**Труды Петрозаводского государственного университета**
Серия "Математика" Выпуск 18, 2011

УДК 517.544

К. А. Быстрова

# ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В первой части статьи доказывается аналог теоремы Каратеодори о граничном соответствии в случае конечносвязной области. Вторая часть посвящена доказательству аналога теоремы Плеснера (о структуре предельных множеств граничных точек) для круговой конечносвязной области.

## Введение

В 1912 году К. Каратеодори доказал, что при однолистном конформном отображении односвязной области $G$ на единичный круг $\{|z| < 1\}$ между точками окружности $\{|z| = 1\}$ и простыми концами области $G$ существует взаимно однозначное соответствие. А. П. Кармазин в [1] упоминает о том, что подобный результат имеет место и в случае многосвязных областей, но при этом доказательств не приводится. Первая часть этой статьи посвящена обобщению теоремы Каратеодори на случай конечносвязной области.

Точками Фату для мероморфной в круге $\{|z| < 1\}$ функции $f(z)$ называются точки $\zeta \in \{|z| = 1\}$, в которых $f(z)$ имеет угловые пределы. Точками Плеснера функции $f(z)$ называются такие точки $\zeta \in \{|z| = 1\}$, в которых предельное множество по любому углу с вершиной в точке $\zeta$ совпадает с расширенной комплексной плоскостью. В 1927 году А. И. Плеснер доказал, что для любой мероморфной функции $f$ в единичном круге $\{|z| < 1\}$ множество точек окружности $\{|z| = 1\}$, которые не являются точками Фату и не являются точками Плеснера, имеет меру нуль. Во второй части данной статьи доказан аналог этой теоремы для круговых $n$-связных областей.

## § 1. Принцип соответствия границ для конечносвязных областей

Определение 1. *Открытая кривая Жордана $C$ называется поперечным разрезом области $G$ (область $G$ — конечносвязная), если*

1) $C \subset G$;
2) $\overline{C} = C \cup \{a, b\}$, *где $a$ и $b$ принадлежат одной из граничных компонент области $G$.*

По аналогии с [2] (см. также [3]) в последующих определениях 2–5 введем понятие простого конца конечносвязной области.

Определение 2. *Последовательность Жордановых дуг $(c_n)_0^\infty$ называется цепью разрезов области $G$, если*

1) $c_n$ — *поперечный разрез области $G$ $(n = 0, 1, \ldots)$;*
2) $\overline{c}_n \cap \overline{c}_{n+1} = \emptyset$ $(n = 0, 1, \ldots)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}(c_n) = 0$;
4) $c_n$ *разделяет $c_0$ и $c_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (то есть $c_0$ и $c_{n+1}$ лежат в разных областях множества $G \backslash c_n$).*

Определение 3. *Две цепи разрезов $(c_n)$ и $(c'_n)$ называются эквивалентными, если для достаточно большого $n$ существует такое $m$, что $c_n$ будет разделять $c'_0$ и $c'_m$. Это же свойство должно быть выполнено, если $c_n$ и $c'_n$ поменять местами.*

Введенное в определении 3 понятие эквивалентных цепей порождает отношение эквивалентности на множестве всех цепей области $G$. Таким образом, множество всех цепей разрезов $G$ разобьем на классы эквивалентности.

Определение 4. *Простым концом области $G$ называется класс эквивалентных цепей.*

Пусть $p$ — простой конец области $G$. Выберем $(c_n)_0^\infty \in p$ — последовательность разрезов, определяющих простой конец. Построим множества $V_n$. Каждый разрез $c_n$ делит $G$ на две подобласти. Обозначим $V_n$ ту область из $G \backslash c_n$, которая не содержит $c_0$. Из определения 2 п. 4 вытекает, что $V_{n+1} \subset V_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Определение 5. *Множество*

$$I(p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n$$

*называют носителем простого конца* $p$.

Каратеодори был доказан следующий принцип соответствия границ ([3, гл. 2, § 3], см. также [2, гл. 2, п. 2.4]).

Теорема A **(Принцип соответствия границ)**. *При однолистном конформном отображении односвязной области* $B$ *на единичный круг* $\Delta = \{\zeta \,|\, |\zeta| < 1\}$ *между точками окружности* $|\zeta| = 1$ *и простыми концами области* $B$ *существует взаимно однозначное соответствие.*

При этом из доказательства теоремы A вытекает следующее

Замечание 1. Для любой фиксированной точки $\zeta \in \partial\Delta$ соответствующий ей простой конец области $B$ определяется цепью разрезов, состоящей из образов дуг концентрических окружностей, лежащих в $\Delta$, с центром в точке $\zeta$ и радиусами $r_n \to 0$.

Область, ограниченная конечным или бесконечным числом полных окружностей без общих точек, некоторые из которых могут вырождаться в точки, называется *круговой областью* (см. [3]).

Для конечносвязных областей справедлив следующий аналог теоремы Римана, доказанный в книге [3].

Теорема B. *Существует функция, однолистно отображающая данную конечносвязную область* $G$ *плоскости* $z$*, содержащую* $\infty$*, на круговую область плоскости* $\zeta$*, также содержащую* $\infty$*, и притом так, что в окрестности точки* $z = \infty$ *она имеет разложение* $\Psi(z) = z + \dfrac{\alpha_1}{z} + \ldots$.

В силу теоремы B естественно возникает вопрос: будет ли справедлив для конечносвязных областей аналог теоремы A. Ответом на него является следующая

Теорема 1. *Если* $f$ *регулярно и однолистно отображает некоторую* $n$*-связную область* $G$ *на круговую* $n$*-связную область* $H$*, то существует взаимно однозначное соответствие между точками границы области* $H$ *и простыми концами области* $G$.

Доказательство. Достаточно считать, что $G$ и $H$ содержат $\infty$, в противном случае подействуем на области соответствующими дробно-линейными преобразованиями.

Можно считать, что все граничные компоненты области $G$ являются невырожденными. Действительно, пусть $K$ — одна из граничных компонент области $G$. Если $K$ вырождена, то $K = \{a\}$ — изолированная граничная точка области $H$. Отсюда следует, что $a$ — изолированная особая точка функции $f$. $K = \{a\}$ не может быть полюсом, так как $\infty \in G$. $K = \{a\}$ не является существенно особой точкой, так как это противоречит теореме Пикара. Следовательно, $K = \{a\}$ — устранимая особая точка. После устранения особенности во всех таких вырожденных граничных компонентах области $G$ функция $f$ будет регулярной и однолистной в некоторой области, содержащей область $G$. Таким образом, изначально можем считать, что область $G$ из условия теоремы 1 не имеет вырожденных изолированных граничных компонент.

Обозначим $K_1, \ldots, K_n$ — граничные компоненты области $G$, а $L_1, \ldots, L_n$ — граничные компоненты области $G$. Рассмотрим односвязную область $G^1$, которая содержит $G$ и $\partial G^1 = K_1$. Достаточно показать, что между простыми концами области $G^1$ и точками окружности существует взаимно однозначное соответствие.

Пусть $p$ — простой конец области $G^1$. Выберем последовательность разрезов $(c_n)_0^\infty \in p$, определяющих простой конец $p$. Возможно, что $(c_n)$ пересекает одну из граничных компонент области $G$. Тогда будем рассматривать эту цепь разрезов, начиная с достаточно большого номера $N$.

Так как $G^1$ — односвязная область, то по теореме Римана мы можем отобразить ее регулярно и однолистно на внешность круга. Затем, применяя теорему A, мы получим, что существует взаимно однозначное соответствие между точками окружности и простыми концами области $G^1$. Поскольку аналогичные рассуждения верны для каждой из компонент $K_2, \ldots, K_n$ (а соответствующие односвязные области для них обозначим $G^2, \ldots, G^n$), то тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между простыми концами области $G$ и точками $\bigcup\limits_{j=1}^{n} L_j$.

Теорема доказана. $\square$

Из замечания 1 и доказательства теоремы 1 вытекает следующий способ соответствия между простыми концами $n$-связной области и граничными точками соответствующей круговой области $H$: пусть $f$ регулярно и однолистно отображает круговую $n$-связную область $H$ на некоторую $n$-связную область $G$. Выберем произвольную точку $\zeta$ на границе области $H$ и зафиксируем ее. Рассмотрим семейство окружностей $C_n = \{|z - \zeta| = r_n\}$, которые стягиваются к точке $\zeta$ при $n \to \infty$. Образы $f(C_n \cap H)$ составляют цепь разрезов, которая определяет простой конец, соответствующий точке $\zeta$.

## § 2. Теорема Плеснера для круговых конечносвязных областей

По аналогии с [4] введем следующие понятия.

Определение 6. *Пусть $f$ определена в области $D$, где $D$ — область, ограниченная конечным числом гладких кривых, $E \subset D$, $\zeta \in \overline{E}$. Если существует такая последовательность $z_n \in E$, что $z_n \to \zeta$ и $f(z_n) \to \omega \in \overline{\mathbb{C}}$, то $\omega$ называется предельным значением функции $f$ в точке $\zeta$ по множеству $E$. Множество всех таких предельных значений называется предельным множеством функции $f$ в точке $\zeta$ по множеству $E$ и обозначается $C(f, \zeta, E)$.*

Замечание 2. Если в определении 6 множество $E$ — угловая область $W(\zeta)$, то есть область, ограниченная двумя лучами, исходящими из точки $\zeta$ и дугой окружности $|z - \zeta| = \rho$ при некотором $\rho > 0$, а $C(f, \zeta, E)$ состоит из единственной точки $a$, то предельное значение функции $f$ называется угловым пределом по углу $W(\zeta)$.

Определение 7. *Будем говорить, что $f$ имеет угловой предел (угловое значение) $a \in \mathbb{C}$ в точке $\zeta \in \partial D$, если $\lim\limits_{W(\zeta)\ni z \to \zeta} f(z) = a$ для любой угловой области $W(\zeta) \subset D$ с вершиной в точке $\zeta$.*

В случае, когда $D$ — круг $\Delta$, известна следующая теорема из [5].

Теорема C (**Плеснер**). *Если функция $f(z)$ мероморфна в единичном круге, то окружность может быть разбита на три множества $E_1$, $E_2$, $E_3$, такие, что*

1) *$\mu E_3 = 0$;*
2) *на множестве $E_1$ функция $f(z)$ имеет конечные угловые значения;*

3) *для любой угловой области* $W(z_0) \subset \Delta$ *с вершиной в точке* $z_0 \in E_2$ $C(f, z_0, W(z_0)) \equiv \overline{\mathbb{C}}$.

В [6] показано, что можно построить аналитическую функцию в $|z| < 1$, для которой множество всех точек Плеснера плотно на $|z| = 1$ и имеет меру $0 \le m \le 2\pi$.

Следующая теорема 2 является обобщением теоремы С в случае конечносвязной круговой области.

Теорема 2. *Если функция* $f(z)$ *мероморфна в круговой* $n$*-связной области* $H$*, то граница области* $H$ *может быть разбита на три множества* $E_1^*$, $E_2^*$, $E_3^*$*, обладающих следующими свойствами:*

1) $\mu E_3^* = 0$;
2) *на множестве* $E_1^*$ *функция* $f(z)$ *имеет конечные угловые граничные значения;*
3) *для любой угловой области* $W(z_0) \subset H$ *с вершиной в точке* $z_0 \in E_2^*$ $C(f, z_0, W(z_0)) \equiv \overline{\mathbb{C}}$.

*Точки из* $E_1^*$ *называются точками Фату, а точки из* $E_2^*$ *— точками Плеснера функции* $f$.

Доказательство. Пусть $H$ — $n$-связная круговая область, содержащая точку $\infty$. Выберем одну из граничных окружностей $\gamma$ области $H$. Построим замкнутую кривую Жордана $\Gamma$, лежащую в $H$ за исключением своих концов $a = b \in \gamma$, такую, что $\Gamma \cup \gamma$ является границей односвязной области $H_1 \subset H$. По теореме Римана существует функция $w = \Psi(z)$, регулярно и однолистно отображающая $H_1$ на круг $\Delta$. По теореме Каратеодори (см., например, [7]) это отображение можно гомеоморфно продолжить на границу области $H_1$, при этом $\Gamma$ перейдет в некоторую дугу $L \subset \partial\Delta$, а $\gamma$ — в остальную часть $l \subset \partial\Delta$.

Пусть $z = h(w)$ — функция, обратная к $w = \Psi(z)$. Рассмотрим $\varphi(w) = f[h(w)]$ — мероморфную в круге $\Delta$ функцию. Тогда по теореме Плеснера граница круга $\Delta$ может быть разбита на три множества $E_1$, $E_2$, $E_3$ с указанными в теореме С свойствами.

По принципу симметрии Шварца аналитически продолжим функцию $\Psi$ в область, симметричную относительно $\gamma$. Полученная в результате продолжения функция $\Psi(z)$ является конформной во всех точках дуги $\gamma$, за исключением точек $a = b$ (аналитически продолженные отображения $\Psi(z)$ и $h(w)$ обозначим также). При этом функция

$h(w)$ будет конформна в некоторой области $\Omega$, симметричной относительно $l$, $\Omega \supset l$.

Докажем, что $\gamma$ можно разбить на множества $E_1^*$, $E_2^*$, $E_3^*$, где $E_1^*$ — множество точек Фату функции $f(z)$, $E_2^*$ — множество точек Плеснера этой же функции и $\mu E_3^* = 0$.

Обозначим $l_0 = \operatorname{int} l$, $E_1' = E_1 \cap l_0$, $E_2' = E_2 \cap l_0$, $E_3' = E_3 \cap l_0$. Эти множества $E_1', E_2', E_3'$ обладают теми же свойствами, что и $E_1, E_2, E_3$, как их соответствующие подмножества. Пусть $E_1^* = h(E_1'), E_2^* = h(E_2'), E_3^* = h(E_3') \cup \{a\}$. Тогда $E_1^* \cup E_2^* \cup E_3^* = \gamma$, $E_1^*, E_2^*, E_3^*$ — дизъюнктны.

Фиксируем точку $\zeta' \in E_1^*$. Обозначим $\zeta = \Psi(\zeta')$. Возьмем произвольную угловую область $V_\alpha$ раствора $\alpha$ с вершиной в точке $\zeta'$ из $H_1$. При отображении $\Psi(z)$ стороны угла $V_\alpha$ перейдут в гладкие кривые, исходящие из точки $\zeta$, ограничивающие «криволинейный» угол $\widetilde{W}_\alpha$. Из конформности отображения $\Psi(z)$ в $\gamma \backslash a$ следует, что для любого $\epsilon$, $0 < \epsilon < \pi - \alpha$, существует угловая область раствора $\alpha + \epsilon$ $W_{\alpha+\epsilon} \subset \Delta$ с вершиной в точке $\zeta$, которая содержит $\widetilde{W}_\alpha$, если $\operatorname{diam}\widetilde{W}_\alpha$ достаточно мал. Поскольку точка $\zeta$ является точкой Фату функции $\varphi(w)$, то существует конечный $\lim\limits_{W_{\alpha+\epsilon} \ni w \to \zeta} \varphi(w) = \lim\limits_{\widetilde{W}_\alpha \ni w \to \zeta} f[h(w)] = \lim\limits_{V_\alpha \ni z \to \zeta'} f(z)$. Следовательно, точка $\zeta'$ является точкой Фату функции $f(z)$. Тем самым доказано, что $E_1^*$ — множество точек Фату функции $f(z)$.

Пусть точка $\lambda' \in E_2^*$. Обозначим $\lambda = \Psi(\lambda')$. Возьмем произвольную угловую область $V_\alpha$ раствора $\alpha$ с вершиной в точке $\lambda'$ из $H_1$. Как и в случае точек Фату, обозначим угол $\widetilde{W}_\alpha = \Psi(V_\alpha)$. Снова из конформности $\Psi(z)$ для любого $\epsilon$, $0 < \epsilon < \alpha$, существует угловая область достаточно малого диаметра $W_{\alpha-\epsilon} \subset \Delta$ с вершиной в точке $\lambda$, которая содержится в $\widetilde{W}_\alpha$. Поскольку $\lambda$ — точка Плеснера, то $C(\varphi, \lambda, W_{\alpha-\epsilon}) \equiv \overline{\mathbb{C}}$, поэтому $C(\varphi, \lambda, \widetilde{W}_\alpha) \equiv \overline{\mathbb{C}}$, то есть для любого $t \in \overline{\mathbb{C}}$ существует последовательность $w_n \to \lambda$, $w_n \in \widetilde{W}_\alpha$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(w_n) = t$. Обозначим $z_n = h(w_n) \in V_\alpha$, $z_n \to \lambda'$ из непрерывности $h$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f[h(w_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(w_n) = t$. Следовательно, предельное множество функции $f$ в точке $\lambda'$ $C(f, \lambda', V_\alpha) \equiv \overline{\mathbb{C}}$, то есть $\lambda'$ является точкой Плеснера функции $f(z)$, таким образом, $E_2^*$ состоит только из точек Плеснера.

Покажем, что $\mu E_3^* = 0$. Действительно, $h(w)$ — гладкое отображение и $J_h(w) = |h'(w)|^2 \neq 0$ на $l$ ($h$ — конформно в $\Omega$), $\mu E_3' = 0$. Для таких отображений в $\mathbb{C}$ite[с. 77]akilov доказано, что множество нулевой меры переходит в множество нулевой меры. Поэтому $\mu E_3^* = 0$.

Это завершает доказательство теоремы 2. □

Предложение 1. *В круговой $n$-связной области $H$ существует голоморфная функция, для которой множество точек Плеснера плотно на границе области $H$ и имеет меру $m$, $0 \le m \le L$, где $L$ — линейная мера $\partial H$.*

Доказательство. Рассмотрим единичный круг $\Delta = \{|z| < 1\}$. Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в $\Delta$, для которой множество точек Плеснера $E_2^*$ плотно на окружности и имеет меру $m$, $0 \le m \le 2\pi$ (см. $\mathbb{C}$[6]). Мера подмножества единичной окружности при преобразовании симметрии $z \to \overline{z} = 1/z$ и при сдвиге не меняется. Из определения меры следует, что при растяжении $\xi = rz$, $r > 0$, мера подмножества единичной окружности увеличивается в $r$ раз. Таким образом, при отображении $\zeta = r/z + a$ мера образа множества $E_2^*$, обозначим его $E_2'$, будет равна $mr$. При отображении $\zeta(z) = r/z+a$ круг $\Delta$ перейдет в $\Omega = \{|\zeta - a| > r\}$ — внешность круга. Обозначим $\varphi(\zeta) = f(r/(\zeta - a))$ — функцию, голоморфную в $\Omega$. Пусть $\lambda' \in E_2'$. Обозначим $\lambda = r/(\lambda' - a)$. Далее, по аналогии с тем, что сделано в доказательстве теоремы 2, получим, что $\lambda'$ — точка Плеснера функции $\varphi(\zeta)$ (остальные точки на $\partial\Omega$, за исключением множества меры нуль, будут точками Фату). Поскольку при отображении $\zeta(z)$ плотное множество на единичной окружности переходит в плотное множество на $\partial\Omega$, то для рассматриваемой функции $\varphi(\zeta)$ в $\Omega$ множество точек Плеснера будет плотно на $\partial\Omega$.

Пусть $H$ — круговая $n$-связная область. Обозначим $a_k$ — центры граничных окружностей области $H$, а $r_k$ — соответствующие им радиусы, $k = 1, \ldots, n$. В предыдущих рассуждениях заменим $a$, $r$, $\varphi$ на $a_k$, $r_k$, $\varphi_k$ соответственно и $E_2'$ на $E_2^{(k)}$. Тогда $E_2^{(k)}$ является множеством точек Плеснера функции $\varphi_k(\zeta)$ и $\mu E_2^{(k)} = mr_k$. Обозначим

$$\mathcal{E}_2' = \bigcup_{k=1}^{n} E_2^{(k)}.$$

Из определения $E_2^{(k)}$ следует, что множество $\mathcal{E}_2'$ является плотным на границе области $H$. Поскольку $\mu E_2^{(k)} = mr_k$, то

$$\mu\mathcal{E}_2' = m\sum_{k=1}^{n} r_k.$$

Покажем, что $\mathcal{E}_2'$ состоит только из точек Плеснера голоморфной в $H$ функции

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\zeta).$$

Пусть $\lambda' \in \mathcal{E}_2'$, тогда $\lambda' \in E_2^{(k)}$ для некоторого $k$. Поскольку $E_2^{(k)}$ состоит только из точек Плеснера, то $\lambda'$ является точкой Плеснера функции $\varphi_k(\zeta)$, то есть для любого $t \in \overline{\mathbb{C}}$ существует последовательность $\zeta_n \to \lambda'$, $\zeta_n \in W_\alpha$, $W_\alpha$ — угол раствора $\alpha$ с вершиной в точке $\lambda'$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_k(\zeta_n) = t$. Рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\zeta_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\zeta_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_k(\zeta_n) + \lim_{n\to\infty} (\varphi_1(\zeta_n) + \ldots +$$
$$\varphi_{k-1}(\zeta_n) + \varphi_{k+1}(\zeta_n) + \ldots + \varphi_n(\zeta_n)) = t + \varphi_1(\lambda') + \ldots + \varphi_{k-1}(\lambda') +$$
$$+\varphi_{k+1}(\lambda') + \ldots + \varphi_n(\lambda') = t + A,$$

где $A$ — константа, зависящая от $\lambda'$. Если $t \in \overline{\mathbb{C}}$, то $t + A$ пробегает $\overline{\mathbb{C}}$. Таким образом, $\lambda'$ является точкой Плеснера функции $\Phi(\zeta)$ и $\mathcal{E}_2'$ состоит только из точек Плеснера функции $\Phi(\zeta)$ (остальные точки $\partial H$, за исключением множества меры нуль, являются точками Фату). $\square$

## Résumé

It is proved analog of the Caratheodory's theorem about boundary conformity in a case finitely connected domain in the first part. The second part is devoted to the proof of the Plesner's theorem for circular finitely connected domain.

## Список литературы

[1] Кармазин А. П. *Квазиизометрии, теория предконцов и метрические структуры пространственных областей. Применения теории предконцов.* Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.

[2] Pommerenke Ch. *Boundary Behaviour of Conformal Maps* // Grundlehren Math. Wiss. V. 299. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[3] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1966.

[4] Коллингвуд Э., Ловатер Л. *Теория предельных множеств.* М.: Мир, 1973.

[5] Привалов И. И. *Граничные свойства аналитических функций.* 2-е изд. М.; Л.: Изд-во технико-теоретической лит-ры, 1950.

[6] Piranian G., Lappan P. *Holomorphic functions with dense sets of Plessner points* // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 21. No 3. P. 555–556.

[7] Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ.* М.: Наука, 1969.

[8] Акилов Г. П., Макаров Б. М., Хавин В. П. *Элементарное введение в теорию интеграла.* Л.: Букинист, 1969.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: bystrova_ks@mail.ru