DOI: 10.15393/j3.art.2012.1661 **Issues of Analysis.** Vol. 1(19), No. 1, 2012

УДК 517.966

С. С. Платонов

О СТРУКТУРЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ НА НЕКОТОРЫХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Аннотация. Получено описание некоторого класса экспоненциальных мономов на локально компактных абелевых группах.

Ключевые слова: *топологические группы, экспоненциальные мономы*

Пусть G — локально компактная абелева группа с операцией $+$ и нулевым элементом 0. Экспоненциальной функцией или обобщенным характером на группе G называется произвольный непрерывный гомоморфизм группы G в мультипликативную группу ненулевых комплексных чисел. Непрерывные гомоморфизмы из группы G в аддитивную группу комплексных чисел называются аддитивными функциями. Функция $x \mapsto P(a_1(x), \dots, a_m(x))$ называется полиномиальной, если P — комплексный полином от m переменных и $a_1, \dots, a_m$ — аддитивные функции. Произведение полиномиальной и экспоненциальной функций называется экспоненциальным мономом, а линейная комбинация экспоненциальных мономов называется экспоненциальным полиномом.

Приведем некоторые примеры.

1°. Пусть $G = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Любая экспоненциальная функция на $\mathbb{R}^n$ имеет вид $E(x) = e^{\lambda x}$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\lambda x := \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. Любой экспоненциальный моном на $\mathbb{R}^n$ имеет вид $f(x) = P(x)\, e^{\lambda x}$, где $P(x) = P(x_1, \dots, x_n)$ — комплексный полином от n переменных.

2°. Пусть $G = \mathbb{Z}^n$, $n \geq 1$. Элементы из $\mathbb{Z}^n$ имеют вид $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{Z}$. Пусть $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}_*^n = \mathbb{C}_* \times \dots \times \mathbb{C}_*$ — декартово произведение n экземпляров множества $\mathbb{C}_*$. Для любых $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_*^n$

и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ пусть $z^x := z_1^{x_1} \dots z_n^{x_n}$. Любая экспоненциальная функция на группе $\mathbb{Z}^n$ имеет вид $E(x) = z^x$ для некоторого $z \in \mathbb{C}_*^n$, а экспоненциальный моном имеет вид $f(x) = P(x)\, z^x$, где $P(x) = P(x_1, \dots, x_n)$ — комплексный полином от n переменных.

3°. Если группа G компактная, $E(x)$ — экспоненциальная функция на на группе G, то $|E(x)| \equiv 1$, следовательно E является непрерывным гомоморфизмом из группы G в группу $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, т. е. E является обычным характером группы G. Любая аддитивная функция на компактной абелевой группе тождественно равна 0, поэтому любой экспоненциальный моном имеет вид $f(x) = \lambda\, E(x)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $E(x)$ — некоторый характер.

Важным классом задач, в которых используются экспоненциальные мономы на группах, являются задачи о спектральном синтезе на группах. Приведем описание таких задач.

Пусть G — локально компактная абелева группа, $\mathcal{F}$ — топологическое векторное пространство, состоящее из комплекснозначных функций на G. Будем называть пространство $\mathcal{F}$ трансляционно инвариантным, если $\mathcal{F}$ инвариантно относительно преобразований (сдвигов)

$$\tau_y : f(x) \mapsto f(x+y), \quad f(x) \in \mathcal{F}, y \in G,$$

и все операторы τ_y являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{F}$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ называется инвариантным подпространством, если $\tau_y(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ для любого $y \in G$.

Пусть $\mathcal{F}$ — трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе G, $\mathcal{H}$ — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$.

Определение 1. *Инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех содержащихся в $\mathcal{H}$ экспоненциальных мономов. В пространстве $\mathcal{F}$ справедлив спектральный синтез, если любое инвариантное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ допускает спектральный синтез.*

Задачам о спектральном синтезе на группах посвящено много работ (см., например, [1]–[11]). В этих работах изучаются вопросы справедливости (или несправедливости) спектрального синтеза для различных конкретных групп G и функциональных пространств $\mathcal{F}$. Важную роль в таких задачах играют вопросы о структуре экспоненциальных мономов.

Пусть $\widetilde{G}$ и G — локально компактные абелевы группы, $\alpha : \widetilde{G} \mapsto G$ — сюръективный гомоморфизм группы $\widetilde{G}$ на группу G (все гомоморфизмы топологических групп предполагаются непрерывными). Для любого топологического пространства X обозначим через $C(X)$ множество всех непрерывных комплекснозначных функций на X, в частности, возникают множества $C(G)$ и $C(\widetilde{G})$. Пусть $\Lambda : C(G) \mapsto C(\widetilde{G})$ — отображение, сопоставляющее каждой функции $f(x) \in C(G)$, $x \in G$ функцию

$$\Lambda(f)(t) = \widetilde{f}(t) := f(\alpha(t)) \in C(\widetilde{G}), \quad t \in \widetilde{G}. \tag{1}$$

Через H обозначим ядро гомоморфизма α, т. е. $H = \ker \alpha := \{t \in \widetilde{G} : \alpha(t) = 0\}$. Тогда H является замкнутой подгруппой группы $\widetilde{G}$.

Через $C_H(\widetilde{G})$ обозначим множество функций $\Phi(t) \in C(\widetilde{G})$, удовлетворяющих условию

$$\Phi(t+h) = \Phi(t) \quad \forall h \in H,\, t \in \widetilde{G}. \tag{2}$$

Очевидно, что $\Lambda(C(G)) \subseteq C_H(\widetilde{G})$.

Если $e(x)$ — экспоненциальная функция на группе G, а $a(x)$ — аддитивная функция на группе G, то функции $\widetilde{e}(t) = e(\alpha(t))$ и $\widetilde{a}(t) = a(\alpha(t))$ будут соответственно экспоненциальной и аддитивной функциями на группе $\widetilde{G}$. Из этого вытекает, что если $f(x)$ — экспоненциальный моном на группе G, то функция $\widetilde{f}(t) = f(\alpha(t))$ будет экспоненциальным мономом на группе $\widetilde{G}$ и, кроме того, $\widetilde{f} \in C_H(\widetilde{G})$.

Возникает естественный вопрос: верно ли обратное утверждение — если $\Phi(t) \in C_H(\widetilde{G})$ и $\Phi(t)$ является экспоненциальным мономом на группе $\widetilde{G}$, то можно ли $\Phi(t)$ представить в виде $\Phi(t) = f(\alpha(t))$ для некоторого экспоненциального монома $f(x)$ на группе G?

Как показывает приведенный ниже пример, в общем случае это утверждение неверно.

Пример. Пусть группа G совпадает с группой $\mathbb{R}$ с обычной метрической топологией, а $\widetilde{G}$ совпадает с группой $\mathbb{R}$, которая снабжается дискретной топологией. Пусть $\alpha : \widetilde{G} \mapsto G$ — тождественное отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Тогда $H = \{0\}$, множество $C(G)$ состоит из всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$, а множество $C(\widetilde{G})$ состоит из всех комплекснозначных функций на $\mathbb{R}$. Хорошо известно, что на $\mathbb{R}$ существуют аддитивные функции, которые не являются непрерывными в метрической топологии (но, разумеется, являются непрерывными в дискретной топологии). Любая такая функция $\Phi(t)$ является экспоненциальным мономом на группе $\widetilde{G}$, но не существует экспоненциального монома f на группе G, для которого $\Phi(t) = f(\alpha(t))$, так как функция $f(\alpha(t))$ непрерывна на $\mathbb{R}$ в метрической топологии.

Достаточное условие для справедливости обратного утверждения получено в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $\widetilde{G}$ и G — локально компактные абелевы группы, $\alpha : \widetilde{G} \mapsto G$ — непрерывный сюръективный гомоморфизм и H — ядро гомоморфизма α. Если α является открытым отображением $\widetilde{G}$ на G, то любой экспоненциальный моном $\Phi(t)$ на группе $\widetilde{G}$, удовлетворяющий условию (2), можно представить в виде $\Phi(t) = f(\alpha(t))$ для некоторого экспоненциально монома $f(x)$ на группе G.*

Замечание. Для широкого класса топологических групп любой непрерывный сюръективный гомоморфизм оказывается открытым. Так известно, что если $\widetilde{G}$ и G — локально компактные топологические группы и группа $\widetilde{G}$ представима в виде счетного объединения компактных подмножеств, то любой непрерывный сюръективный гомоморфизм $\alpha : \widetilde{G} \mapsto G$ является открытым отображением (см. [12, гл. 3, § 20, теорема 12].

Доказательство теоремы 1 является основной целью настоящей работы. Отметим, что для случая, когда $\widetilde{G}$ и G — дискретные абелевы группы, краткий набросок доказательства теоремы 1 содержится в книге [6] (см. [6, доказательство теоремы 2.24]). Доказательство теоремы 1 настоящей работы годится, в частности, и для дискретных абелевых групп, но основано на других методах.

Предварительно рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения. Всюду предполагается, что выполнены условия теоремы 1. Отображение $\Lambda : C(G) \mapsto C_H(\widetilde{G})$ определено формулой (1).

Лемма 1. $\Lambda(C(G)) = C_H(\widetilde{G})$.

Доказательство. Включение $\Lambda(C(G)) \subseteq C_H(\widetilde{G})$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $\Phi(t) \in C_H(\widetilde{G})$. Из условия (2) следует, что можно корректно определить функцию $f(x)$ на G равенством

$$f(x) := \Phi(t) \quad \forall t \in \alpha^{-1}(x).$$

Тогда $\Phi(t) = f(\alpha(t))$. Проверим, что $f(x) \in C(G)$.

Пусть U — произвольное открытое подмножество в $\mathbb{C}$. Легко видеть, что $f^{-1}(U) = \alpha(\Phi^{-1}(U))$. Так как Φ — непрерывная функция, то множество $\Phi^{-1}(U)$ открыто в $\widetilde{G}$, а так как α — открытое отображение, то множество $\alpha(\Phi^{-1}(U))$ открыто в G. Следовательно подмножество $f^{-1}(U)$ открыто в G, откуда вытекает, что $f \in C(G)$. □

Лемма 2. *Если $e(t)$ — экспоненциальная функция на группе $\widetilde{G}$, принадлежащая классу $C_H(\widetilde{G})$, то $e(t) = \varepsilon(\alpha(t))$ для некоторой экспоненциальной функции $\varepsilon(x)$ на группе G.*

Доказательство. По лемме 1 функцию $e(t)$ можно представить в виде $e(t) = \varepsilon(\alpha(t))$ для некоторой функции $\varepsilon(x) \in C(G)$. Проверим, что $\varepsilon(x)$ — экспоненциальная функция.

Пусть $x, y \in G$. Из сюръективности отображения α следует, что $x = \alpha(t)$, $y = \alpha(s)$ для некоторых $t, s \in \widetilde{G}$. Тогда, пользуясь тем, что α — гомоморфизм, а e — экспоненциальная функция, получим

$$\begin{aligned}\varepsilon(x+y) =&\varepsilon(\alpha(t)+\alpha(s)) = \varepsilon(\alpha(t+s)) = e(t+s) = \\ &= e(t)e(s) = \varepsilon(\alpha(t))\varepsilon(\alpha(s)) = \varepsilon(x)\varepsilon(y),\end{aligned}$$

то есть ε является экспоненциальной функцией на группе G. □

Лемма 3. *Если $a(t)$ — аддитивная функция на группе $\widetilde{G}$ и $a \in C_H(\widetilde{G})$, то ее можно представить в виде $a(t) = b(\alpha(t))$ для некоторой аддитивной функции $b(x)$ на группе G.*

Доказательство. По лемме 1 функцию $a(t)$ можно представить в виде $a(t) = b(\alpha(t))$ для некоторой функции $b(x) \in C(G)$. Проверим, что b — аддитивная функция.

Пусть $x, y \in G$ и $x = \alpha(t)$, $y = \alpha(s)$ для некоторых $t, s \in \widetilde{G}$. Тогда

$$\begin{aligned}&b(x+y) = b(\alpha(t)+\alpha(s)) = b(\alpha(t+s)) = a(t+s) = \\ &= a(t)+a(s) = b(\alpha(t)) + b(\alpha(s) = b(x)+b(y). \square\end{aligned}$$

Для любой функции $f \in C(\widetilde{G})$ обозначим через $L(f)$ линейную оболочку всех функций вида $(\tau_s f)(t) = f(t+s)$ для любых $s \in \widetilde{G}$. Очевидно, что если $f \in C_H(\widetilde{G})$, то $L(f) \subseteq C_H(\widetilde{G})$.

Лемма 4. *Пусть $f(t) = e(t)\,p(t)$ — экспоненциальный моном на группе $\widetilde{G}$, где $e(t)$ — экспоненциальная функция, $p(t)$ — полиномиальная* *функция. Тогда экспоненциальная функция $e(t)$ содержится в множестве $L(f)$.*

Доказательство. Очевидно, что любая функция из $L(f)$ имеет вид

$$g(t) = e(t)\, Q(a_1(t), \dots, a_m(t)), \tag{4}$$

где $Q(u_1, \dots, u_m)$ — некоторый полином, $a_1(t), \dots, a_m(t)$ — аддитивные функции на $\widetilde{G}$. Пусть $N = \deg Q$ — степень полинома Q. Среди всех функций из множества $L(f)$ выберем ненулевую функцию $g(t)$, представимую в виде (4) с минимально возможной степенью N. Если $N = 0$, то $e(t) \in L(f)$, и лемма доказана. Предположим, что $N > 0$. Так как пространство $L(f)$ трансляционно инвариантное, то в $L(f)$ содержится и функция

$$g(t+s) = e(t+s)\, q(t+s) = e(t)\, e(s)\, Q(a_1(t) + a_1(s), \dots, a_m(t) + a_m(s))$$

для любого $s \in \widetilde{G}$. Так как функция $q(t)$ не постоянная, то найдется $s \in \widetilde{G}$, такое, что $q(t+s) \not\equiv q(t)$. Тогда в пространстве $L(f)$ содержится ненулевая функция

$$\frac{1}{e(s)} g(t+s) - g(t) = e(t)\, r(t),$$

где $r(t) = R(a_1(t), \dots, a_m(t))$, а $R(u_1, \dots, u_m) = Q(u_1 + a_1(s), \dots, u_m + a_m(s)) - Q(u_1, \dots, u_m)$ — полином степени меньше N, что противоречит предположениям $N > 0$ и минимальности N. $\Box$

Следствие 1. *Если экспоненциальный моном $f(t) = e(t)\, p(t)$ ($e(t)$ — экспоненциальная функция, $p(t)$ — полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$) принадлежит классу $C_H(\widetilde{G})$, то $e(t) \in C_H(\widetilde{G})$ и $p(t) \in C_H(\widetilde{G})$.*

Доказательство. Если $f \in C_H(\widetilde{G})$, то $L(f) \subseteq C_H(\widetilde{G})$. По лемме 4 $e(t) \in L(f)$, поэтому $e(t) \in C_H(\widetilde{G})$. Так как функции $f(t)$ и $e(t)$ содержатся в $C_H(\widetilde{G})$, то и функция $p(t) = \frac{1}{e(t)} f(t)$ содержится в $C_H(\widetilde{G})$. $\Box$

Пусть $p(t) = P(a_1(t), \dots, a_m(t))$ — полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$, $P(u_1, \dots, u_m)$ — комплексный полином. Представим полином P в виде суммы однородных полиномов

$$P(u_1, \dots, u_m) = \sum_{j=0}^{N} P_j(u_1, \dots, u_m),$$

где $P_j(u_1, \ldots, u_m)$ — однородный полином степени j. Пусть $p_j(t) = P_j(a_1(t), \ldots, a_m(t))$. Будем называть функции $p_j(t)$ однородными компонентами функции $p(t)$ степени j.

Лемма 5. *Если полиномиальная функция $p(t)$ принадлежит классу $C_H(\widetilde{G})$, то и все ее однородные компоненты $p_j(t)$ принадлежат классу $C_H(\widetilde{G})$.*

Доказательство. Очевидно, что если $p(t) \in C_H(\widetilde{G})$, то и функции $p(kt)$ принадлежат $C_H(\widetilde{G})$ для любого $k \in \mathbb{N}$ (здесь $kt = t + \cdots + t$ — сумма k элементов $t \in \widetilde{G}$).

Подставляя в равенство

$$p_0(t) + p_1(t) + \cdots + p_N(t) = p(t)$$

kt вместо t и пользуясь однородностью функций $p_j(t)$, получим

$$p_0(t) + kp_1(t) + \cdots + k^N p_N(t) = p(kt). \tag{5}$$

Пусть $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$ — произвольные попарно различные натуральные числа. Подставляя эти числа вместо k в (5), получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_0(t) + p_1(t) + \cdots + p_N(t) & = & p(t), \\ p_0(t) + \alpha_1 p_1(t) + \cdots + \alpha_1^N p_N(t) & = & p(\alpha_1 t), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ p_0(t) + \alpha_N p_1(t) + \cdots + \alpha_N^N p_N(t) & = & p(\alpha_N t). \end{array}\right. \tag{6}$$

Если рассматривать (6) как систему линейных уравнений относительно $p_0(t), \ldots, p_N(t)$, то определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^N \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1 & \alpha_N & \ldots & \alpha_N^N \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Поэтому из системы (6) можно выразить функции $p_j(t)$ как линейные комбинации функций $p(t), p(\alpha_1 t), \ldots, p(\alpha_N t)$. Следовательно $p_j(t) \in C_H(\widetilde{G})$ при $j = 0, 1, \ldots, N$. $\square$

Пусть $p(t) = P(a_1(t), \ldots, a_m(t))$ — полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$, где $P(u_1, \ldots, u_m)$ — комплексный полином от m переменных, $a_1(t), \ldots, a_m(t)$ — аддитивные функции. Если $P(u_1, \ldots, u_m)$ —

однородный полином степени k, то будем говорить, что $p(t)$ — однородная полиномиальная функция степени k. Будем использовать обозначение

$$(\partial_j p)(t) := \frac{\partial P}{\partial u_j}(a_1(t), \dots, a_m(t))$$

и будем называть функции $\partial_j p$ производными от функции p.

Лемма 6. *Пусть $p(t) = P(a_1(t), \dots, a_m(t))$ — однородная полиномиальная функция, и пусть аддитивные функции $a_1(t), \dots, a_m(t)$ линейно независимы. Тогда, если $p(t) \in C_H(\widetilde{G})$, то и все производные функции $\partial_j p(t)$ принадлежат пространству $C_H(\widetilde{G})$, $j = 1, 2, \dots, m$.*

Доказательство. Пусть $u_1, \dots u_m, v_1, \dots, v_m$ — независимые переменные. Из формулы Тейлора следует, что

$$\begin{gathered} P(u_1 + v_1, \dots, u_m + v_m) = \\ = P(u_1, \dots, u_m) + \textstyle\sum_{j=1}^m v_j \, \frac{\partial P}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_m) + \dots , \end{gathered} \tag{7}$$

где многоточие означает слагаемые степени ≥ 2 по переменным v_i. Из (7) следует, что для любого $s \in \widetilde{G}$ справедливо равенство

$$\begin{gathered} p(t + s) = P(a_1(t) + a_1(s), \dots, a_m(t) + \dots a_m(s)) = \\ = p(t) + \textstyle\sum_{j=1}^m a_j(s) \, \partial_j p(t) + \dots . \end{gathered} \tag{8}$$

Так как полиномиальная функция $(\tau_s p)(t) = p(t + s)$ принадлежит множеству $C_H(\widetilde{G})$, то по лемме 5 все ее однородные компоненты принадлежат этому множеству. Если $P(u_1, \dots, u_m)$ — однородный многочлен степени k, то из (7) и (8) вытекает, что однородной компонентой функции $\tau_s p$ степени $(k-1)$ является функция

$$(\tau_s p)_{k-1}(t) = \sum_{j=1}^m a_j(s) \, \partial_j p(t). \tag{9}$$

Из того, что функция $(\tau_s p)_{k-1}$ принадлежит множеству $C_H(\widetilde{G})$, следует

$$(\tau_s p)_{k-1}(t + h) = (\tau_s p)_{k-1}(t) \quad \forall h \in H. \tag{10}$$

С учетом (9), равенство (10) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^m a_j(s) \, (\partial_j p(t + h) - \partial_j p(t)) = 0 \quad \forall s \in \widetilde{G}, \forall h \in H. \tag{11}$$

Так как функции $a_j(s)$ линейно независимые, то из (11) следует, что

$$\partial_j p(t+h) = \partial_j p(t) \quad \forall h \in H,$$

откуда вытекает, что $\partial_j p \in C_H(\widetilde{G})$. $\square$

Лемма 7. *Пусть $p(t)$ — однородная полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$, принадлежащая пространству $C_H(\widetilde{G})$. Тогда функцию $p(t)$ можно представить в виде $p(t) = q(\alpha(t)$, где $q(x)$ — некоторая полиномиальная функция на группе G.*

Доказательство. Пусть $p(t) = P(a_1(t), \ldots, a_m(t)) \in C_H(\widetilde{G})$, где $P(u_1, \ldots, u_m)$ — однородный полином степени k, $a_1(t), \ldots, a_m(t)$ — аддитивные функции на группе $\widetilde{G}$. Без ограничения общности можно считать, что функции $a_1, \ldots, a_m$ линейно независимы.

Требуется доказать, что существует полиномиальная функция $q(x)$ на группе G, такая, что $p(t) = q(\alpha(t)$. Будем доказывать это утверждение индукцией по k. При $k = 0$ утверждение очевидно. Пусть $k \geq 1$ и предположим, что утверждение верно для однородных полиномиальных функций из $C_H(\widetilde{G})$ степени меньше k.

Так как $P(u_1, \ldots, u_m)$ — однородный полином степени k, то справедливо тождество

$$\sum_{j=1}^{m} u_j \frac{\partial P}{\partial u_j}(u_1, \ldots, u_m) = kP(u_1, \ldots, u_m). \tag{12}$$

Подставляя в (12) функции $a_j(t)$ вместо u_j, получим

$$\sum_{j=1}^{m} a_j(t) \partial_j p(t) = kp(t). \tag{13}$$

Из системы функций $\partial_1 p(t), \ldots, \partial_m p(t)$ выберем максимальную линейно независимую подсистему. Обозначим эти линейно независимые функции $p_1(t), \ldots, p_l(t)$, тогда каждую функцию $\partial_j p(t)$, $j = 1, \ldots, m$, можно представить в виде линейной комбинации:

$$\partial_j p(t) = \sum_{s=1}^{l} \lambda_{js} p_s(t), \quad \lambda_{js} \in \mathbb{C}.$$

Подставляя эти линейные комбинации в (13), получим

$$\sum_{j=1}^{m} a_j(t)\left(\sum_{s=1}^{l} \lambda_{js} p_s(t)\right) = kp(t). \tag{14}$$

Равенство (14) можно переписать в виде

$$\sum_{s=1}^{l} A_s(t) p_s(t) = kp(t), \tag{15}$$

где

$$A_s(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{js} a_j(t)$$

— аддитивные функции на группе $\widetilde{G}$. Подставим в (5) $t+h$ вместо t ($h \in H$), тогда, учитывая, что $p_s \in C_H(\widetilde{G})$ (по лемме 6) и функции $A_s(t)$ аддитивные, получим

$$\sum_{s=1}^{l} (A_s(t) + A_s(h)) p_s(t) = kp(t). \tag{16}$$

Вычитая из равенства (16) равенство (15), получаем тождество

$$\sum_{s=1}^{l} A_s(h) p_s(t) = 0 \quad \forall h \in H,\, t \in \widetilde{G}. \tag{17}$$

Так как функции $p_s(t)$ линейно независимые, то из (17) следует, что $A_s(h) = 0$ при $h \in H$, т. е. аддитивные функции $A_s(t)$ принадлежат классу $C_H(\widetilde{G})$. Тогда, по лемме 3, $A_s(t)$ можно представить в виде $A_s(t) = B_s(\alpha(t))$, где $B_s(x)$ — некоторые аддитивные функции на группе G.

Так как $p_s(t)$ — однородная полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$ степени меньше k и $p_s(t) \in C_H(\widetilde{G})$, то по предположению индукции $p_s(t) = q_s(\alpha(t))$, где $q_s(x)$ — некоторая полиномиальная функция на группе G. Окончательно из (15) получим, что

$$p(t) = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^{l} B_s(\alpha(t)) q_s(\alpha(t)) = q(\alpha(t)),$$

где

$$q(x) = \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{l} B_s(x)q_s(x)$$

— полиномиальная функция на группе G. $\square$

Следствие 2. *Если $p(t)$ — полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$ и $p \in C_H(\widetilde{G})$, то функцию $p(t)$ можно представить в виде $p(t) = q(\alpha(t))$, где $q(x)$ — некоторая полиномиальная функция на группе G.*

Доказательство. Представим полиномиальную функцию $p(t)$ в виде суммы однородных полиномиальных функций

$$p(t) = \sum_{j=1}^{N} p_j(t), \tag{18}$$

где p_j — однородная полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$ степени j. Тогда, по лемме 6, $p_j \in C_H(\widetilde{G})$, откуда, по лемме 7, $p_j(t) = q_j(\alpha(t))$ для некоторой полиномиальной функции $q_j(x)$ на группе G. С учетом (18) получим, что $p(t) = q(\alpha(t)$, где

$$q(x) = \sum_{j=1}^{N} q_j(x).\square$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(t) = p(t)e(t)$ — экспоненциальный моном, где $p(t)$ — полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$, $e(t)$ — экспоненциальная функция на группе $\widetilde{G}$. Так как $f \in C_H(\widetilde{G})$, то, по следствию 1, функции $p(t)$ и $e(t)$ тоже принадлежат классу $C_H(\widetilde{G})$. По лемме 2 функцию $e(t)$ можно представить в виде $e(t) = \varepsilon(\alpha(t))$, где $\varepsilon(x)$ — экспоненциальная функция на группе G. По следствию 2 функцию $p(t)$ можно представить в виде $p(t) = q(\alpha(t))$, где $q(x)$ — полиномиальная функция на группе G. Окончательно получаем, что

$$f(t) = q(\alpha(t))\varepsilon(\alpha(t)) = g(\alpha(t),$$

где $g(x) = q(x)\varepsilon(x)$ — экспоненциальный моном на группе G.$\square$

Список литературы

[1] Schvartz L. *Théorie générale des fonctions moynne-périodiques* // Ann. of Math. (2) **48**. (1947). P. 875–929.

[2] Gilbert J. E. On the ideal structure of some algebras of analytic functions // Pacif. J. of Math. **35**. (1978). № 3. P. 625–639.

[3] Платонов С. С. *Спектральный синтез в некоторых функциональных топологических векторных пространствах* // Алгебра и анализ. **22**. (2010). № 5. С. 154–185.

[4] Гуревич Д. И. *Контрпримеры к проблеме Л. Шварца.* Функц. анализ и его прилож. **9**. (1975). № 2. С. 29–35.

[5] Schvartz L. *Analyse et synthése harmonique dans les espaces de distributions* // Can. J. Math. **3**. (1951). P. 503–512.

[6] Székelyhidi L. *Discrete spectral synthesis and its applications.* Berlin: Springer, 2006.

[7] Lefranc M. *Analyse spectrale sur* Z_n // C. R. Acad. Sci. Paris. **246**. (1958). P. 1951–1953.

[8] Székelyhidi L. *On discrete spectral synthesis* // Functional Equations — Results and Advances (Z. Daroćzy and Zs. Páles), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. P. 263–274.

[9] Bereczky A., Székelyhidi L. *Spectral synthesis on torsion groups* // J. Math. Anal. Appl. **304**. (2005). P. 607–613.

[10] Платонов С. С. *Спектральный синтез в пространстве функций экспоненциального роста на конечно порожденной абелевой группе* // Алгебра и анализ. **24**. (2012). № 4. С. 182–200.

[11] Székelyhidi L. *Spectral synthesis problems on locally compact groups* // Monatsh. Math. **161** (2010). № 2. P. 223–232.

[12] Понтрягин Л. С. *Непрерывные группы.* М.: Наука, 1973.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33.
E-mail: platonov@petrsu.ru