Abstract

S. U. Graf

GROWTH THEOREMS ON CLASSES OF NORMALIZED LOCALLY QUASICONFORMAL MAPPINGS

KEY WORDS: *locally quasiconformal mappings, moduli of families of curves, growth theorems.*

The asymptotic sharp growth theorems are proved in the classes of normalized locally quasiconformal automorphisms of the unit disk with the given majorant of the Laurentev's characteristic.

Let f be a locally quasiconformal automorphism of the unit disk Δ such that $f(0) = 0$ and $P_f(t) = \sup\limits_{|z|=t} p_f(z)$ where p_f is the first characteristic of M. A. Laurentev of the mapping f. In presented aticle some estimates of $|f(z)|$, $|f(z_1) - f(z_2)|/|1 - f(z_1)\overline{f(z_2)}|$ and related functionals are proved.

One of the central results claims that if $|\mu_f(z)| \le |z|$ where μ_f is a complex characteristics of f then

$$\mathbf{K}(|z|)\frac{\mathbf{K}'(|f(z)|)}{\mathbf{K}(|f(z)|)} \le \frac{\ln 1/|z|}{1+|z|}.$$

Here $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}'$ are the complete elliptic integrals of Jacobi. Inequality is asymptotically sharp when $|z| \to 0$, $|z| \to 1$. From the stated above inequality follows that

$$|f(z)| \le 4|z|^{-((1+|z|)(1-1/\pi \ln(1-|z|^2)))^{-1}} =$$

$$= 4|z| - 4|z|^2 \ln |z| + o(|z|^2 \ln |z|)$$

and the function $f_0(z) = \dfrac{4\,z}{(1+|z|)^2} = 4z - 8z^2 + \ldots$ demonstrates the sharpness of the last estimate at the origin.

From represented growth theorems follow that if the automorphism f of the Δ is quasiconformal such that $p_f(z) \le \mathbb{K}_f$ then in accordance with the classical results

$$\frac{\mathbf{K}'(a)}{\mathbf{K}(a)} \le \mathbb{K}_f \frac{\mathbf{K}'(A)}{\mathbf{K}(A)},$$

where

$$a=\left|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}\,z_2}\right|,\ A=\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{1-\overline{f(z_1)}\,f(z_2)}\right|,$$

and the following inequality is true when $|z_1-z_2|\to 0,\ |z_1|,|z_2|\not\to 1$:

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{1-\overline{f(z_1)}\,f(z_2)}\right|\le 4^{1-1/\mathbb{K}_f}\left|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}\,z_2}\right|^{1/\mathbb{K}_f}+o(|z_1-z_2|^{1/\mathbb{K}_f}).$$

This result is close to the well-known inequality of A. Mori:

$$|f(z_1)-f(z_2)|\le 16|z_1-z_2|^{1/\mathbb{K}_f}.$$

Some results of present article concern with the estimates of functionals $m_f(r)=\min\limits_{|z|=r}|f(z)|$, $M_f(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. For example it is proved that under the assumption $|\mu_f(z)|\le|z|$ the following inequalities are correct:

$$\frac{m_f(r)+M_f(r)}{1+m_f(r)M_f(r)}\le 16\frac{r}{(1+r)^2},$$

$$\frac{m_f(r)M_f(r)}{m_f(r)+M_f(r)}\ge\frac{|f'(0)|}{4}\frac{r}{(1+r)^2}.$$

Another lower estimate of $|f(z)|$ in the case $|\mu_f(z)|\le|z|$ has the form

$$\frac{|f(z)|}{|f'(0)|\,(1+|f(z)|)^2}\ge\frac{|z|}{\left(1+\sqrt{|z|}\right)^4},$$

at that $|f'(0)|\le 4$. The inequality is asymptotically sharp when $|z|\to$ $\to 0$, $|z|\to 1$ and $|f'(0)|=4$.

The main results are obtained by the means of the methods of extremal lengths, symmetrization and some new method of estimation of distortion of modules of double connected domains under the locally quasiconformal mappings.

DOI: 10.15393/j3.art.2013.2381 **Issues of Analysis.** Vol. 2(20), No. 2, 2013

УДК 517.54

С. Ю. Граф

ТЕОРЕМЫ РОСТА В КЛАССАХ НОРМИРОВАННЫХ ЛОКАЛЬНО-КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

Аннотация. В классах локально-квазиконформных нормированных автоморфизмов f единичного круга Δ с заданной мажорантой характеристики М. А. Лаврентьева получены асимптотически точные оценки $|f(z)|$, родственные классическому неравенству А. Мори [1].

Ключевые слова: *локально-квазиконформное отображение, модули семейств кривых, теоремы роста.*

2010 Mathematical Subject Classification: *30C45, 30C62, 30C75.*

1. Напомним, что модулем двусвязной области $D \subset \mathbb{C}$ называется число

$$\mathrm{Mod}(D) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)},$$

где $\lambda(\Gamma)$ — экстремальная длина семейства кривых Γ, разделяющих граничные компоненты области D. В частности, модуль концентрического кругового кольца $K(r, R)$ с радиусами r и R, $0 < r < R < \infty$, равен

$$\mathrm{Mod}(K(r, R)) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r}.$$

Среди свойств модулей двусвязных областей (см., например, [2–4]) отметим их конформную инвариантность и монотонность, понимаемую в следующем смысле: если двусвязные области D_1 и D_2 таковы, что $D_1 \subset D_2$, то $\mathrm{Mod}(D_1) \leq \mathrm{Mod}(D_2)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

Следующее свойство модулей известно как лемма Гретча [2]: если круговое концентрическое кольцо $K(r,R)=\{z : r<|z|<R\}$ разбивается системой непересекающихся замкнутых жордановых кривых γ_k, $k=\overline{1,n-1}$, разделяющих его граничные компоненты, на множество двусвязных областей D_k, $k=\overline{1,n}$, то

$$\operatorname{Mod}(K(r,R)) \geq \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Mod}(D_k), \tag{1}$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, когда γ_k представляют собой окружности $\{z : |z|=r_k\}$, $r_k\in(r,R), k=\overline{1,n-1}$.

Из классической теоремы Л. Альфорса об искажении экстремальных длин семейств кривых при квазиконформном отображении [2] следует, что модуль $\operatorname{Mod}(f(D))$ образа $f(D)$ двусвязной области D при $\mathbb{K}_f$-квазиконформном отображении f является квазиинвариантным и, в частности, удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{\mathbb{K}_f}\operatorname{Mod}(D) \leq \operatorname{Mod}(f(D)) \leq \mathbb{K}_f \operatorname{Mod}(D). \tag{2}$$

Заметим, что равенства в (2) достигаются в том случае, когда отображение f имеет постоянную по модулю комплексную характеристику $\mu_f = f_{\bar z}/f_z$, например, отображение f с точностью до композиции с конформным совпадает с аффинным преобразованием, имеющим коэффициент квазиконформности $\mathbb{K}_f$. Оценки (2) очевидно неприменимы к отображениям, квазиконформным в среднем или локально-квазиконформным.

В 2009 г. автором данной работы был предложен вариант обобщения неравенства Альфорса (2) на случай локально-квазиконформных отображений круговых колец и двусвязных областей, а также совместно с Р. О. Эйланголи получены некоторые следствия из указанного обобщения [5].

Теорема 1. *Пусть f — локально-квазиконформное отображение кругового кольца $\{z : r<|z|<R\}$, $0<r<R<\infty$, на двусвязную область $D\subset\mathbb{C}$ с первой характеристикой Лаврентьева $p_f(z) = (|f_z(z)|+|f_{\bar z}(z)|)/(|f_z(z)|-|f_{\bar z}(z)|)$. Пусть $P_f(r)=\operatorname*{ess\,sup}_{|z|=r} p_f(z)$. Если существуют интегралы*

$$\int_r^R 1/(P_f(t)\cdot t)\,dt, \quad \int_r^R P_f(t)/t\,dt,$$

то модуль области D удовлетворяет соотношениям

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_r^R \frac{1}{P_f(t)}\frac{dt}{t} \le \mathrm{Mod}(D) \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_r^R P_f(t)\frac{dt}{t}. \qquad (3)$$

Оценки точны. Равенства достигаются, если $p_f(z) = P_f(r)$ п. в. на окружностях $\{z : |z| = r\}$.

Доказательство. Пусть локально-квазиконформное отображение f кругового кольца $K(r,R)$ удовлетворяет условиям теоремы и интегралы $\int\limits_r^R P_f^{-1}(t)\frac{dt}{t}$, $\int\limits_r^R P_f(t)\frac{dt}{t}$ определены, причем первый из них для упрощения доказательства без ограничения общности понимается как интеграл Римана.

а) Доказательство верхней оценки в (3) опускается, поскольку данное неравенство может быть получено в качестве следствия из леммы П. П. Белинского [6], адаптированной к случаю локально квазиконформных отображений, либо доказано непосредственно с использованием известного (см., например, [2]) метода экстремальных длин семейств кривых.

б) Для получения нижней оценки представим кольцо $K(r,R)$ в виде объединения колец $K_l = \{z : r_l < |z| < r_{l+1}\}$, $l = \overline{0, n-1}$, где $r = r_0 < r_1 < ... < r_n = R$. Тогда в силу неравенства (1)

$$\mathrm{Mod}(f(K(r,R))) = \mathrm{Mod}\left(\bigcup_{l=0}^{n-1} f(K_l)\right) \ge \sum_{l=0}^{n-1}\mathrm{Mod}(f(K_l)),$$

что с учетом свойства (2) квазиинвариантности модуля приводит к соотношению

$$\mathrm{Mod}(D) \ge \sum_{l=0}^{n-1}\mathbb{K}_l^{-1}\,\mathrm{Mod}(K_l) = \sum_{l=0}^{n-1}\mathbb{K}_l^{-1}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_{l+1}}{r_l},$$

где $\mathbb{K}_l = \operatorname*{ess\,sup}_{K_l} p_f(z)$ — коэффициент квазиконформности ограничения отображения f на кольцо K_l.

Определим $\Delta r_l = r_{l+1} - r_l$. Тогда сумма в правой части последней оценки преобразуется к виду

$$\mathrm{Mod}(D) \geq \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\mathbb{K}_l^{-1}\ln\left(1+\frac{\Delta r_l}{r_{l+1}}+o(\Delta r_l)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\mathbb{K}_l^{-1}\frac{\Delta r_l}{r_{l+1}} + \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\mathbb{K}_l^{-1}\cdot o\left(\Delta r_l\right).$$

Первая сумма в правой части полученного выражения представляет собой нижнюю интегральную сумму для сходящегося в силу условий теоремы интеграла $\frac{1}{2\pi}\int\limits_r^R P_f^{-1}(t)\frac{dt}{t}$, а вторая является бесконечно малой величиной при $\max\Delta r_l \to 0$. Устремляя мелкость разбиения $\{r_l\}$, $l=\overline{0,n}$, к нулю, приходим к требуемой оценке

$$\mathrm{Mod}(D) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_r^R P_f^{-1}(t)\frac{dt}{t},$$

что и требовалось доказать. □

При $P_f(r) \equiv \mathbb{K}_f < \infty$ неравенства (3) эквивалентны классическим соотношениям (2). Точность неравенств (3) демонстрирует, например, следующий полученный с их помощью результат [5], приводимый здесь без доказательства.

Следствие 1. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, такой, что $f(0)=0$, отображение f конформно в нуле и $|\mu_f(z)| \leq |z|$, где μ_f — комплексная характеристика отображения f. Тогда*

$$|f'(0)| \leq 4. \tag{4}$$

Равенство достигается на отображении

$$f_0(z) = \frac{4\,z}{(1+|z|)^2}.$$

В качестве других следствий из теоремы 1 в работе [5] приведены точные оценки конформного радиуса и радиуса круга покрытия в некоторых классах нормированных локально-квазиконформных отображений круга с заданной мажорантой характеристики М. А. Лаврентьева. Также теорема 1 и следствие 1 находят применение в теории локально-квазиконформных гармонических отображений, которой посвящено значительное число работ (см., например, [7, 8]).

2. Применим теорему 1 для получения оценок $|f(z)|$ для локально-квазиконформных нормированных автоморфизмов f единичного круга Δ.

Напомним, что в соответствии с доказанной в 1956 г. теоремой А. Мори [1] всякое $\mathbb{K}_f$-квазиконформное отображение f круга Δ на себя с нормировкой $f(0) = 0$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq 16|z_1 - z_2|^{1/\mathbb{K}_f}, \tag{5}$$

причем константа 16 не может быть уменьшена.

Неравенство (5) очевидно означает, что $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$ при $\alpha = 1/\mathbb{K}_f \leq 1$ и тривиально при $\mathbb{K}_f = \infty$, т. е. при потере квазиконформности.

Следует заметить, что впоследствии оценки $|f(z)|$ для $\mathbb{K}_f$-квазиконформных отображений обсуждались во многих работах (см., например, [9]).

Использование теоремы 1 позволяет получить родственные результаты для локально-квазиконформных автоморфизмов единичного круга [10].

Теорема 2. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, причем $f(0) = 0$. Пусть $m_f(r) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ и $P_f(t) = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{|z|=t} p_f(z)$, где $p_f(z)$ — первая характеристика Лаврентьева отображения f.*

Тогда для $r \in [0,1)$ справедливы оценки

$$\frac{m_f(r) + M_f(r)}{1 + m_f(r)M_f(r)} \leq 4\, e^{-\int\limits_r^1 \frac{1}{t}\frac{1}{P_f(t)}\,dt}, \tag{6.a}$$

$$\frac{m_f(r)M_f(r)}{m_f(r) + M_f(r)} \geq r\, \frac{|f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)|}{4}\, e^{-\int\limits_0^r \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{P_f(t)}\right)dt} \tag{6.b}$$

при условии существования интегралов справа. Оценка (6.b) справедлива для отображений f, дифференцируемых в нуле.

Доказательство. Пусть локально-квазиконформный автоморфизм f круга Δ удовлетворяет условиям теоремы 2.

а) Для доказательства неравенства (6.a) фиксируем $r \in (0,1)$ и рассмотрим кольцо $K(r,1) = \{z : r < |z| < 1\}$. В соответствии с нижней оценкой (3) из теоремы 1 модуль образа $\Omega_r = f(K(r,1))$ кольца

$K(r,1)$ удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{Mod}\,(\Omega_r) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_r^1 \frac{1}{P_f(t)}\frac{dt}{t}. \tag{7}$$

С другой стороны, двусвязная область Ω_r очевидно содержит в себе кольцо $K(M_f(r),1)$ и не пересекается с кругом $\{w : |w| \leq m_f(r)\}$, где $m_f(r) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Без ограничения общности можно считать, что $M_f(r) = f(r) > 0$.

Для оценки модуля области Ω_r отобразим ее с помощью функции $F(w) = (1 + m_f(r)\,w)/(w + m_f(r))$ на двусвязную область D_R, ограниченная компонента дополнения которой совпадает с замкнутым единичным кругом, а внешняя неограниченная компонента дополнения не содержит точки:

$$R(r) = F(M_f(r)) = \frac{1 + m_f(r)\,M_f(r)}{m_f(r) + M_f(r)}.$$

В соответствии с известной задачей Г. Греча (см., например, [2]) о максимуме модулей двусвязных областей, не содержащих круга Δ и континуума, связывающего точки R и ∞,

$$\mathrm{Mod}\,(D_R) \leq \mathrm{Mod}\,(D_R^*)\,, \tag{8}$$

где экстремальная область D_R^* представляет собой внешность единичного круга с разрезом по лучу действительной оси $[R, +\infty)$.

Для модуля экстремальной области D_R^* в задаче Греча принято использовать обозначение

$$\frac{1}{2\pi}\ln\,\Phi(R),$$

где функция $\Phi(R)$ связана с эллиптической функцией Вейерштрасса $\wp$ и удовлетворяет неравенству

$$\Phi(R) \leq 4R.$$

В нашем случае неравенство (8) и приведенная выше оценка функции Φ позволяют заключить, что

$$\mathrm{Mod}\,(D_R) \leq \frac{1}{2\pi}\ln\,\Phi(R(r)) \leq \frac{1}{2\pi}\ln\,4\frac{1 + m_f(r)\,M_f(r)}{m_f(r) + M_f(r)}. \tag{9}$$

Комбинируя неравенство (7) с оценкой (9), приходим к (6.a).

б) Для доказательства неравенства (6.b) используем сходные рассуждения, дополнительно потребовав дифференцируемость отображения f в начале координат. Таким образом, f — локально-квазиконформный автоморфизм Δ, такой, что

$$f(0) = 0, \ |f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)| > 0.$$

В случае расходимости интеграла в правой части неравенства (6.b) доказываемая оценка тривиальна. Поэтому далее предполагаем, что

$$\int\limits_0^r (1 - 1/P_f(t))\,/t\,dt < +\infty.$$

Рассмотрим произвольно малое значение $\varepsilon > 0$ и $r \in (\varepsilon, 1)$. Образом кольца $K(\varepsilon, r) = \{z : \varepsilon < |z| < r\}$ при отображении f является двусвязная область $\Omega_{\varepsilon,r}$, внутренняя граничная компонента которой с точностью до $o(\varepsilon)$ совпадает с эллипсом с центром в нуле и полуосями $\varepsilon\,(|f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)|)$, $\varepsilon\,(|f_z(0)| + |f_{\bar z}(0)|)$. При этом окружность $\{w : |w| = m_f(r)\}$ лежит в $\Omega_{\varepsilon,r}$, а окружность $\{w : |w| = M_f(r)\}$ — во внешности этой области. Без ограничения общности можно считать, что $m_f(r) = -f(-r)$.

При соответствующем значении $o(\varepsilon) > 0$, таком, что $m_f(\varepsilon) = = \varepsilon\,(|f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)|) - o(\varepsilon)$, дробно-линейная функция

$$G(w) = \frac{1}{m_f(\varepsilon)}\,\frac{w + (m_f(\varepsilon))^2/m_f(r)}{1 + w/m_f(r)}$$

отображает область $\Omega_{\varepsilon,r}$ на неограниченную двусвязную область $D_{\varepsilon,R}$, ограниченная компонента дополнения которой содержит замкнутый единичный круг $\{\omega : |\omega| \le 1\}$, а неограниченная компонента дополнения содержит точку

$$R(\varepsilon, r) = G(M_f(r)) = \frac{1}{\varepsilon\,(|f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)|)}\left(\frac{m_f(r)\,M_f(r)}{m_f(r) + M_f(r)} + o(1)\right)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Как и в пункте а), в соответствии с конформной инвариантностью и монотонностью модуля, а также со свойствами экстремальной области в задаче Г. Греча и неравенством (8) получаем

$$\mathrm{Mod}\,(\Omega_{\varepsilon,r}) = \mathrm{Mod}\,(D_{\varepsilon,R}) \le \mathrm{Mod}\,(D_R^*) = \frac{1}{2\pi}\ln\,\Phi(R(\varepsilon, r)) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\ln\,\frac{4}{\varepsilon\,(|f_z(0)| - |f_{\bar z}(0)|)} + \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{m_f(r)\,M_f(r)}{m_f(r) + M_f(r)} + o(1)\right). \qquad (10)$$

Нижняя оценка $\operatorname{Mod}(\Omega_{\varepsilon,r})$ производится, как и в пункте а), с помощью теоремы 1:

$$\operatorname{Mod}(\Omega_{\varepsilon,r}) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{P_f(t)}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{r}\left(\frac{1}{P_f(t)}-1\right)\frac{dt}{t} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{\varepsilon}. \quad (11)$$

Комбинируя оценки (10), (11) и совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, приходим к требуемому неравенству (6.b). $\square$

Применим доказанную теорему в случае, когда характеристика Лаврентьева мажорируется функцией $P(t) = (1+t)/(1-t)$.

Следствие 2. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, такой, что $f(0) = 0$, отображение f конформно в нуле и $|\mu_f(z)| \leq |z|$, где μ_f — комплексная характеристика отображения f. Тогда*

$$\frac{m_f(r)+M_f(r)}{1+m_f(r)M_f(r)} \leq 16\frac{r}{(1+r)^2},$$

$$\frac{m_f(r)M_f(r)}{m_f(r)+M_f(r)} \geq \frac{|f'(0)|}{4}\frac{r}{(1+r)^2}.$$

Замечание 1. *Следствие 2 позволяет получить оценки роста для автоморфизма f, такого, что $f(0) = 0$ и $|\mu_f(z)| \leq |z|$:*

$$\frac{|f'(0)|}{2}\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq 16\frac{|z|}{(1+|z|)^2}.$$

Заметим также, что в случае постоянства характеристики Лаврентьева $p_f(z) \equiv \mathbb{K}_f$ неравенство (6.b) тривиально, а (6.a) приобретает вид

$$\frac{m_f(r)+M_f(r)}{1+m_f(r)M_f(r)} \leq 4\,r^{1/\mathbb{K}_f},$$

что по порядку роста соответствует оценке, доказанной А. Мори.

Использование приведенных модулей областей позволяет получить еще один вариант теоремы роста для локально квазиконформных отображений.

Теорема 3. *Пусть локально-квазиконформный автоморфизм f единичного круга Δ конформен в начале координат, причем $f(0) = 0$.*

Тогда

$$\frac{|f(z)|}{|f'(0)|(1+|f(z)|)^2} \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \cdot e^{\int\limits_0^1 (1/\tilde{P}_f(t)-1)/t \cdot dt}, \tag{12}$$

где

$$\tilde{P}_f(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{|\zeta|=t} p_{f\circ H}(\zeta),$$

$p_f(z)$ *— первая характеристика М. А. Лаврентьева отображения* f*, а функция* H *определяется равенством*

$$H(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)a - b - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)a-b\right)^2 - 1}, \tag{13}$$

при $a = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(|z|+|z|^{-1}\right)\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(|z|+|z|^{-1}\right)\right)$ *и выборе ветви корня, определяемой равенством* $\sqrt{1}=1$.

Доказательство. Пусть отображение f удовлетворяет условиям доказываемой теоремы, и $r = |z| \in (0,1)$, $R = |f(z)|$. Фиксируем малое значение $\varepsilon > 0$ и рассмотрим двусвязную область $\Delta_{r,\varepsilon} = \{\zeta : \varepsilon < |\zeta| < 1\} \setminus [r,1)$. Прообразом области $\Delta_{r,\varepsilon}$ при конформном отображении H, определяемом равенством (13), является кольцо $K(\tilde{\varepsilon},1) = \{\zeta : \tilde{\varepsilon} < |\zeta| < 1\}$, где $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\cdot(1+r)^2/(4r)$. Локально-квазиконформное отображение $f\circ H$ преобразует кольцо $K(\tilde{\varepsilon},1)$ в двусвязную область $D_{R,\varepsilon}$ — единичный круг Δ с разрезом по дуге $f([r,1))$ и выброшенным континуумом $f(|\zeta| \leq \varepsilon)$ — образ $\Delta_{r,\varepsilon}$ при отображении f. Тогда в соответствии с теоремой 1 имеет место оценка

$$\operatorname{Mod}(D_{R,\varepsilon}) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\tilde{\varepsilon}}^{1} \frac{1}{\tilde{P}_f(t)}\frac{dt}{t}. \tag{14}$$

В силу конформности отображения f в начале координат внутренняя граничная компонента области $D_{R,\varepsilon}$ с точностью до $o(\varepsilon)$ совпадает с окружностью $\{\zeta : |\zeta| = \varepsilon|f'(0)|\}$.

Произведем круговую симметризацию области $D_{R,\varepsilon}$ относительно отрицательного луча действительной оси. В результате $D_{R,\varepsilon}$ преобразуется в область $D^*_{R^*,\varepsilon}$, с точностью до $o(\varepsilon)$ совпадающую с кольцом $\{\zeta : \varepsilon|f'(0)| < |\zeta| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[R^*,1)$ действительной оси, причем $0 < R^* \le R$. Свойствам различных процедур симметризации многосвязных областей посвящено значительное количество работ (см., например, [3, 4, 11]). В нашем случае существенно, что при симметризации модули двусвязных областей не убывают. В силу этого обстоятельства и свойства монотонности модулей двусвязных областей

$$\mathrm{Mod}(D_{R,\varepsilon}) \le \mathrm{Mod}(D^*_{R^*,\varepsilon}) \le \mathrm{Mod}(\Delta_{R,\varepsilon}),$$

где $\Delta_{R,\varepsilon} = \{\zeta : \varepsilon|f'(0)| < |\zeta| < 1\} \setminus [R,1)$. Комбинируя последнюю оценку с неравенством (14), получаем

$$\mathrm{Mod}(\Delta_{R,\varepsilon}) \ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\tilde{P}_f(t)}\frac{dt}{t}.$$

Добавляя к обоим частям данного неравенства $\dfrac{1}{2\pi}\ln(\varepsilon|f'(0)|)$, производя тождественные преобразования правой части и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к следующей оценке:

$$\mathrm{Mod}(\Delta_R, 0) \ge \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{4|f'(0)|r}{(1+r)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\tilde{\varepsilon}}^{1}\left(\frac{1}{\tilde{P}_f(t)} - 1\right)\frac{dt}{t}\right), \qquad (15)$$

где $\mathrm{Mod}(\Delta_R, 0)$ — приведенный модуль односвязной области $\Delta_R = \Delta \setminus [R,1)$ относительно начала координат, а предел в правой части (15) равен несобственному интегралу $\int\limits_0^1 (1/\tilde{P}_f(t) - 1)/t \cdot dt$, причем $\tilde{P}_f(0) = 1$.

С другой стороны, как известно (см., например, [3]),

$$\mathrm{Mod}(\Delta_R, 0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{4R}{(1+R)^2}.$$

Таким образом, потенциируя неравенство (15) и учитывая равенства $r = |z|$, $R = |f(z)|$, приходим к доказываемой оценке (12).

Заметим, что неравенство (12) точно в случае, когда имеет место равенство в нижней оценке теоремы 1 и функция f отображает область $\Delta \setminus [r,1)$ на область Δ_R. $\square$

Применим теорему 3 в случае, когда характеристика М. А. Лаврентьева отображения f мажорируется функцией $P(t) = (1+t)/(1-t)$.

Следствие 3. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, такой, что отображение f конформно в нуле, $f(0) = 0$ и $|\mu_f(z)| \le |z|$, где μ_f — комплексная характеристика отображения f. Тогда справедливо точное при $|z| \to 0$, $|z| \to 1$ неравенство*

$$\frac{|f(z)|}{|f'(0)|(1+|f(z)|)^2} \ge \frac{|z|}{(1+\sqrt{|z|})^4}. \tag{16}$$

Доказательство. Для доказательства сформулированного утверждения применим к отображению f теорему 3. Заметим, что в соответствии с приципом Линделефа [12] максимум модуля отображения H на окружности $\{\zeta : |\zeta| = t\}$, определяемого формулой (13), достигается в точке $-t$ и равен $-H(-t)$. Следовательно, с учетом условия $|\mu_f(z)| \le |z|$, мажоранта характеристики Лаврентьева композиции $f \circ H$ имеет вид

$$\tilde{P}_f(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{|\zeta|=t} p_{f\circ H}(\zeta) = \frac{1-H(-t)}{1+H(-t)}.$$

Таким образом, интеграл в правой части неравенства (12)

$$\int\limits_0^1 \frac{1-\tilde{P}_f(t)}{\tilde{P}_f(t)}\frac{dt}{t} = 2\int\limits_0^1 \frac{-H(-t)}{1-H(-t)}\frac{dt}{t}.$$

После замены $s = -H(-t)$ последний интеграл преобразуется к виду

$$\int\limits_0^1 \frac{s-1}{s}\frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(s+s^{-1}\right)-b\right)^2-a^2}},$$

где $a = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\left(|z|+|z|^{-1}\right)\right)$, $b = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\left(|z|+|z|^{-1}\right)\right)$.

В итоге

$$\int\limits_0^1 \frac{1-\tilde{P}_f(t)}{\tilde{P}_f(t)}\frac{dt}{t} = -2\int\limits_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s^2+s\left(r+r^{-1}\right)+1}} = \ln\frac{(1+r)^2}{(1+\sqrt{r})^4}.$$

Подстановка последнего выражения в неравенство (12) приводит к требуемой оценке (16).

Точность неравенства (16) при $|z| \to 0$ очевидна. В силу (4) имеет место точная оценка $|f'(0)| \leq 4$. Для отображений f, удовлетворяющих равенству $|f'(0)| = 4$, неравенство (12) является точным также и при $|z| \to 1$. $\square$

3. Использование метода симметризации и свойств эллиптических функций Якоби позволяет получить асимптотически точные при $|z| \to 0$ и при $|z| \to 1$ теоремы роста для локально квазиконформных автоморфизмов круга с заданной мажорантой характеристики М. А. Лаврентьева, из которых следуют точные оценки $|f(z)|$ в случае квазиконформности f.

Теорема 4. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, причем $f(0) = 0$ и $p_f(z)$ — первая характеристика М. А. Лаврентьева отображения f. Тогда для любых z_1, $z_2 \in \Delta$ справедлива оценка*

$$\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(A)}{\mathbf{K}(A)} \geq \int\limits_{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(a)}{\mathbf{K}(a)}}^{0} \frac{dt}{\tilde{P}_f(t)} \tag{17}$$

при условии существования интеграла справа.

Здесь $\mathbf{K}(x)$, $\mathbf{K}'(x)$ — полные эллиптические интегралы Якоби,

$$A = \left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)}\, f(z_2)} \right|, \ a = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1\, z_2} \right|, \tag{18}$$

функция $\tilde{P}_f(t)$ определяется равенством

$$\tilde{P}_f(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{\ln|\zeta| = t} p_{f\circ\Phi_2\circ\Phi_1}(\zeta),$$

где

$$\Phi_2(\omega) = \frac{\omega + z_1}{1 + \bar{z}_1\, \omega}, \tag{19}$$

функция Φ_1 удовлетворяет условию симметрии $\overline{\Phi_1(\zeta)} = \Phi_1(\bar{\zeta})$ в коль-

це $\left\{\zeta : e^{-\pi \boldsymbol{K}'(a)/2\boldsymbol{K}(a)} < |\zeta| < 1\right\}$ *и определяется равенством*

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1 + k \cdot \operatorname{sn}\left(\mathbf{K}'(k)\dfrac{\ln\zeta}{\pi}, k\right)}{1 - k \cdot \operatorname{sn}\left(\mathbf{K}'(k)\dfrac{\ln\zeta}{\pi}, k\right)} \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\zeta > 0, \tag{20}$$

а модуль эллиптического синуса

$$k = \frac{1-a}{1+a} \in (0,1).$$

Неравенство (17) является асимптотически точным при $a \to 0$, $a \to 1$ *и точным, например, при* $p_{f\circ\Phi_2\circ\Phi_1}(\zeta) \equiv \tilde{P}_f(t)$ *на окружностях* $\{\zeta : |\zeta| = t\}$, $t \in (0,1)$.

Доказательство. Пусть локально-квазиконформное отображение f удовлетворяет условиям доказываемой теоремы. Будем считать, что интеграл в правой части неравенства (17) существует, что имеет место в случае измеримости функции $\tilde{P}_f(t)$.

Рассмотрим произвольные точки $z_1, z_2 \in \Delta$. Их прообразами при конформном автоморфизме Φ_2 единичного круга, определяемом равенством (19), с точностью до поворота вокруг начала координат являются соответственно точки 0 и a, где параметр a удовлетворяет второму из соотношений (18).

Рассмотрим двусвязную область $D_a = \Delta \setminus [0,a]$ — единичный круг с разрезом по отрезку $[0,a]$ действительной оси. Образом области D_a при отображении Φ_2 с точностью до вращения является область Δ_a — круг Δ с разрезом по дуге окружности, ортогональной $\partial\Delta$ и соединяющей точки z_1, z_2.

При локально-квазиконформном отображении f область Δ_a преобразуется в двусвязную область Δ_A — круг Δ с разрезом по некоторой дуге, соединяющей точки $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Дробно-линейная функция $\Phi_3(w) = e^{i\theta}(w - f(z_1))/(1 - \overline{f(z_1)}\, w)$ при некотором $\theta \in \mathbb{R}$ переводит Δ_A в круг с разрезом по дуге, соединяющей точки $\Phi_3(f(z_1)) = 0$ и $\Phi_3(f(z_2)) = A$, где A определяется первым из соотношений (18).

Произведем круговую симметризацию области $\Phi_3(\Delta_A)$ относительно отрицательного луча действительной оси. В результате $\Phi_3(\Delta_A)$ преобразуется в единичный круг с разрезом по отрезку $[0, A^*]$ действительной оси, причем $A \le A^* < 1$.

В силу того, что модули двусвязных областей при симметризации не убывают, а также в силу конформной инвариантности и монотонности модулей имеет место неравенство

$$\mathrm{Mod}\,(\Delta_A) \le \mathrm{Mod}\,(D_A)\,,$$

где D_A — круг Δ с разрезом по отрезку $[0, A]$. Отсюда в силу известных (см., например, [2, 3]) формул для модулей единичного круга с разрезом получаем следующую верхнюю оценку модуля:

$$\mathrm{Mod}\,(\Delta_A) \le \frac{1}{2\pi} \ln \Phi\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{4} \frac{\mathbf{K}'(A)}{\mathbf{K}(A)}, \tag{21}$$

где $\dfrac{1}{2\pi} \ln \Phi\,(R)$ — модуль экстремальной области в задаче Гретча [2].

Для получения нижней оценки рассмотрим определяемую равенством (20) функцию $\Phi_1(\zeta)$. Пусть

$$r(a) = e^{-\dfrac{\pi}{2} \dfrac{\mathbf{K}'(a)}{\mathbf{K}(a)}} \quad \text{и} \quad k = \frac{1-a}{1+a}.$$

Тогда функция Φ_1 осуществляет конформное отображение верхнего полукольца $K^+(r(a), 1) = \{\zeta : r(a) < |\zeta| < 1,\ \mathrm{Im}\ \zeta > 0\}$ на верхний полукруг $\{z : |z| < 1,\ \mathrm{Im}\ z > 0\}$, причем внутренняя полуокружность области $K^+(r(a), 1)$ при данном отображении переходит в отрезок $[0, a]$ действительной оси. Продолженная в соответствии с принципом симметрии Римана – Шварца в нижнее полукольцо $K^-(r(a), 1)$ функция Φ_1 реализует конформное отображение кругового кольца $K(r(a), 1)$ на двусвязную область D_a. Модули областей $K(r(a), 1)$, D_a и Δ_a очевидно равны в силу конформной инвариантности.

Определим локально-квазиконформное отображение $\tilde{f} = f \circ \Phi_2 \circ \Phi_1$ кругового кольца $K(r(a), 1)$ на определенную выше двусвязную область Δ_A. Мажоранта характеристики М. А. Лаврентьева отображения $\tilde{f}$ равна $\operatorname*{ess\,sup}_{|\zeta|=t} p_{f\circ\Phi_2\circ\Phi_1}(\zeta)$. Тогда в соответствии с неравенством (3) теоремы 1 имеет место следующая нижняя оценка модуля двусвязной области Δ_A:

$$\mathrm{Mod}\,(\Delta_A) \ge \frac{1}{2\pi} \int\limits_{r(a)}^{1} \frac{1}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{|\zeta|=t} p_{f\circ\Phi_2\circ\Phi_1}(\zeta)} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(a)}{\mathbf{K}(a)}}^{0} \frac{dt}{\tilde{P}_f(t)},$$

где a определяется вторым из равенств (18).

Комбинируя последнее неравенство с соотношением (21), приходим к доказываемой оценке (17).

Неравенство (17) является точным при выполнении следующих условий:

1) характеристика М. А. Лаврентьева $p_{f\circ\Phi_2\circ\Phi_1}(\zeta) = const$ на любой окружности $\{\zeta : |\zeta| = t\}$, что соответствует условиям равенства в теореме 1 и очевидно верно при $p_f(z) \equiv \mathbb{K}_f < \infty$;

2) образ Δ_A области Δ_a при отображении f представляет собой единичный круг с разрезом по дуге окружности, соединяющей точки $f(z_1)$, $f(z_2)$ и ортогональной $\partial\Delta$.

Асимптотическая точность неравенства (17) при $a \to 1$ следует из того, что в этом случае $A \to 1$, и в силу известных свойств полных эллиптических интегралов [3]

$$\mathbf{K}(x) = \mathbf{K}'(\sqrt{1-x^2}) \to \infty,\ \mathbf{K}'(x) = \mathbf{K}(\sqrt{1-x^2}) \to \frac{\pi}{2} \ \text{ при } \ x \to 1,$$

обе части неравенства (17) стремятся к 0.

Аналогично при $a \to 0$ величина A также стремится к нулю, и обе части (17) стремятся к ∞ в силу приведенных выше предельных соотношений для полных эллиптических интегралов $\mathbf{K}(x)$, $\mathbf{K}'(x)$ при $x \to 0$. $\square$

Замечание 2. *Если отображение f квазиконформно, то $p_f(z) \le \mathbb{K}_f$ и из неравенства (17) следует оценка*

$$\frac{\mathbf{K}'(a)}{\mathbf{K}(a)} \le \mathbb{K}_f \frac{\mathbf{K}'(A)}{\mathbf{K}(A)}, \tag{22}$$

где параметры a, A определяются соотношениями (18). Последнее неравенство приводит к известной [9] точной оценке $|f(z)|$ для $\mathbb{K}_f$-квазиконформных отображений.

В силу асимптотических формул для полных эллиптических интегралов [3]

$$e^{-\pi\mathbf{K}'(k)/\mathbf{K}(k)} = \frac{k^2}{16} + o(k^2).$$

Таким образом, при $z_2 - z_1 \to 0$, $|z_1|, |z_2| \not\to 1$ из (22) получаем точную локальную оценку

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{1-\overline{f(z_1)}\, f(z_2)}\right| \le 4^{1-1/\mathbb{K}_f} \left|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}\, z_2}\right|^{1/\mathbb{K}_f} + o(|z_2-z_1|^{1/\mathbb{K}_f}),\ |z_2-z_1| \to 0,$$

по порядку роста совпадающую с неравенством А. Мори (5).

В случае, когда характеристика Лаврентьева функции f мажорируется функцией $P(t) = (1+t)/(1-t),\ t \in [0,1)$, теорема 4 позволяет получить асимптотически точные оценки $|f(z)|$.

Следствие 4. *Пусть f — локально-квазиконформный автоморфизм единичного круга Δ, такой, что отображение f конформно в нуле, $f(0) = 0$ и $|\mu_f(z)| \le |z|$, где μ_f — комплексная характеристика отображения f. Тогда*

$$\mathbf{K}(|z|)\frac{\mathbf{K}'(|f(z)|)}{\mathbf{K}(|f(z)|)} \le \frac{\ln 1/|z|}{1+|z|}. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть отображение f удовлетворяет условиям доказываемого следствия. Применим к f теорему 4, полагая $z_1 = 0$, $z_2 = z$. Тогда $a = |z|$, $A = |f(z)|$ и Φ_2 представляет собой тождественное отображение. При значении модуля эллиптического синуса $k = (1-|z|)/(1+|z|)$ и $r = e^{-\frac{\pi}{2}\mathbf{K}'(|z|)/\mathbf{K}(|z|)}$ функция Φ_1 реализует конформное отображение кругового кольца $K(r,1)$ на круг Δ с разрезом по отрезку $[0,|z|]$. При этом в соответствии с принципом Линделефа [12] максимум $|\Phi_1(\zeta)|$ на окружности $|\zeta| = t$, $t \in (0,1)$ достигается в точке $\zeta = t$, причем $\Phi_1(t) \in (|z|,1)$. Отсюда с учетом условия $|\mu_f(w)| \le |w|$ приходим к равенству

$$\tilde{P}_f(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{\ln|\zeta|=t} p_{f\circ\Phi_1}(\zeta) = \Phi_1(e^t).$$

Таким образом, правая часть неравенства (17) принимает вид

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(|z|)}{\mathbf{K}(|z|)}}^{0} \frac{dt}{\tilde{P}_f(t)} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(|z|)}{\mathbf{K}(|z|)}}^{0} \frac{1-\Phi_1(e^t)}{1+\Phi_1(e^t)}dt =$$

$$= -k \int\limits_{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(|z|)}{\mathbf{K}(|z|)}}^{0} \operatorname{sn}\left(\mathbf{K}'(k)\frac{t}{\pi}, k\right) dt = \frac{\pi}{2}\frac{\ln 1/|z|}{\mathbf{K}'(k)}.$$

Отсюда, с учетом свойств полных эллиптических интегралов Якоби [3] и равенств

$$\mathbf{K}'(k) = \mathbf{K}'\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right) = \mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{|z|}}{1+|z|}\right) = (1+|z|)\mathbf{K}(|z|),$$

приходим к требуемой оценке (23). □

Замечание 3. *Если f удовлетворяет условиям следствия 4, то при $|z| \to 0$ из (23), с учетом известных [3] неравенств*

$$\frac{\mathbf{K}'(x)}{\mathbf{K}(x)} \le \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{x},\ \mathbf{K}(x) \le \frac{\pi}{2} - \ln\sqrt{1-x^2}, \tag{24}$$

следует точная до величин порядка $o(|z|)$ локальная оценка роста функции f в окрестности начала координат:

$$|f(z)| \le 4|z|^{-((1+|z|)(1-1/\pi\ln(1-|z|^2)))^{-1}} =$$

$$= 4|z| - 4|z|^2\ln|z| + o(|z|^2\ln|z|).$$

Функция $f_0(z) = \dfrac{4\,z}{(1+|z|)^2} = 4z - 8z^2 + \ldots$ удовлетворяет условиям следствия 4 и демонстрирует точность последней оценки.

Аналогично, при $r \to 1$ из неравенств (23), (24) следует оценка

$$|f(z)| \le \left(1 - 16e^{(1+|z|)(\pi-\ln(1-|z|^2))(\pi/2-\ln|f(z)|)/\ln|z|}\right)^{1/2},$$

где множитель $\pi/2 - \ln|f(z)|$ в показателе близок к $\pi/2$.

Библиографический список

[1] Mori A. *On an absolute constant in the theory of quasi-conformal mappings* // J. Math. Soc. Japan. 1956. No. 8, P. 156–166.

[2] Альфорс Л. *Лекции по квазиконформным отображениям.* М., 1969.

[3] Vasil'ev A. *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings.* Berlin; N. Y., 2002.

[4] Дженкинс Дж. *Однолистные функции и конформные отображения.* М., 1962.

[5] Граф С. Ю., Эйланголи О. Р. *Об искажении модулей двусвязных областей при локально-квазиконформных отображениях* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2009. С. 34–43.

[6] Белинский П. П. *Общие свойства квазиконформных отображений.* Новосибирск, 1974.

[7] Старков В. В. *Гармонические локально-квазиконформные отображения* // Тр. ПетрГУ. Сер. Математика. 1993. Вып. 1. С. 61–69.

[8] Граф С. Ю., Эйланголи О. Р. *Дифференциальные неравенства в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений* // Известия ВУЗов. Математика. Казань, 2010. N. 10. С. 69–72.

[9] Anderson G. D., Vamanamurthy M. K., Vuorinen M. *Conformal invariants, inequalities an quasiconformal maps.* New York, 1997.

[10] Граф С. Ю. *Аналог теоремы Мори для локально-квазиконформных автоморфизмов единичного круга* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2013. С. 34–47.

[11] Дубинин В. Н. *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. Вып. 1(295). С. 3–76.

[12] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* М., 1973.

Работа поступила 9 сентября 2013 г.

Тверской государственный университет,
г. Тверь, ул. Желябова, 33.

Петрозаводский государственный университет,
г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.
E-mail: Sergey.Graf@tversu.ru