Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 16, 2009

УДК 511

Б. М. Широков

СУММИРОВАНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ НА РЕДКИХ МНОЖЕСТВАХ

Работа является продолжением статьи [1] и посвящена асимптотике суммы значений мультипликативных функций, среднее значение которых на простых числах равно нулю.

Эта статья есть продолжение работы [1]. Ее результат пересекается с результатами статьи Б. В. Левина и Н. М. Тимофеева [2], но не покрывается последней. Связь между ними, по существу, показана в [1]. Отметим лишь, что метод работы [2] — аналитический, а в настоящей работе — элементарный.

В работе [3] Е. Вирзингом асимптотика суммы значений мультипликативной функции f выведена из условия

$$\sum_{p\le x}\frac{f(p)\log p}{p}=\tau\log x+o(\log x) \tag{1}$$

для $f(n)\ge 0$ и с постоянной $\tau>0$. Там же Е. Вирзинг поставил вопрос: можно ли получить асимптотику

$$\sum_{n\le x}f(n)=o\left(\frac{x}{\log x}\sum_{n\le x}\frac{f(n)}{n}\right)$$

из условия (1) при $\tau=0$? Отрицательный ответ был дан в работе [4]. Поэтому естественно, что вместо условия (1) приходится возвращаться к условию

$$\sum_{p\le x}f(p)=o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

© Б. М. Широков, 2009

В дальнейшем используем следующие обозначения: $f(n)$ — мультипликативная комплекснозначная функция, $F(s)$ — ее производящий ряд Дирихле, p — простое число, k, m, n, d — натуральные числа, $C_1, C_2, \ldots$ — абсолютные постоянные, $\Lambda_f(n)$ — обобщенная функция Мангольдта для $f(n)$. Определение функции Мангольдта можно найти в книге [5, с. 380]. Ее значения являются коэффициентами ряда Дирихле $F'(s)/F(s)$ и могут быть найдены с помощью произведения рядов Дирихле:

$$F'(s) = \frac{F'(s)}{F(s)} \cdot F(s),$$

то есть из равенства

$$f(n) \log n = \sum_{d|n} f(d) \Lambda_f\left(\frac{n}{d}\right). \tag{2}$$

Для вполне мультипликативной функции $f(n)$, то есть обладающей свойством: $f(mn) = f(m)f(n)$ для любых m и n, она определяется следующим образом:

$$\Lambda_f(n) = \begin{cases} f^k(p) \log p, & \text{если } n = p^k, \\ 0, & \text{если } n \neq p^k. \end{cases}$$

Следуя Вирзингу [3], введем определение.

Определение 1. *Мультипликативная функция $f(n)$ называется экспоненциально мультипликативной, если*

$$f(p^k) = \frac{f^k(p)}{k!}.$$

Для такой функции $\Lambda_f(n) = f(p) \log p$, если $n = p$, и равна 0, если это не так.

Далее, введем следующие обозначения:

$$M(f, x) = \sum_{n \le x} f(n), \quad l(f, x) = \sum_{n \le x} f(n) \log n, \quad m(f, x) = \sum_{n \le x} \frac{f(n)}{n},$$

$$\Pi(f, x) = \prod_{p \le x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \ldots\right).$$

Через $\tau(x)$ обозначим комплекснозначную функцию, обладающую следующими свойствами:

1) $\tau(x)$ ограничена и измерима по Лебегу при $x \geq 1$;
2) $\tau(x)$ стремится к 0 при $x \to \infty$;
3) для любого $\delta \in (0,1)$, если $x^\delta \leq y \leq x$, то при $x \to \infty$

$$\tau(y) - \tau(x) = o(|\tau(x)|); \tag{3}$$

4) существует такое число $c > 1$, что

$$h(x) = \int_1^x \frac{|\tau(u)|}{u} du \leq c|\tau(x)| \log x. \tag{4}$$

Заметим, что условие (3) равносильно медленному изменению в смысле Караматы функции $\sigma(t) = \tau(e^t)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Если комплекснозначная мультипликативная функция $f(n)$ удовлетворяет следующим условиям: при $x \to \infty$*

$$\sum_{p \leq x} f(p) = \frac{\tau(x)x}{\log x}(1 + o(1)), \tag{5}$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{|f(p)| \log p}{p} = |\tau(x)| \log x(1 + o(1)), \tag{6}$$

и существуют такие постоянные c_0 и λ, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, что

$$|f(p^k)| \leq c_0 p^{k\lambda}, \qquad k \geq 1, \tag{7}$$

то

$$M(f,x) = \frac{\tau(x)x}{\log x} m(f,x) + o\left(\frac{|\tau(x)|x}{\log x} m(|f|,x)\right). \tag{8}$$

Прежде, чем переходить к доказательству теоремы, рассмотрим ее применение к функции, заданной на редком множестве простых чисел. Подмножество P множества простых чисел называют *редким*, если ряд

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p}$$

сходитс Через $E(P)$ обозначим моноид, мультипликативно порожденный множеством P, а через $E^*(P)$ — моноид, порожденный остальными простыми числами.

Из приведенной теоремы мы увидим, что составных чисел в $E(P)$ относительно мало. Более точно, обозначая через $h(n)$ индикаторную функцию для $E(P)$, заданную на множестве натуральных чисел. Тогда можем сказать, что вклад составных чисел в сумму $M(h,x)$ незначителен, решающую роль в формировании значений этой суммы играют простые числа.

Образуем редкое множество простых чисел P следующим образом. Пусть $\tau(x) > 0$ убывающая функция, стремящщаяся к 0 на бесконечности, причем так, что интеграл

$$\int_2^\infty \frac{\tau(x)du}{u\log u}$$

сходится, и $\tau(e^t)$ медленно изменяетс Кроме того, предположим, что $\tau(x)$ удовлетворяет условию: при $x \to \infty$

$$\int_1^x \frac{\tau(u)du}{u} \sim \tau(x)\log x. \tag{9}$$

Если $q_1, q_2, \ldots$ — все простые числа, пронумерованные в порядке возрастания, то множество P образуем из простых чисел $p_n = q_{k_n}$,

$$k_n = \left[\frac{n}{\tau(n)}\right].$$

Нам нужно вывести асимптотический закон простых чисел из множества P, то есть получить асимптотику функции

$$\pi(P,x) \overset{def}{=} \sum_{p_n \le x} 1.$$

$\pi(x)$ обозначает, как обычно, число всех простых чисел, не превосходящих x. Пусть x — любое положительное число, а n такое, что

$$p_n = q_{k_n} \le x < q_{k_n+1}.$$

Тогда

$$\pi(P,x)=n, \quad \text{а} \quad \pi(x)=k_n.$$

Поэтому

$$\pi(x)_{\leq}\frac{n}{\tau(n)}<\pi(x)+1.$$

Отсюда следует,что

$$n=\pi(P,x)\sim\tau(n)\pi(x).$$

Теперь уясним, как связано значение $\tau(n)$ с $\tau(x)$. Из условия (9) следует, что существует такое число $c\in(0,1)$, что $\tau(x)\geq a\log^{c-1}x$. Ясно, что $n=\pi(P,x)<x$ и

$$n\sim\tau(n)\pi(x)_{\geq}\tau(x)\pi(x)\geq\frac{ax}{\log^2 x}>\sqrt{x}.$$

В силу медленного изменения $\tau(e^t)$ имеем, что $\tau(n)\sim\tau(x)$. Итак,

$$\pi(P,x)\sim\frac{\tau(x)x}{\log x}.$$

Теперь положим в теореме $f(n)=\mu(n)$, если $n\in E(P)$, и $f(n)=0$ в противном случае.

Проверим для этой функции условия теоремы. Условие (5):

$$\sum_{p\leq x}f(p)=-\pi(P,x)\sim-\tau(x)\frac{x}{\log x};$$

условие (6):

$$\sum_{p\leq x}\frac{|f(p)|\log p}{p}=\int\limits_{2-}^{x}\frac{\log u d\pi(P,u)}{u}\sim\int\limits_{2}^{x}\frac{\tau(u)}{u}du\sim\tau(x)\log x.$$

Что же касается условия (7), то оно очевидно. Из равенства (8) получаем

$$M(f,x)=\sum_{n\leq x, n\in E}\mu(n)\sim-\tau(x)\frac{x}{\log x}\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right). \tag{10}$$

Сравнение этой асимптотической формулы с известной оценкой

$$M(\mu, x) = O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$$

показывает, что если функция $\mu(n)$ не 0 только на E, то сумматорная функция для нее имеет четко выраженную асимптотику, отличающуся по величине от асимптотики для $\pi(P, x)$ лишь на постоянный множитель, равный асимптотической плотности моноида E^*, и противоположна ей по знаку. Для индикаторной функции $h(n)$ аналогично получим

$$M(h, x) = \sum_{n \leq x, n \in E} h(n) \sim \tau(x) \frac{x}{\log x} \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Сравнение с формулой (10) дополнительно убеждает, что составные числа не играют решающей роли в формировании значений $M(f, x)$. Взаимопогашения значений $f(n)$ на составных числах мало изменяют сумму, в которой считается количество чисел из E, не превосходящих x.

Перейдем к доказательству теоремы. Доказательству предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Существуют такие числа θ, $0 > \theta > -1$ и $a > 0$, что*

$$|\tau(x)| \geq a \log^{\theta} x. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть число x_0 такое, что $h(x_0) > 0$. Для краткости записи будем считать, что $x_0 = e$. Из условия (4) ввиду локальной суммируемости $\tau(x)$ имеем почти всюду при $x > e$:

$$h(x) \leq ch'(x) x \log x.$$

Интегрируя это неравенство на отрезке $[e, x]$, получим

$$\log \frac{h(x)}{h(e)} \geq \frac{1}{c} \log\log x$$

или

$$h(x) \geq h(e) \log^{1/c} x.$$

Вместе с условием (4) это приводит нас к неравенству (11) с $\theta = \dfrac{1}{c} - 1$. □

Лемма 2. *Если выполнено условие (5), то*

$$\sum_{p\le x} f(p)\log p = \tau(x)x(1+o(1)). \tag{12}$$

Доказательство. Обозначая через $\varphi(x)$ левую часть равенства (5), получим

$$\sum_{p\le x} f(p)\log p = \int_1^x \log u d\varphi(u) = \varphi(x)\log x - \int_1^x \frac{\varphi(u)}{u}du.$$

Оценим последний интеграл. Ввиду условий на функцию $\tau(x)$, получим:

$$\left|\int_2^x \frac{\varphi(u)}{u}du\right| \le C_1\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u} + C_2\int_{\sqrt{x}}^x \frac{|\tau(x)|}{\log u}du = o(|\tau(x)|x).$$

Теперь утверждение леммы следует из условия (5) и леммы 1. □

Лемма 3. *Если функция $f(n)$ экспоненциально мультипликативна, то для асимптотики при $x\to\infty$*

$$\sum_{p\le x} \frac{|f(p)|\log p}{p} \sim \tau(x)\log x$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\delta\in(0,1)$ выполнялась асимптотика

$$\sum_{x^\delta<n\le x} \frac{|f(n)|}{n} \sim m(|f|,x)\tau(x)\log\frac{1}{\delta}.$$

Эта лемма следует из теоремы 3 работы [6].

Доказательство теоремы. Прежде всего, установим, что теорему достаточно доказать для экспоненциально мультипликативной функции.

Пусть $g(n)$ — экспоненциально мультипликативна и $g(p)=f(p)$. Допустим, что для нее верна теорема. Определим функцию $h(n)$ равенством

$$f(n) = \sum_{d|n} h(d)g\left(\frac{n}{d}\right). \tag{13}$$

Функция $h(n)$ мультипликативна и для нее существует такое число ε, $0<\varepsilon<1/2$, что

$$M(|h|,x)=\sum_{n\le x}|h(n)|=O(x^{1-\varepsilon}),\tag{14}$$

см. [7, с. 166]. Для функции $g(n)$ справдлива асимптотика

$$M(g,x)=\frac{\tau(x)x}{\log x}m(g,x)+R(x),\tag{15}$$

где через $R(x)$ обозначен остаточный член, а именно

$$R(x)=o\left(\frac{\tau(x)x}{\log x}m(|g|,x)\right).$$

Тогда для функции $f(n)$ из формулы (13) получим:

$$M(f,x)=\sum_{n\le x}h(n)M\left(g,\frac{x}{n}\right).$$

Выберем $\delta\in(0,1)$ и разобьем последнюю сумму на две:

$$M(f,x)=\left(\sum_{n\le x^\delta}+\sum_{x^\delta<n\le x}\right)h(n)M\left(g,\frac{x}{n}\right)=S_1+S_2.$$

Для суммы S_1 используем равенство (15):

$$S_1=\sum_{n\le x^\delta}\frac{h(n)}{n}\left(\frac{\tau\left(\frac{x}{n}\right)xm\left(g,\frac{x}{n}\right)}{\log\frac{x}{n}}+R\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

Если $n\le x^\delta$, то $x^{1-\delta}\le\dfrac{x}{n}\le x$. Поэтому для $\tau(x)$ можно воспользоваться свойством (3):

$$\tau\left(\frac{x}{n}\right)=\tau(x)+o(|\tau(x)|).$$

Кроме того, на этом же промежутке

$$\left(\log\frac{x}{n}\right)^{-1}=\frac{1}{\log x}+O\left(\frac{\log n}{\log^2 x}\right).$$

Из равенства (14) следует, что

$$\sum_{n\le x}\frac{|h(n)|\log n}{n}=O(1). \tag{16}$$

Действительно,

$$\sum_{n\le x}\frac{|h(n)|\log n}{n}=\int\limits_{1-}^{x}\frac{\log u}{u}dM(|h|,u)=M(|h|,x)\frac{\log x}{x}+$$

$$+\int\limits_{1}^{x}M(|h|,u)d\frac{\log u}{u}=O\left(\frac{\log x}{x^{\varepsilon}}+\int\limits_{1}^{x}\frac{log u}{u^{1+\varepsilon}}du\right)=O(1).$$

Для $m(g,x^{\delta})$ используем лемму (3). Так как по предположению функция g удовлетворяет условиям теоремы, для нее выполнено условие (6). Тогда из леммы (3) получаем:

$$m\left(g,\frac{x}{n}\right)=m(g,x)+m\left(g,\frac{x}{n}\right)-m(g,x))=m(g,x)+O(m(|g|,x)|\tau(x)|).$$

Итак, для $n\le x^{\delta}$, учитывая, что на основание леммы (1) $\log^{-1}x=o(|\tau(x)|)$, имеем:

$$\frac{\tau\left(\frac{x}{n}\right)m\left(g,\frac{x}{n}\right)}{\log\frac{x}{n}}=(\tau(x)+o(|\tau(x)|)(m(g,x)+$$

$$+O(|\tau(x)|m(|g|,x))\frac{1}{\log x}\left(1+O\left(\frac{\log n}{\log x}\right)\right)=$$

$$=\frac{\tau(x)m(g,x)}{\log x}+o\left(\frac{\tau(x)m(|g|,x)}{\log x}\right).$$

Подставим эту оценку в сумму S_1:

$$S_1=\left(\frac{x\tau(x)m(g,x)}{\log x}+o\left(\frac{x\tau(x)m(|g|,x)}{\log x}\right)\right)m(h,x^{\delta})+\sum_{n\le x^{\delta}}\frac{h(n)}{n}R\left(\frac{x}{n}\right).$$

Из оценки (16) следует, что ряд с членами $h(n)/n$ абсолютно сходитс Поэтому $m(h,x^{\delta})\sim m(h,x)$. А сумма

$$\sum_{n\le x^{\delta}}\frac{h(n)}{n}R\left(\frac{x}{n}\right)$$

оценивается аналогично и представляет собой

$$o\left(\frac{x\tau(x)m(|g|,x)m(|h|,x)}{\log x}\right).$$

Учитывая все сказанное окончательно получаем асимптотику суммы S_1:

$$S_1 = \frac{x\tau(x)m(g,x)m(h,x)}{\log x} + o\left(\frac{x\tau(x)m(|g|,x)m(|h|,x)}{\log x}\right).$$

Перейдем к оценке суммы S_2:

$$S_2 = \sum_{x^\delta < n \le x} h(n)M\left(g,\frac{x}{n}\right).$$

Для суммы $M(g,x)$ используем оценку сверху, которая следует из утверждения теоремы, справедливой по предположению для функции $g(n)$:

$$M(g,x) = O\left(\frac{x|\tau(x)|m(|g|,x)}{\log x}\right).$$

Тогда с некоторой постоянной C_3 будем иметь:

$$|S_2| \le C_3 x m(|g|,x) \sum_{x^\delta < n \le x} \frac{|h(n)|}{n}.$$

Используем формулу (14) для оценки последней суммы:

$$\sum_{x^\delta < n \le x} \frac{|h(n)|}{n} = \int\limits_{x^\delta}^{x} \frac{dM(|h|,u}{u} \le \frac{M(|h|,x)}{x} + \int\limits_{x^\delta}^{x} \frac{O(x^{1-\varepsilon}dt}{u^2} =$$

$$= O\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right) + \int\limits_{x^\delta}^{x} \frac{O(1)du}{u^{1+\varepsilon}} = O\left(\frac{1}{x^{\varepsilon\delta}}\right).$$

Итак, получена оценка $S_2 = O\left(\frac{m(|g|,x)x^{1-\varepsilon\delta}}{\log x}\right)$. Ввиду леммы (1) и сходимости ряда с членами $|h(n)|/n$, можно утверждать, что

$$S_2 = o\left(\frac{x|\tau(x)m(|g|,x)m(|h|,x)}{\log x}\right).$$

Для функции $f(n)$, сложив S_1 и S_2, получим:

$$M(f,x) = \frac{x\tau(x)m(g,x)m(h,x)}{\log x} + o\left(\frac{x\tau(x)m(|g|,x)m(|h|,x)}{\log x}\right).$$

Теперь докажем, что

$$m(g,x)\cdot m(h,x) = m(f,x) + o(m(|f|,x)).$$

Для этого воспользуемся равенством (13):

$$m(f,x) = \sum_{n\le x}\frac{h(n)}{n}m\left(g,\frac{x}{n}\right).$$

Опять разобьем внешнюю сумму в правой части на две: по $n \le \sqrt{x}$ и по $\sqrt{x} < n \le x$. Тогда в первой сумме, как и прежде, по лемме 3 имеем:

$$m\left(g,\frac{x}{n}\right) = m(g,x) + O(|\tau(x)|m(|g|,x)).$$

Кроме того, учтем, что $m(h,\sqrt{x}) \sim m(h,x)$. Тогда получим:

$$m(f,x) = m(h,x)m(g,x) + O(|\tau(x)|m(|g|,x)) + \sum_{\sqrt{x}<n\le x}\frac{h(n)}{n}\sum_{m\le x/n}\frac{g(m)}{m}.$$

Так как $\left|m\left(g,\frac{x}{n}\right)\right| \le m(|g|,x)$, а $m(h,x) - m(h\sqrt{x}) = O(x^{-\varepsilon/2})$, то

$$m(f,x) = m(g,x)m(h,x) + o(m(|g|,x)m(|h|,x)).$$

Осталось лишь убедиться, что $m(|g|,x)m(|h|,x) \sim m(|f|,x)$. Так как здесь участвуют неотрицательные мультипликативные функции, то можно воспользоваться асимптотическими равенствами

$$m(|g|,x) \sim \Pi(|g|,x), \quad m(|h|,x) \sim \Pi(|h|,x)$$

(см., например, [7, лемма 7, с. 162]). Тогда, исходя из определения функций g и h, получим:

$$\Pi(|g|,x)\cdot\Pi(|h|,x) = \Pi(|f|,x) \sim m(|f|,x).$$

Таким образом, мы убедились, что теорему достаточно доказать лишь для экспоненциально мультипликативной функции f.

Запишем основное соотношение, исходя из равенства (2):

$$l(x) = \sum_{m \le x} f(m) \sum_{p \le \frac{x}{m}} f(p) \log p.$$

Выберем произвольно $\delta \in (0, 1)$ и разобьем сумму по m на две части: S_1, в которой $m \le x^\delta$, и S_2, в которой $x^\delta < m \le x$. В сумме S_1 $\dfrac{x}{m} \ge x^{1-\delta}$, поэтому можно применить лемму 2:

$$S_1 \sim x \sum_{m \le x^\delta} \frac{f(m)}{m} \tau\left(\frac{x}{m}\right) = x \sum_{m \le x^\delta} \frac{f(m)}{m} (\tau(x) + o(|\tau(x)|)).$$

Учитывая лемму 3, получим:

$$S_1 = x\tau(x)m(f, x) + O\left(x|\tau(x)|m(|f|, x) \log \frac{1}{\delta}\right).$$

Так как δ можно выбрать сколь угодно близко к 1, то отсюда следует, что

$$S_1 = x\tau(x)m(f, x) + o(x|\tau(x)|m(|f|, x)).$$

Сумму S_2 оценим сверху, применя неравенство

$$|\sum_{p \le \frac{x}{m}} f(p) \log p| \le C_4 \frac{x}{m}.$$

Тогда, используя лемму 3, получим:

$$|S_2| \le C_4 \sum_{x^\delta < m \le x} \frac{|f(m)|}{m} \le x|\tau(x)|m(|f|, x) \log \frac{1}{\delta} = o(x|\tau(x)|m(|f|, x)).$$

Таким образом, установлено, что

$$l(x) = x\tau(x)m(f, x) + o(x|\tau(x)|m(|f|, x)). \tag{17}$$

Далее,

$$M(f, x) = 1 + \int_{2-}^{x} \frac{dl(u)}{\log} u = \frac{l(x)}{\log x} + O\left(\int_{2}^{x} \frac{du}{\log^2 u}\right). \tag{18}$$

Ввиду леммы 1
$$\int_2^x \frac{du}{\log^2 u} = o\left(\frac{x|\tau(x)|}{\log x}\right).$$
Отсюда и из формул (17) и (18) уже следует утверждение теоремы. Доказательство закончено.

Résumé

The asimptotic behavior of the sum of multiplicative function values with zero mean on prime numbers is given in this state.

Список литературы

[1] Галеева А. В. *Суммирование некоторых комплексных мультипликативных функций* / А. В. Галеева, Б. М. Широков // Межвуз. сб. Аналитическая теория чисел. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 1986. С. 11–23.

[2] Левин Б. В. *Суммы мультипликативных функций* / Б. В. Левин, Н. М. Тимофеев // Studia Sci. Math. Hung. 1983. V. 18. P. 21–41.

[3] Wirsing E. *Das Asiptotsche Verhalten von Summen über multiplicative Funktionen. II* / E. Wirsing // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1967. V. 18. No. 3–4. P. 411–467.

[4] Левин Б. В. *Мультипликативные функции и вероятностная теория чисел* / Б. В. Левин, А. С. Файнлейб // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1970. Т. 34. № 5. С. 1064–1109.

[5] Постников А. Г. *Введение в аналитическую теорию чисел* / А. Г. Постников. М.: Наука, 1971.

[6] Широков Б. М. *Тауберовы теоремы и их применение к суммам мультипликативных функций* / Б. М. Широков // Межвуз. сб. Аналитическая теория чисел. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 1988. С. 95–104.

[7] Широков Б. М. *Суммирование мультипликативных функций* / Б. М. Широков // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 106. С. 158–169.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: shirokov@petrsu.ru