oz'_b \cap Oz_{n+1} \neq \emptyset$.

В таком случае, для данных a, b, n, $O\eta_{ab} \cap O\xi_n \neq \emptyset$. Докажем это.

Вначале проверим, что для любых i, j, h следующие пересечения непусты: $U_i^n \cap U_j^n \cap W_h^{ab} \neq \emptyset$; $U_i^n \cap W_j^{ab} \cap W_h^{ab} \neq \emptyset$.

Рассмотрим первое пересечение. Возможны два случая. Если $U_i^n \cap U_j^n = \{z_1^0, z_2^0\}$, то как мимнимум одна из точек z_1^0, z_2^0 попадает в W_h^{ab}, значит, $U_i^n \cap U_j^n \cap W_h^{ab} \neq \emptyset$. В другом случае $z_l \in U_i^n \cap U_j^n$, где $l = n$ или $l = n+1$, $z'_c \in W_h^{ab}$, где $c = a$ или $c = b$. При этом $U_i^n \cap U_j^n \supset Oz_l$, $W^{ab} \supset Oz'_c$. Тогда так как $Oz'_c \cap Oz_l \neq \emptyset$, получим, что $U_i^n \cap U_j^n \cap W_h^{ab} \neq \emptyset$.

Для второго пересечения проверка полностью аналогична.

Итак, можно рассмотреть открытое в λ^3 множество $O\xi_n \cap O\eta_{ab} = O(U_1^n, \ldots, U_m^n, W_1^{ab}, \ldots, W_k^{ab})$. Проверим, что оно непустое. Для удобства переименуем множества $U_1^n, \ldots, U_m^n$ в $U_1, \ldots, U_m$; $W_1, \ldots, W_k$ в $U_{m+1}, \ldots, U_{m+k}$. Для любых наборов индексов i, j, h возьмем по точке $x_{i,j,h}$ в каждом пересечении $U_i \cap U_j \cap U_h$ (точки могут совпадать для разных пересечений) и положим $\Psi_l = \{x_{i,j,h} : x_{i,j,h} \in U_l\}$. Система, состоящая из множеств Ψ_l, очевидно, является 3-сцепленной и лежит в $O(U_1, \ldots, U_{m+k}.)$ Достроим ее до максимальной в пределах множества $\cup_{l=1,\ldots,m+k}\Psi_l$ (подмножествами данного множества), а затем возьмем ее пополнение ζ (см. [3]). Мы получим МЗСС ζ с конечным носителем, лежащую в $O(U_1, \ldots, U_{m+k}) = O\xi_n \cap O\eta_{ab} \subset O^1 \cap O^2$.

Итак, в пространстве $\lambda^3(X)$ нашлись такие замкнутые непересекающиеся множества H_1 и H_2, что пересечение любых их окрестностей непусто. Значит, $\lambda^3(X)$ не является нормальным.

§ 4. О носителях максимальных сцепленных систем

В данном параграфе предполагаем $|X| \neq 2$. В основе доказательства следующей леммы лежит пример, построенный Е. В. Кашубой в работе [1].

Лемма 1. *Для любого сепарабельного пространства X существует МСС ξ такая, что* $\mathrm{supp}(\xi) = X$.

Доказательство. Пусть A — счетное всюду плотное подмножество X. Его точки можно пронумеровать в некоторой последовательности: $r_0, r_1, r_2, \ldots$. Сформируем множества F_n следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&F_1 = \{r_0, r_1\},\ F_2 = \{r_0, r_2\},\ F_3 = \{r_1, r_2, r_3\},\ F_4 = \{r_0, r_3, r_4\},\ \ldots\\
&F_{2k} = \{r_0, r_3, r_5, \ldots, r_{2k-1}, r_{2k}\},\\
&F_{2k+1} = \{r_1, r_2, r_4, r_6, \ldots, r_{2k}, r_{2k+1}\}, \ldots
\end{aligned}
$$

Как видно из построения, множества F_n образуют сцепленную систему. Эта сцепленная система может быть дополнена до некоторой МСС ξ.

Легко проверить, что элементы F_n являются минимальными по включению. Их объединение содержит в себе множество A. Значит, $\mathrm{supp}(\xi) = X$. □

В следующем предложении предполагаем, что X бесконечно.

Предложение 3. *Если в X найдется открытое сепарабельное подпространство, то существует МСС ξ такая, что* $\mathrm{supp}(\xi) = X$.

Доказательство. Пусть A открытое сепарабельное подпространство X, H — счетное всюду плотное в A подмножество. Точки множества H можно пронумеровать в некоторой последовательности: $r_0, r_1, r_2, \ldots$. Сформируем множества F_n следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&F_1 = \{r_0, r_1\},\ F_2 = \{r_0, r_2\},\ F_3 = \{r_1, r_2, r_3\},\ F_4 = \{r_0, r_3, r_4\},\ \ldots\\
&F_{2k} = \{r_0, r_3, r_5, r_7, \ldots, r_{2k-1}, r_{2k}\},\\
&F_{2k+1} = \{r_1, r_2, r_4, r_6, \ldots, r_{2k}, r_{2k+1}\}, \ldots
\end{aligned}
$$

Далее, пусть $B = X \setminus A$. Без ограничения общности можно считать, что $|B| > 1$. В качестве η возьмем систему, состоящую из множеств $F_n \cup \{x\}$, где $x \in B$, и множества B. Система η является сцепленной по построению. Эта сцепленная система может быть дополнена до некоторой МСС ξ.

Проверим, что множества $F_n \cup \{x\}$ — минимальные по включению элементы системы ξ. Предположим, что это не так. Пусть существует $\Phi \in \xi$ такой, что $\Phi \subsetneq F_n \cup \{x\}$ для некоторых $n,\ x$. Пусть $y \in F_n \cup \{x\} \setminus \Phi$.

Если $y = x,\ x \in B$, то $\Phi \cap B = \emptyset$.

Если $y \neq x$, то $y = r_i$. Тогда $(F_n \setminus r_i) \cap F_k = \emptyset$ для некоторого F_k. Значит, $\Phi \cap (F_k \cup \{z\}) = \emptyset$ для всех $z \neq x,\ z \in B$.

Итак, множества $F_n \cup \{x\}$ являются минимальными по включению элементами системы ξ, а их объединение всюду плотно в X.

Значит,

$$\operatorname{supp}(\xi) \supseteq [\bigcup_{n=1,2,\ldots} (F_n \cup \{x\})] = X.$$

Доказательство закончено. $\Box$

Предложение 4. *Пусть $f : X \times Y \to X$ проекция, Y сепарабельно, и существует МСС ξ_X с носителем* $\operatorname{supp}(\xi_X) = X$. *Тогда существует МСС ξ из $\lambda(X \times Y)$ такая, что* $\operatorname{supp}(\xi) = X \times Y$ *и* $\lambda f(\xi) = \xi_X$.

Доказательство. Так как Y сепарабельно, то, согласно лемме 1, существует МСС ξ_Y такая, что $\operatorname{supp}(\xi_Y) = Y$. Построим систему η следующим образом:

$$\eta = \{F \times G : \ F \in \xi_X, \ G \in \xi_Y\}.$$

Сцепленность системы η следует из сцепленности систем ξ_X и ξ_Y. Дополним систему η до некоторой МСС ξ произвольным образом.

Проверим, что элементы вида $F_i \times G_j$ являются минимальными по включению системы ξ, если $F_i, \ G_j$ — минимальные по включению элементы систем ξ_X и ξ_Y соответственно. Предположим, что это не так. Пусть найдется $\Phi \in \xi$ такой, что $\Phi \subsetneq F_i \times G_j$. Пусть $z \in (F_i \times G_j) \setminus \Phi$. Тогда $z = (x, y), \ x \in F_i, \ y \in G_j$. Так как $F_i, \ G_j$ — минимальные по включению, найдутся такие элементы F_k и G_n систем ξ_X и ξ_Y соответственно, что $F_k \cap F_i = x$; $G_n \cap G_j = y$. Тогда $(F_k \times G_n) \cap (F_i \times G_j) = z$. Значит, $(F_k \times G_n) \cap \Phi = \emptyset$, в то время как $(F_k \times G_n) \in \xi$.

Получаем, что $\operatorname{supp}(\xi) \supset [\bigcup\{F_i \times G_j : F_i, G_j$ — минимальные по включению элементы систем ξ_X и $\xi_Y\}]$. Значит, $\operatorname{supp}(\xi) = X$. Из построения системы ξ следует, что $\lambda f(\xi) = \xi_X$. $\Box$

Предложение 5. *Пусть X сепарабельно. Тогда для любого кардинала μ существует МСС ξ из $\lambda(X^\mu)$ такая, что* $\operatorname{supp}(\xi) = X^\mu$.

Доказательство. Пространство X^μ разлагается в обратный спектр $S = \{X^\alpha, p^\alpha_\gamma : \alpha, \gamma < \mu\}$, где $X^\alpha = \prod_{\gamma<\alpha} X_\gamma$ ($X_\gamma = X$ для любого $\gamma < \alpha\}$) а $p^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ — естественная проекция произведения на подпроизведение.

Далее, согласно лемме 1, для $X^1 = X$ существует МСС ξ такая, что $\operatorname{supp}(\xi) = X^1$. Положим $\xi_1 = \xi$.

Для $X^2 = X \times X$ согласно Предложению 2 существует МСС (обозначим ее ξ_2) такая, что $\mathrm{supp}(\xi_2) = X^2$, $\lambda p_1^2(\xi_2) = \xi_1$.

Предположим, что для всех γ меньших фиксированного $\beta < \mu$ уже построены МСС ξ_γ такие, что $\mathrm{supp}(\xi_\gamma) = X^\gamma$ и для $\delta < \gamma$ $\lambda p_\delta^\gamma(\xi_\gamma) = \xi_\delta$.

Возможны два случая:

1. $\beta = \gamma + 1$ для некоторого $\gamma < \mu$. Тогда из того, что X — сепарабельно и существует такая МСС ξ_γ, что $\mathrm{supp}(\xi_\gamma) = X^\gamma$, согласно Предложению 2 следует, что существует МСС ξ_β, что $\mathrm{supp}(\xi_\beta) = X^\beta$ и $\lambda p_\gamma^\beta(\xi_\beta) = \xi_\gamma$. Тогда для всех $\alpha < \beta$ выполнено $\lambda p_\alpha^\beta(\xi_\beta) = \lambda p_\alpha^\gamma \circ \lambda p_\gamma^\beta(\xi_\beta) = \xi_\alpha$.

2. β — предельное. Тогда $X^\beta = \lim S_\beta$, где $S_\beta = \{X^\alpha, p_\gamma^\alpha : \alpha, \gamma < \beta\}$.Так как функтор суперрасширения непрерывен, пространство $\lambda(X^\beta)$ совпадает с пределом спектра $S_\lambda = \{\lambda(X^\alpha), \lambda p_\gamma^\alpha : \alpha, \gamma < \beta\}$

Ясно, что $\xi_\beta = \{\xi_\alpha : \alpha < \beta\}$ — нить спектра S_λ по построению. Следовательно, $\xi_\beta \in \lambda(X^\beta)$. Докажем, что $\mathrm{supp}(\xi_\beta) = X^\beta$.

Известно, что $p_\alpha^\beta(\mathrm{supp}\,\xi_\beta) \supset \mathrm{supp}(\lambda(f)(\xi_\beta))$, и, так как $\lambda(f)(\xi_\beta) = \xi_\alpha$, то $p_\alpha^\beta(\mathrm{supp}\,\xi_\beta) = X_\alpha$ для любого $\alpha < \beta$. Так как носитель — замкнутое подмножество предела обратного спектра, справедлива формула:

$$\mathrm{supp}\,\xi_\beta = \bigcap_\alpha (p_\alpha^\beta)^{-1}(p_\alpha^\beta(\mathrm{supp}\,\xi_\beta)).$$

Значит, $\mathrm{supp}(\xi_\beta) = X_\beta$.

Таким образом, для всех α меньших μ существуют МСС ξ_α такие, что $\mathrm{supp}(\xi_\alpha) = X^\alpha$ и для $\beta < \alpha$ $\lambda p_\beta^\alpha(\xi_\alpha) = \xi_\beta$.

Рассмотрим обратный спектр $S_\lambda = \{\lambda(X^\alpha), \lambda p_\gamma^\alpha : \alpha, \gamma < \mu\}$. Его предел $\lim S$ совпадает с пространством $\lambda(X^\mu)$. В качестве ξ возьмем $\xi = \{\xi_\alpha : \alpha < \mu\}$ — нить спектра S_λ. Тогда $\xi \in \lambda(X^\mu)$. Аналогично предыдущему получим, что $\mathrm{supp}(\xi) = \lim S = X^\mu$. □

§ 5. О максимальных сцепленных системах со связными носителями

Пример 2. *Существует непрерывное отображение $f : X \to Y$ и МСС $\xi \in \lambda(X)$ со связным носителем такая, что носитель МСС $\eta = \lambda f(\xi)$ несвязен.*

Рассмотрим в качестве Y отрезок $[0, 1]$, в качестве X — произведение отрезков $[0, 1] \times [0, 1]$, и пусть $f : X \to Y$ — проекция на сомножитель.

Точки r_0, r_1, r_2, r_3 возьмем следующим образом: $r_0 = \{0, 0\}$, $r_1 = \{\frac{1}{2}, 0\}$, $r_2 = \{1, 0\}$, $r_3 = \{1, 1\}$.

Проведем построение МСС ξ аналогично доказательству леммы 1. Занумеруем точки некоторого счетного всюду плотного подмножества $X \setminus \{r_0, \dots, r_3\}$ в некоторой последовательности, начиная с r_4: r_4, r_5, $r_6, \dots$ Сформируем множества F_n следующим образом: $F_1 = \{r_0, r_1\}$, $F_2 = \{r_0, r_2\}$, $F_3 = \{r_1, r_2, r_3\}$, $F_4 = \{r_0, r_3, r_4\}$ $\dots$ $F_{2k} = \{r_0, r_3, r_5, r_7, \dots, r_{2k-1}, r_{2k}\}$, $F_{2k-1} = \{r_1, r_2, r_4, r_6, \dots, r_{2k}, r_{2k+1}\}$ $\dots$.

Положим $\xi^0 = \{F_i\}_{i=1}^{\infty}$. Она может быть достроена до некоторой МСС ξ.

Легко проверить, что множества F_n являются минимальными по включению элементами системы ξ и, следовательно, $\mathrm{supp}(\xi) = X$.

Пусть $\eta = \lambda f(\xi)$, $f(F_i) = \Phi_i$. Тогда из построения F_n и выбора точек r_i следует, что для любого элемента $\Phi \in \eta$, Φ содержит либо Φ_1, либо Φ_2, либо Φ_3. Тогда

$$\mathrm{supp}(\eta) = [\bigcup_{i=1,2,3} \Phi_i] = \{f(r_0), f(r_1), f(r_2)\}$$

— несвязное подмножество Y.

Теорема 2. *Пусть X — связно и сепарабельно. Тогда множество МСС со связными носителями всюду плотно в $\lambda(X)$.*

Доказательство. Пусть $O(U_1, \dots, U_n)$ — произвольное базисное открытое в $\lambda(X)$ множество. Докажем, что существует МСС с конечным носителем ξ, лежащая в $O(U_1, \dots, U_n)$.

Без ограничения общности можно считать, что $n \geq 3$ и $\cap_{i=1}^{n} U_i = \emptyset$. Иначе возьмем $x \in \cap_{i=1}^{n} U_i$. Тогда МСС со связным носителем $\xi_x = \{F : x \in F,\ F \text{ замкнуто в } X\}$ лежит в $O(U_1, \dots, U_n)$.

Так как X не имеет изолированных точек, в каждом пересечении $U_i \cap U_j$ при $i \neq j$ можно выбрать по точке x_j^i так, чтобы все они были различны. Объединение всех выбранных точек, лежащих в U_i, обозначим за Φ_i. Тогда система $\xi_0 = \{\Phi_i : i = 1, \dots, n\}$, очевидно, сцеплена. Дополним ее до максимальной в пределах множества $\cup_{i=1}^{n} \Phi_i$ (подмножествами этого множества) и возьмем ее поплнение ξ. Мы получим МСС с конечным носителем, лежащую в $O(U_1, \dots, U_n)$.

Так как ξ — максимальная, в ней найдутся такие минимальные по включению элементы (обозначим их за F_1 и F_2) и точка $y_0 \in F_1$, что $F_1 \cap F_2 = \{y_0\}$. Остальные минимальные по включению элементы системы ξ обозначим как $F_i, i \geq 3$.

Далее, рассмотрим некоторое счетное всюду плотное в X множество Q, не пересекающее $\mathrm{supp}(\xi)$.

Точку y_1 возьмем следующим образом: $y_1 \in \cap\{U_i : y_0 \in U_i\} \cap Q$.

Занумеруем оставшиеся точки Q в некоторой последовательности, начиная с y_2: $y_2, y_3, y_4, \ldots$

Построим следующие множества:

$G^0_0 = F_1$, $G^0_1 = F_2 \cup \{y_1\}$, $G^0_2 = (F_1 \setminus \{y_0\}) \cup \{y_1, y_2\}$, $G^0_3 = F_2 \cup \{y_2, y_3\}$, $G^0_4 = (F_1 \setminus \{y_0\}) \cup \{y_1, y_3, y_4\}, \ldots,$ $G^0_{2k} = (F_1 \setminus \{y_0\}) \cup \{y_1, y_3, y_5, \ldots, y_{2k-1}, y_{2k}\}$, $G^0_{2k+1} = F_2 \cup \{y_2, y_4, y_6, \ldots, y_{2k}, y_{2k+1}\}$

Для всех F_i, таких, что $F_i \cap F_1 = y_0$ положим $G_i = F_i \cup \{y_1\}$. Для остальных F_i положим $G_i = F_i$. Заметим, что в этих обозначениях $G_1 = F_1 = G^0_0$, $G_2 = F_2 \cup \{y_1\} = G^0_1$.

Рассмотрим систему η_0, состоящую из множеств G_i и G^0_j. Система η_0 будет сцепленной по построению. Она может быть дополнена до некоторой МСС η.

Проверим, что все точки множества Q попадут в объединение минимальных по включению элементов МСС η.

Пусть это не так. Предположим, найдется $H \in \eta$ такой, что $H \subset G^0_i$ и $y_j \in G^0_i \setminus H$ при $j \geq 1$. При $j = i$ положим $k = j + 1$, при $j < i$ положим $k = j$. Из построения множеств G^0_i будет следовать, что $G^0_k \cap G^0_i = y_j$. Значит, $H \cap G^0_k = \emptyset$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathrm{supp}(\eta) \supseteq [Q] = X$.

Проверим, что $\eta \in O(U_1, \ldots, U_n)$.

Так как $\xi \in O(U_1, \ldots, U_n)$, для любого $i = 1, \ldots, n$ найдутся $F_j \in \xi$, такие, что $F_j \subset U_i$. Если $G_j = F_j$, то $G_j \subset U_i$. Если же $G_j = F_j \cup \{y_1\}$, то $y_0 \in F_j \subset U_i$. Напомним, что точка y_1 лежит в тех же U_i, что и y_0. Тогда $y_1 \in U_i$, и $G_j \subset U_i$.

Итак, для произвольного базисного открытого в $\lambda(X)$ множества $O(U_1, \ldots, U_n)$ нашлась МСС η со связным носителем, лежащая в $O(U_1, \ldots, U_n)$. $\square$

В частности, если положить X равным отрезку $[0, 1]$ с интервальной топологией, может быть получен следующий пример:

Пример 3. *Существует пространство X такое, что множество МСС со связными носителями не замкнуто в $\lambda(X)$.*

Тем самым доказано, что операция λ^c не является ковариантным функтором.

Кроме того, для несвязных компактов имеет место следующий результат:

Предложение 6. *Пусть X несвязно. Тогда множество МСС со связными носителями не является всюду плотным в $\lambda(X)$.*

Доказательство. Пусть X представимо в виде $X = A \cup B$, где $A \cap B = \emptyset$, A, B — открыто-замкнутые подмножества X. Возьмем точки $x_1 \in A$, $x_2, x_3 \in B$ и такие их окрестности Ox_i, чтобы $Ox_1 \subset A$, $Ox_2 \subset B$, $Ox_3 \subset B$, $Ox_2 \cap Ox_3 = \emptyset$. Положим $U_1 = Ox_1 \cup Ox_2$, $U_2 = Ox_2 \cup Ox_3$, $U_3 = Ox_1 \cup Ox_3$. Рассмотрим систему ξ_0, состоящую из множеств $F_1 = \{x_1, x_2\}$, $F_2 = \{x_2, x_3\}$, $F_3 = \{x_1, x_3\}$ и достроим ее до МСС ξ. Ясно, что $\xi \in O(U_1, U_2, U_3)$, а значит $O(U_1, U_2, U_3) \neq \emptyset$.

Пусть МСС $\gamma \in O(U_1, U_2, U_3)$. Тогда найдутся минимальные по включению элементы $\Phi_i \in \gamma$ такие, что $\Phi_i \subset U_i$. Так как $U_1 \cap U_3 \subset A, U_2 \subset B$, то $\Phi_1 \cap \Phi_3 \subset A, \Phi_2 \subset B$. Значит, $\mathrm{supp}(\gamma) \cap A \neq \emptyset$, $\mathrm{supp}(\gamma) \cap B \neq \emptyset$. Значит, для любой МСС $\gamma \in O(U_1, U_2, U_3)$ ее носитель несвязен. $\square$

§ 6. О степенных спектрах полунормальных функторов

Предложение 7. *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор, сохраняющий точки взаимной однозначности и $sp\mathcal{F} = \{1, k, \dots\}$. Тогда $k \leq 3$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $k \geq 4$. Рассмотрим дискретное пространство X мощности k. X представимо в виде $X = A \cup B$, где $A \cap B = \emptyset$, $|A| \geq 2$, $|B| \geq 2$. Пусть $a \in A$, $b \in B$. Рассмотрим отображение $f_1 : X \to A \cup \{b\}$ такое, что $f_1(A) = A$, $f_1(B) = b$ и отображение $f_2 : X \to B \cup \{a\}$ такое, что $f_2(B) = B$, $f_2(A) = a$.

Далее, пусть $Y = \{a, b\}$ и отображение $g_1 : A \cup \{b\} \to Y$ действует по правилу $g_1(A) = a$, $g_1(b) = b$, а отображение $g_2 : B \cup \{a\} \to Y$ действует по правилу $g_2(B) = b$, $g_2(a) = a$. Таким образом, $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.

Пусть точка $\xi \in \mathcal{F}(X)$ такая, что $\mathrm{supp}(\xi) = X$. Тогда для $\eta_1 = \mathcal{F}(f_1)(\xi)$ $|\mathrm{supp}(\eta_1)| = 1$, так как $|A| < k$. При этом $\mathrm{supp}(\eta_1) = \{b\}$, иначе $\mathcal{F}$ не сохраняет точки взаимной однозначности.

Действительно, пусть $\mathrm{supp}(\eta_1) = \{z\} \neq \{b\}$, тогда $|f_1^{-1}(z)| = 1$. Так как существует $\gamma \in \mathcal{F}(X)$ такая, что $\mathrm{supp}(\gamma) = f^{-1}(z)$, получим, что $\mathcal{F}(f_1)(\gamma) = \eta_1 = \mathcal{F}(f_1)(\xi)$. То есть прообраз точки $z = \eta_1$ при отображении $\mathcal{F}(f_1)$ состоит более, чем из одной точки.

Положим $\mathcal{F}(g_1)(\eta_1) = \delta_1$, тогда $\mathrm{supp}(\delta_1) = b$, так как $g_1(b) = b$.

С другой стороны, для $\eta_2 = \mathcal{F}(f_2)(\xi)$ выполнено $\mathrm{supp}(\eta_2) = \{a\}$, аналогично предыдущему случаю. Пусть $\mathcal{F}(g_2)(\eta_2) = \delta_2$, тогда $\mathrm{supp}(\delta_2) = \{a\}$.

Получим, что $\delta_1 \neq \delta_2$ и, следовательно, $\mathcal{F}(g_1) \circ \mathcal{F}(f_1) \neq \mathcal{F}(g_2) \circ \mathcal{F}(f_2)$. В то время как $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ — противоречие. □

Предложение 8. *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор степени ≤ 2. Тогда $\mathcal{F}$ сохраняет точки взаимной однозначности.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ и $y \in Y$ произвольная точка, такая, что $|f^{-1}(y)| = 1$. Проверим, что отображение $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ также взаимнооднозначно в точке $y \in Y \subset \mathcal{F}(Y)$. Допустим, существует $\xi \in \mathcal{F}(X)$ такая, что $\mathcal{F}(f)(\xi) = y$ и $\mathrm{supp}(\xi) = \{z_1, z_2\}$. Ясно, что $z_i = x$ для некоторого i. Очевидно, что $f(z_1) = f(z_2) = f(x) = y$. Значит, $z_1 = z_2 = x$ и точка $\xi \in \mathcal{F}(X)$ совпадает с точкой $x \in \mathcal{F}(X)$. То есть $|(\mathcal{F}(f))^{-1}(y)| = 1$. Полунормальный функтор степени 1 является тождественным и, значит, он автоматически сохраняет точки взаимной однозначности.

В случае степенного спектра $\{1, 3\}$ возможно как сохранение полунормальным функтором точек взаимной однозначности (функтор λ), так и несохранение (функтор $\exp^K$).

Résumé

In the paper the normality of the space of maximal 3-linked systems is studied as well as the problem of building a maximal linked system with given support. The answer to the question, whether it is possible to define a superextension's subfunctor in the same way as continious exponent functor with the use of support's concept, is given. It is also proved, that for seminormal functors, preserving one-to-one points, $sp\mathcal{F} = \{1, k, \dots\}$, where $k \leq 3$.

Список литературы

[1] Fedorchuk V. *Cellularity of covariant funktors* / V. Fedorchuk, S. Todorčević // Topology and its Applications. 1997. V. 76. P. 125–150.

[2] Вакулова Е. В. *О носителях максимальных сцепленных систем* / Е. В. Вакулова // Труды ПетрГУ. Сер. Матем. 2004. Вып. 11. С. 3–8.

[3] Иванов А. В. *Теорема о почти неподвижной точке для отображений пространства максимальных k-сцепленных систем* / А. В. Иванов // Вопросы геометрии и топологии. 1986. С. 31–40.

[4] Иванов А. В. *О степенных спектрах и композициях финитно строго эпиморфных функторов* /А. В. Иванов // Труды ПетрГУ. Серия Математика. 2000. Вып. 7. С. 15–28.

[5] Федорчук В. В. *Общая топология. Основные конструкции* / В. В. Федорчук, В. В. Филиппов // М.: Изд-во МГУ, 1988.

[6] Энгелькинг Р. *Общая топология* / Р. Энгелькинг. М.: Мир, 1985.

[7] Mill Jan van. *An almost fixed point theorem for metrizable continua* /Jan van Mill // Archiv der Mathematik. 1983. V40. P. 159–169.

[8] Иванов А. В. *О пространстве полных сцепленных систем* / А. В. Иванов // Сибирский математический журнал. 1986. № 6. С. 95–110.

[9] Щепин Е. В. *Функторы и несчетные степени компактов* / Е. В. Щепин // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. № 3. С. 3–62.

[10] Иванов А. В. *О наследственной нормальности пространств вида* $\mathcal{F}(X)$ / А. В. Иванов, Е. В. Кашуба // Сибирский математический журнал. 2008. № 4.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33