N. Yu. Svetova

The relative Renyi dimensions

Recently, many authors are discussing the use of methods of fractal geometry [5] to compare the distributions of the various measures. However, in practical applications, comparison of distributions by comparing the calculated multifractal spectra can be difficult. It often happens that a completely different distributions of measures can give very imperceptible differences in the spectra. To solve this problem, some authors [4,10] propose to use different methods of direct comparison of distributions. These methods are generalizations of the classical multifractal analysis developed in the works L. Olsen [9], K.-S. Lo and S.-M. Ngai [8] and others.

Based on the idea of multifractal analysis [9] and the mutual multifractal analysis [1,2] we propose to introduce new concepts of relative Renyi dimensions for coverings, packings and partitions, as well as we establish some connection between them. It should be noted that these dimension proved mathematically rigorous new analogues "new relative multifractal spectrum of dimensions" proposed for purely practical purposes, R. Dansereau and W. Kinser [6].

DOI: 10.15393/j3.art.2012.1741 **Issues of Analysis.** Vol. 1(19), No. 1, 2012

УДК 511, 514.8, 530.1

Н. Ю. Светова

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ РЕНЬИ

Аннотация. В работе вводятся понятия относительных размерностей Реньи для покрытий, упаковок и разбиений, а также устанавливаются некоторые связи между ними.

Ключевые слова: *мультифракталы, относительная размерность Реньи, разбиения, покрытия, упаковки.*

В последнее время активно обсуждается вопрос использования методов фрактальной геометрии [5] для сравнения распределений различных мер. Однако в практических приложениях сравнение распределений путем сравнения вычисленных мультифрактальных спектров может вызывать затруднения. Часто случается, что совершенно различные распределения мер могут дать слабоуловимые или совсем неуловимые различия в спектрах. Для разрешения этой проблемы рядом авторов [4, 10] предлагаются различные методы прямого сравнения распределений. Эти методы являются обобщениями классического мультифрактального анализа, развитого в работах Л. Олсеном [9], К.-С. Ло, С.-М. Нгаи [8] и другими.

На основе идеи взаимного мультифрактального анализа [1, 2] мы предлагаем рассмотреть относительные размерности Реньи для покрытий, упаковок и разбиений. Стоит отметить, что эти размерности оказались математически строгими аналогами «нового относительного мультифрактального спектра размерностей», предложенного для сугубо практических целей Р. Дансеро и В. Кинсером [6].

Проводя параллель с концепцией вероятностной модели сравнения А. Д. Лантермана и др. [7], Р. Дансеро и В. Кинсер предложили использовать в практических приложениях новый мультифрактальный спектр, служащий, по их мнению, мерой различия между двумя геометрическими объектами. Основная идея модели сравнения базируется на том, что распределение вероятностей p_{true} всех случайных событий, описывающих некоторое оригинальное явление, и распределение p_{mod} случайных событий, описывающих модель этого явления, могут быть сравнимы с помощью расстояния Кульбака-Лейблера

$$D(p_{true}||p_{mod}) \geq D(p_{true}||p_{true}) = 0,$$

где расстояние Кульбака-Лейблера $D(u||v)$ для распределений вероятностей $u(x)$ и $v(x)$ определяется с помощью формулы

$$D(u||v) = \sum_{x \in \chi} u(x) \log_2 \frac{u(x)}{v(x)}.$$

В работе [6] высказано предположение о том, что форма относительного сравнения распределений может быть расширена и до обобщенной энтропии Реньи, и введено понятие «относительной» энтропии Реньи

$$RH_q(u||v) = \left| \frac{1}{q-1} \log_2 \frac{\sum\limits_{x \in \chi} v(x) \left(\dfrac{u(x)}{v(x)} \right)^q}{\sum\limits_{x \in \chi} u(x)} \right|$$

и «нового относительного» мультифрактального спектра размерностей Реньи

$$RD_q(u||v) = \lim_{r \to 0} \frac{\left| \dfrac{1}{q-1} \log_2 \sum\limits_{x \in \chi} v(x) \left(\dfrac{u(x)}{v(x)} \right)^q \right|}{\log_2 r}.$$

Дадим определения наших относительных размерностей Реньи.

Пусть в пространстве $X \subset \mathbb{R}^d$ заданы две вероятностные борелевские меры μ и ν с общим носителем $E \subset X$. Замкнутый шар радиуса r с центром в точке $x \in E$ обозначим $B_r(x)$.

Для любого $r > 0$ *под центрированным покрытием* множества E здесь будем понимать такое счетное или конечное семейство $\{B_r(x_i)\}_i$ шаров фиксированного радиуса r, что $E \subseteq \cup B_r(x_i)$ и $x_i \in E$. Конечное или счетное семейство $\{B_r(x_i)\}_i$ дизъюнктных шаров с центрами из множества E и с фиксированным радиусом r будем называть *центрированной упаковкой* множества E.

Пусть $\{B_r(x_i)\}_i$ – центрированная упаковка E шарами одинакового фиксированного радиуса r. Для $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ определим

$$L^q_{\mu,\nu,r}(E) = \sup\left\{\sum_{i\in I}(\mu B_r(x_i))^q(\nu B_r(x_i))^{1-q}\right\},$$

где точная верхняя грань берется по всем возможным центрированным упаковкам $\{B_r(x_i)\}_i$ множества E.

Относительные размерности Реньи $\underline{P}_{\mu,\nu}(q)$, $\overline{P}_{\mu,\nu}(q)$ для упаковок определим следующим образом

$$\underline{P}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1}\lim_{r\to 0+}\inf\frac{\ln L^q_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1;$$

$$\overline{P}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1}\lim_{r\to 0+}\sup\frac{\ln L^q_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1.$$

Для вещественного числа $q \neq 1$ определим

$$N^q_{\mu,\nu,r}(E) = \inf\left\{\sum_{i\in I}(\mu B_r(x_i))^q(\nu B_r(x_i))^{1-q}\right\},$$

где точная верхняя грань берется по всем возможным центрированным покрытиям $\{B_r(x_i)\}_i$ множества E шарами одинакового фиксированного радиуса r.

Относительные размерности Реньи $\underline{C}^q_{\mu,\nu}(E)$, $\overline{C}^q_{\mu,\nu}(E)$ для покрытий определим следующим образом

$$\underline{C}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1}\lim_{r\to 0+}\inf\frac{\ln N^q_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1;$$

$$\overline{C}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1}\lim_{r\to 0+}\sup\frac{\ln N^q_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1.$$

Для любого натурального числа n рассмотрим разбиение $\mathcal{P}_n$ пространства X уровня n. Под элементами разбиения будем понимать ячейки вида

$$C = \prod_{k=1}^{d}\left[\frac{l_k}{2^n}; \frac{l_k+1}{2^n}\right), \quad \text{где} \quad l_1, \ldots, l_d \in \mathbb{Z}.$$

Для множества E, вероятностных борелевских мер μ, ν и вещественного $q \neq 1$ положим

$$M^q_{\mu,\nu,n}(E) = \inf\left\{ \sum_{i\in I:\, C_i\cap E\neq\emptyset} (\mu C_i)^q(\nu C_i)^{1-q}, \qquad E \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем возможным разбиениям $\mathcal{P}_n$ метрического пространства X.

$$\underline{D}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1}\lim_{r\to 0+}\inf \frac{\ln M^{q,t,}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1;$$

$$\overline{D}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1}\lim_{r\to 0+}\sup \frac{\ln M^{q,}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1.$$

Теорема 1. *Для относительных размерностей Реньи имеют место следующие утверждения.*
1. Если $q > 1$, *то*

$$\underline{C}_{\mu,\nu}(q) \leq \underline{P}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{C}_{\mu,\nu}(q) \leq \overline{P}_{\mu,\nu}(q).$$

2. Если $q < 1$, *то*

$$\underline{C}_{\mu,\nu}(q) \geq \underline{P}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{C}_{\mu,\nu}(q) \geq \overline{P}_{\mu,\nu}(q).$$

3. Если $q > 1$, *то*

$$\underline{D}_{\mu,\nu}(q) \leq \underline{P}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{D}_{\mu,\nu}(q) \leq \overline{P}_{\mu,\nu}(q).$$

4. Если $q \in (0,1)$, *то*

$$\underline{P}_{\mu,\nu}(q) = \underline{D}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{P}_{\mu,\nu}(q) = \overline{D}_{\mu,\nu}(q).$$

Доказательство. Доказательство пунктов 1 и 2 сводится к проверке неравенства $N^q_{\mu,\nu,r}(E) \leq L^q_{\mu,\nu,r}(E)$.

Пусть $\{B_r(x_i)\}_{i\in I}$ — центрированное покрытие множества E замкнутыми шарами фиксированного радиуса r. Из теоремы Безиковича о покрытии [3] следует, что обязательно найдется ξ подсемейств $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_\xi$ покрытия $\{B_r(x_i)\}_{i\in I}$, для которых выполнены условия:

- множество E является подмножеством $\bigcup\limits_{j=1}^{\xi} \bigcup\limits_{B'_r(x_i)\in\mathcal{A}_j} B'_r(x_i)$;

- для любого $j = 1, \dots, \xi$ множество $\mathcal{A}_j$ состоит из попарно дизъюнктных множеств.

Тогда

$$N^q_{\mu,\nu,r}(E) \le \left\{ \sum_i (\mu B_r(x_i))^q (\nu B_r(x_i))^{1-q} \right\} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\xi} \sum_{B\in\mathcal{A}_j} \left(\mu B'_r(x_i)\right)^q \left(\nu B'_r(x_i)\right)^{1-q} \le \sum_{j=1}^{\xi} L^q_{\mu,\nu,r}(E) = \xi \cdot L^q_{\mu,\nu,r}(E).$$

3. Пусть параметр $q > 1$. Выберем разбиение $\mathcal{P}_n$ пространства X уровня n на ячейки C_j, $j \in J$. Зададим центрированную упаковку $\{B_r(x_i)\}_{i\in I}$ множества E шарами с таким радиусом r, чтобы $\dfrac{\sqrt{d}}{2^n} < r < \dfrac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}$. Для каждого центра x_i, $i \in I$, шара упаковки рассмотрим семейство ячеек

$$\mathcal{A}_i = \{C_{i_k} \in \mathcal{P}_n : C_{i_k} \cap B_r(x_i) \ne \emptyset\},$$

покрывающих шар $B_r(x_i)$. Очевидно, что любой шар упаковки можно покрыть конечным набором ячеек, поэтому $\operatorname{card}\mathcal{A}_i < N$ для любого $i \in I$. Поскольку радиус элементов упаковки превосходит $\frac{\sqrt{d}}{2^n}$, то найдется такая ячейка C^*_i, которая целиком будем располагаться в заданном шаре, т. е. $C^*_i \subset B_r(x_i) \subset \mathcal{A}_i$.

Напомним хорошо известное неравенство. Пусть $0 \le a_i \le 1$. Тогда для любого $q > 0$ найдется такая константа K, зависящая от q и количества слагаемых N, что верно

$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)^q \le K(q,N) \sum_{i=1}^{N} a_i^q. \tag{1}$$

Если $q \in (0;1)$, то $K(q,N) \equiv 1$. Тогда

$$\sum_i (\mu B_r(x_i))^q (\nu B_r(x_i))^{1-q} \le \sum_i \left[\mu\left(\bigcup_{C_{i_k}\in\mathcal{A}_i} C_{i_k}\right)\right]^q (\nu B_r(x_i))^{1-q} \le$$

$$\le \sum_i \left(\sum_k \mu C_{i_k}\right)^q (\nu B_r(x_i))^{1-q} \le$$

$$\leq \sum_i K(q, \operatorname{card}\mathcal{A}_i)\left(\sum_k (\mu C_{i_k})^q\right)(\nu C_i^*)^{1-q} \leq$$

$$\leq K'(q)\sum_i \left(\sum_k (\mu C_{i_k})^q\right)(\nu C_i^*)^{1-q} \leq K'(q)\sum_i \sum_k (\mu C_{i_k})^q (\nu C_{i_k})^{1-q},$$

где $K'(q) = \max_i\{K(q, \operatorname{card}\mathcal{A}_i)\}$.

Выберем теперь произвольную ячейку C_j разбиения $\mathcal{P}_n$ и рассмотрим множество $\mathcal{D}_j$ пересекающих ее всевозможных шаров упаковки, т. е.

$$\mathcal{D}_j = \{B_r(x_s) : B_r(x_s) \cap C_j \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, существует конечное число M такое, что $\operatorname{card}\mathcal{D}_j < M$ для любого j. Поэтому, продолжая цепочку неравенств, получим

$$K(q,N)\sum_i \sum_k (\mu C_{i_k})^q (\nu C_{i_k})^{1-q} \leq K(q,N)M \sum_{j:E\cap C_j \neq \emptyset} (\mu C_j)^q (\nu C_j)^{1-q}.$$

Отсюда следует, что

$$L^q_{\mu,\nu,r}(E) \leq M^q_{\mu,\nu,n}(E).$$

Переходя к соответствующим переделам и деля обе части на $q-1$, получим

$$\underline{D}_{\mu,\nu}(q) \leq \underline{P}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{D}_{\mu,\nu}(q) \leq \overline{P}_{\mu,\nu}(q).$$

4. Пусть $q \in (0,1)$, задано $\{B_r(x_i)\}_{i\in I}$ – центрированная упаковка множества E шарами радиуса r. Подберем n таким, чтобы $\frac{1}{2^{n+1}} <$ $< r \leq \frac{1}{2^n}$. Для любого элемента упаковки $B_r(x_i)$ можно выбрать ячейки C_i разбиения $\mathcal{P}_n$ пространства X, пересекающие выбранный шар. Рассмотрим семейство $\mathcal{C}_i$ таких ячеек для каждого $B_r(x_i)$

$$\mathcal{C}_i = \{C_{i_k} \in \mathcal{P}_n : \quad C_{i_k} \cap B_r(x_i) \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, что элементов семейства $\mathcal{C}_i$ не более 3^d. Тогда, используя неравенство (1), будем иметь

$$\sum_{i\in I}(\mu B_r(x_i))^q (\nu B_r(x_i))^{1-q} \leq \sum_{i\in I}\left(\sum_{C_{i_k}\subset \mathcal{C}_i} \mu C_{i_k}\right)^q \cdot \left(\sum_{C_{i_k}\subset \mathcal{C}_i} \nu C_{i_k}\right)^{1-q} \leq$$

$$\leq \sum_{i\in I}\left(\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q\right)\cdot\left(\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}(\nu C_{i_k})^{1-q}\right)=$$
$$=\sum_{i\in I}\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}\sum_{C_{i_l}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_l})^{1-q}\leq A\cdot\sum_{i\in I}\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_k})^{1-q},$$

где A – константа, удовлетворяющая условию

$$\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}\sum_{C_{i_l}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_l})^{1-q}\leq A\cdot\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_k})^{1-q}.$$

Для каждой ячейки C_j разбиения $\mathcal{P}_n$, имеющей непустое пересечение с множеством E, можно выбрать множество замкнутых шаров $B'_r(x_i)$, пересекающихся с ячейкой C_j. Пусть максимальное число таких шаров равно D, тогда

$$A\cdot\sum_{i\in I}\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_k})^{1-q}\leq A\cdot D\cdot\sum_{j:C_j\cap E\neq\emptyset}(\mu C_j)^q(\nu C_j)^{1-q}.$$

Отсюда следует, что для $q\in(0,1)$ выполнены неравенства

$$\underline{P}_{\mu,\nu}(q)\geq\underline{D}_{\mu,\nu}(q),\qquad \overline{P}_{\mu,\nu}(q)\geq\overline{D}_{\mu,\nu}(q).$$

Докажем неравенства в обратную сторону. Допустим, что дано произвольное разбиение $\mathcal{P}_n$ пространства X на ячейки с длиной стороны $\frac{1}{2^n}$. Для каждой ячейки C_i этого разбиения, пересекающейся с множеством E, можно выбрать точку $x_i\in C_i\cap E$ и построить замкнутый шар с центром в точке x_i радиуса $r=\sqrt{d}/2^{n-1}$. Все построенные таким образом шары объединим в одно семейство

$$\mathcal{A}_0=\left\{B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_i)\right\}_{i\in I}.$$

Оно, очевидно, является покрытием множества E.

Из всех элементов семейства $\mathcal{A}_0$ выберем шар $B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_1})$, для которого произведение $\mu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_1})\cdot\nu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_1})$ является максимальным. Положим

$$\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_0\setminus B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_1}).$$

Из $\mathcal{A}_1$ выберем второй шар $B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_2})$, не пересекающийся с первым, для которого верно

$$\mu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_2}) \cdot \nu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_2}) = \max\{\mu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_i) \cdot \nu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_i)\}.$$

Далее, действуя по описанному алгоритму, построим семейство

$$\mathcal{B} = \left\{ B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_k}) \right\}$$

дизъюнктных шаров. Заметим, что для зафиксированного шара $B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x^*_{i_k})$ семейства $\mathcal{B}$ количество элементов семейства $\mathcal{A}_0$, пересекающих этот шар, будет не превосходить некоторой константы C, зависящей от размерности d пространства X.

Для любой упаковки $\{B_r(x_j)\}_{j\in J}$ множества E шарами радиуса $r = \dfrac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}$ получим

$$\begin{aligned}
M^q_{\mu,\nu,r}(E) \geq &\sum_{j\in J}(\mu B_r(x_j))^q(\nu B_r(x_j))^{1-q} \geq \\
\geq &\sum_{B_r(x_{i_k})\in\mathcal{B}}(\mu B_r(x_{i_k}))^q(\nu B_r(x_{i_k}))^{1-q} \geq \\
\geq &\frac{1}{C}\sum_{B_r(x_i)\in\mathcal{A}_0}(\mu B_r(x_i))^q\left(\nu B_r(x_i)\right)^{1-q} \geq \frac{1}{C}\sum_{i\in I}(\mu C_i)^q(\nu C_i)^{1-q} \geq \\
\geq &\frac{1}{C}\inf_{\mathcal{P}_n}\sum_{i\in I}(\mu C_i)^q(\nu C_i)^{1-q}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$L^q_{\mu,\nu,n}(E) \geq M^q_{\mu,\nu,n}(E),$$

что в свою очередь для $q \in (0,1)$ влечет

$$\underline{P}_{\mu,\nu}(q) \leq \underline{D}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{P}_{\mu,\nu}(q) \leq \overline{D}_{\mu,\nu}(q).\square$$

Список литературы

[1] Светова Н. Ю. *Взаимные мультифрактальные спектры I. Точные спектры* // Труды Петрозаводского государственного университета. Сер. Математика. Вып. 11. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 2004. С. 42–47.

[2] Светова Н. Ю. *Взаимные мультифрактальные спектры II. Спектры Лежандра, Хентшель — Прокачиа и спектры, определенные для разбиений* // Труды ПетрГУ. Сер. Математика. 2004. Вып. 11. С. 47–56.

[3] Besicovich A. S. *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions* / A. S. Besicovich // Proc. Cambridge Philos. Soc. Vol. 41, 1945. P. 103–110.

[4] Cole J. *Relative multifractal analysis* / J. Cole // Chaos, solitons & fractals. 2000. № 11. P. 2233–2250.

[5] Falconer K. J. *Fractal geometry. Mathematical Foundations and Applications* / K. J. Falconer. John Wiley & Sons. New York, 1990. 337 p.

[6] Dansereau R. *New relative multifractal dimension measures* / R. Dansereau, W. Kinser // 26th International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'2001). Salt Lake City. Utah. May 7–11. 2001. 4 p.

[7] Lanterman A. D. *Kullback-Leibler distances for quatifying clutter and models* / A. D. Lanterman, J. A. O'Sullivan, M. I. Miller // Optical engineering. 1999. vol. 38. № 2. P. 2134–2146.

[8] Lau K.-S. *Multifractal measures and a weak separation condition* / K.-S. Lau, S.-M. Ngai // Advances in mathematics. 1999. № 141. P. 45–96.

[9] Olsen L. *A multifractal formalism* / L. Olsen // Advances in mathematics. 1995. № 116. P. 82–195.

[10] Riedi R. H. *Conditional and relative multifractal spectra* / R. H. Riedi, I. Scheuring // Fractals. 1997. vol. 5. № 1. P. 153–168.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33.