**Труды Петрозаводского государственного университета**
Серия "Математика" Выпуск 18, 2011

УДК 517

Ф. А. Шамоян

# О ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРАХ В ВЕСОВЫХ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИДИСКЕ ФУНКЦИЙ

В статье получена полная характеризация тех символов, при которых соответствующие Теплицевые операторы действуют ограниченно в Соболевских пространствах голоморфных в полидиске функций.

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, 2, \ldots, n\}$ — единичный полидиск в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{T}^n$ — его остов, $H(U^n)$ — множество всех голоморфных в $U^n$ функций. Пусть далее $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n_+$, обозначим через $D^\beta$ оператор дробного дифференцирования в $H(U^n)$, $D^{-\beta}$ — его обратный (см. [1]), $LR$ — граничные значения плюригармонических функций из класса Харди $h^1(U^n)$ на торе $\mathbb{T}^n$. Если $h \in L^1(\mathbb{T}^n)$, то оператором Теплица на подпространстве $X \subset H(U^n)$ называется оператор вида

$$T_h(f)(z) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{f(\zeta)h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in U^n.$$

Такие операторы возникают во многих вопросах комплексного и функционального анализа (см. [2], [3]). Если $0 < p < +\infty$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, то

$$A^p_\alpha(m) :=$$
$$\left\{ f \in H(U^n) : \|f\|_{A^p_\alpha(m)} = \left( \int\limits_{U_n} |D^m f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|)^\alpha dm_{2n}(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

$$\Lambda^p_\alpha := \left\{ f \in H(U^n) : |D^\beta f(z)| \le \frac{c_f}{(1 - |z|)^{\beta + 1 - \frac{\alpha+2}{p}}}, \beta > \frac{\alpha + 2}{p} - 1 \right\}.$$

В работе исследуются Теплицевы операторы в пространствах $A^p_\alpha(m)$ при $0 < p \leq 1$. Символом $B(A^p_\alpha(m)), A^p_\alpha(m))$ обозначим множество всех линейных операторов из $A^p_\alpha(m)$ в $A^p_\alpha(m)$.

Теорема. *Пусть $0 < p \leq 1$, $h \in LR$. Тогда*

1) *Если $(m_j{+}1)p < \alpha_j{+}2, j = 1, 2, \ldots, n,$ то $T_h \in B(A^p_\alpha(m)), A^p_\alpha(m)) \Leftrightarrow$ $h$ представима в виде $h = \overline{h}_1 + h_2$, где $D^{-m}h_1 \in \Lambda^p_\alpha$, $h_2$ — мультипликатор пространства $A^p_\alpha(m)$.*
2) *Если $(m_j{+}1)p > \alpha_j{+}2, j = 1, 2, \ldots, n,$ то $\mathbb{T}_h \in B(A^p_\alpha(m)), A^p_\alpha(m)) \Leftrightarrow$ $h = \overline{h}_1 + h_2$, где $h_1 \in H^\infty(U^n), h_2 \in A^p_\alpha(m)$.*
3) *Если $h \in H^1(U^n)$, то $T_h \in B(A^p_\alpha(m)), A^p_\alpha(m)) \Leftrightarrow$ $|Dh(z)| \leq \frac{c_h}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-|z_j|)(\ln\frac{1}{1-|z_j|})^{\frac{1}{p}}}, z = (z_1, \ldots, z_n) \in U^n, D := D^1.$*

Замечание. *Утверждение теоремы для случая $1 < p < +\infty$ в менее общем виде анонсировано в работе [4].*


## Résumé

A complete characterization of those symbols for which the corresponding Toeplitz operators are bounded in Sobolev spaces of holomorphic functions in the polydisk is obtained.


## Список литературы


[1] Djrbashian A., Shamoyan F. A. *Topics in theory of $A^p_\alpha$ spaces.* Leipzig: BSB, Teubner Texte zur. Math., 1988. 200 p.

[2] Nikolski N. K. *Operators, functions and systems: An easy reading.* New-York: Amer. Math. Soc., 2001.

[3] Шамоян Ф. А. *Теплицевы операторы в некоторых пространствах функций и новая характеристика класса BMOA* // Изв. АН АрмССР. 1987. Т. 22. № 2.

[4] Шамоян Ф. А., Арутюнян А. В. *Теплицевы операторы в анизотропных проостранствах голоморфных в полидиске функций* // ДАН Арм.ССР. 1990. Т. 91. № 4. С. 147–151.


Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-95717_р центр_а)