DOI: 10.15393/j3.art.2012.1741 **Issues of Analysis.** Vol. 1(19), No. 1, 2012

УДК 511, 514.8, 530.1

Н. Ю. Светова

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ РЕНЬИ

Аннотация. В работе вводятся понятия относительных размерностей Реньи для покрытий, упаковок и разбиений, а также устанавливаются некоторые связи между ними.

Ключевые слова: *мультифракталы, относительная размерность Реньи, разбиения, покрытия, упаковки.*

В последнее время активно обсуждается вопрос использования методов фрактальной геометрии [5] для сравнения распределений различных мер. Однако в практических приложениях сравнение распределений путем сравнения вычисленных мультифрактальных спектров может вызывать затруднения. Часто случается, что совершенно различные распределения мер могут дать слабоуловимые или совсем неуловимые различия в спектрах. Для разрешения этой проблемы рядом авторов [4, 10] предлагаются различные методы прямого сравнения распределений. Эти методы являются обобщениями классического мультифрактального анализа, развитого в работах Л. Олсеном [9], К.-С. Ло, С.-М. Нгаи [8] и другими.

На основе идеи взаимного мультифрактального анализа [1, 2] мы предлагаем рассмотреть относительные размерности Реньи для покрытий, упаковок и разбиений. Стоит отметить, что эти размерности оказались математически строгими аналогами «нового относительного мультифрактального спектра размерностей», предложенного для сугубо практических целей Р. Дансеро и В. Кинсером [6].

Проводя параллель с концепцией вероятностной модели сравнения А. Д. Лантермана и др. [7], Р. Дансеро и В. Кинсер предложили использовать в практических приложениях новый мультифрактальный спектр, служащий, по их мнению, мерой различия между двумя геометрическими объектами. Основная идея модели сравнения базируется на том, что распределение вероятностей p_{true} всех случайных событий, описывающих некоторое оригинальное явление, и распределение p_{mod} случайных событий, описывающих модель этого явления, могут быть сравнимы с помощью расстояния Кульбака-Лейблера

$$D(p_{true}||p_{mod}) \geq D(p_{true}||p_{true}) = 0,$$

где расстояние Кульбака-Лейблера $D(u||v)$ для распределений вероятностей $u(x)$ и $v(x)$ определяется с помощью формулы

$$D(u||v) = \sum_{x \in \chi} u(x) \log_2 \frac{u(x)}{v(x)}.$$

В работе [6] высказано предположение о том, что форма относительного сравнения распределений может быть расширена и до обобщенной энтропии Реньи, и введено понятие «относительной» энтропии Реньи

$$RH_q(u||v) = \left| \frac{1}{q-1} \log_2 \frac{\sum\limits_{x \in \chi} v(x) \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)^q}{\sum\limits_{x \in \chi} u(x)} \right|$$

и «нового относительного» мультифрактального спектра размерностей Реньи

$$RD_q(u||v) = \lim_{r \to 0} \frac{\left| \frac{1}{q-1} \log_2 \sum\limits_{x \in \chi} v(x) \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)^q \right|}{\log_2 r}.$$

Дадим определения наших относительных размерностей Реньи.

Пусть в пространстве $X \subset \mathbb{R}^d$ заданы две вероятностные борелевские меры μ и ν с общим носителем $E \subset X$. Замкнутый шар радиуса r с центром в точке $x \in E$ обозначим $B_r(x)$.

Для любого $r > 0$ *под центрированным покрытием* множества E здесь будем понимать такое счетное или конечное семейство $\{B_r(x_i)\}_i$ шаров фиксированного радиуса r, что $E \subseteq \cup B_r(x_i)$ и $x_i \in E$. Конечное или счетное семейство $\{B_r(x_i)\}_i$ дизъюнктных шаров с центрами из множества E и с фиксированным радиусом r будем называть *центрированной упаковкой* множества E.

Пусть $\{B_r(x_i)\}_i$ – центрированная упаковка E шарами одинакового фиксированного радиуса r. Для $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ определим

$$L^q_{\mu,\nu,r}(E) = \sup\left\{\sum_{i\in I}(\mu B_r(x_i))^q(\nu B_r(x_i))^{1-q}\right\},$$

где точная верхняя грань берется по всем возможным центрированным упаковкам $\{B_r(x_i)\}_i$ множества E.

Относительные размерности Реньи $\underline{P}_{\mu,\nu}(q)$, $\overline{P}_{\mu,\nu}(q)$ для упаковок определим следующим образом

$$\underline{P}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1}\lim_{r\to 0+}\inf\frac{\ln L^q_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1;$$

$$\overline{P}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1}\lim_{r\to 0+}\sup\frac{\ln L^q_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1.$$

Для вещественного числа $q \neq 1$ определим

$$N^q_{\mu,\nu,r}(E) = \inf\left\{\sum_{i\in I}(\mu B_r(x_i))^q(\nu B_r(x_i))^{1-q}\right\},$$

где точная верхняя грань берется по всем возможным центрированным покрытиям $\{B_r(x_i)\}_i$ множества E шарами одинакового фиксированного радиуса r.

Относительные размерности Реньи $\underline{C}^q_{\mu,\nu}(E)$, $\overline{C}^q_{\mu,\nu}(E)$ для покрытий определим следующим образом

$$\underline{C}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1}\lim_{r\to 0+}\inf\frac{\ln N^q_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1;$$

$$\overline{C}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1}\lim_{r\to 0+}\sup\frac{\ln N^q_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1.$$

Для любого натурального числа n рассмотрим разбиение $\mathcal{P}_n$ пространства X уровня n. Под элементами разбиения будем понимать ячейки вида

$$C = \prod_{k=1}^{d}\left[\frac{l_k}{2^n}; \frac{l_k+1}{2^n}\right), \quad \text{где} \quad l_1,\ldots,l_d \in \mathbb{Z}.$$

Для множества E, вероятностных борелевских мер μ, ν и вещественного $q \neq 1$ положим

$$M^q_{\mu,\nu,n}(E) = \inf\left\{ \sum_{i\in I\colon C_i\cap E\neq\emptyset} (\mu C_i)^q(\nu C_i)^{1-q}, \qquad E \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем возможным разбиениям $\mathcal{P}_n$ метрического пространства X.

$$\underline{D}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1} \lim_{r\to 0+} \inf \frac{\ln M^{q,t,}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1;$$

$$\overline{D}_{\mu,\nu}(q) = \frac{1}{q-1} \lim_{r\to 0+} \sup \frac{\ln M^{q,}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \qquad q \neq 1.$$

Теорема 1. *Для относительных размерностей Реньи имеют место следующие утверждения.*
1. Если $q > 1$, то

$$\underline{C}_{\mu,\nu}(q) \leq \underline{P}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{C}_{\mu,\nu}(q) \leq \overline{P}_{\mu,\nu}(q).$$

2. Если $q < 1$, то

$$\underline{C}_{\mu,\nu}(q) \geq \underline{P}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{C}_{\mu,\nu}(q) \geq \overline{P}_{\mu,\nu}(q).$$

3. Если $q > 1$, то

$$\underline{D}_{\mu,\nu}(q) \leq \underline{P}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{D}_{\mu,\nu}(q) \leq \overline{P}_{\mu,\nu}(q).$$

4. Если $q \in (0,1)$, то

$$\underline{P}_{\mu,\nu}(q) = \underline{D}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{P}_{\mu,\nu}(q) = \overline{D}_{\mu,\nu}(q).$$

Доказательство. Доказательство пунктов 1 и 2 сводится к проверке неравенства $N^q_{\mu,\nu,r}(E) \leq L^q_{\mu,\nu,r}(E)$.

Пусть $\{B_r(x_i)\}_{i\in I}$ — центрированное покрытие множества E замкнутыми шарами фиксированного радиуса r. Из теоремы Безиковича о покрытии [3] следует, что обязательно найдется ξ подсемейств $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_\xi$ покрытия $\{B_r(x_i)\}_{i\in I}$, для которых выполнены условия:

- множество E является подмножеством $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\xi} \bigcup_{B'_r(x_i)\in\mathcal{A}_j} B'_r(x_i)$;

- для любого $j = 1, \dots, \xi$ множество $\mathcal{A}_j$ состоит из попарно дизъюнктных множеств.

Тогда

$$N^q_{\mu,\nu,r}(E) \le \left\{ \sum_i (\mu B_r(x_i))^q (\nu B_r(x_i))^{1-q} \right\} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\xi} \sum_{B \in \mathcal{A}_j} \left(\mu B'_r(x_i)\right)^q \left(\nu B'_r(x_i)\right)^{1-q} \le \sum_{j=1}^{\xi} L^q_{\mu,\nu,r}(E) = \xi \cdot L^q_{\mu,\nu,r}(E).$$

3. Пусть параметр $q > 1$. Выберем разбиение $\mathcal{P}_n$ пространства X уровня n на ячейки C_j, $j \in J$. Зададим центрированную упаковку $\{B_r(x_i)\}_{i \in I}$ множества E шарами с таким радиусом r, чтобы $\dfrac{\sqrt{d}}{2^n} < r < \dfrac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}$. Для каждого центра x_i, $i \in I$, шара упаковки рассмотрим семейство ячеек

$$\mathcal{A}_i = \{C_{i_k} \in \mathcal{P}_n : C_{i_k} \cap B_r(x_i) \ne \emptyset\},$$

покрывающих шар $B_r(x_i)$. Очевидно, что любой шар упаковки можно покрыть конечным набором ячеек, поэтому $\operatorname{card} \mathcal{A}_i < N$ для любого $i \in I$. Поскольку радиус элементов упаковки превосходит $\frac{\sqrt{d}}{2^n}$, то найдется такая ячейка C_i^*, которая целиком будем располагаться в заданном шаре, т. е. $C_i^* \subset B_r(x_i) \subset \mathcal{A}_i$.

Напомним хорошо известное неравенство. Пусть $0 \le a_i \le 1$. Тогда для любого $q > 0$ найдется такая константа K, зависящая от q и количества слагаемых N, что верно

$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i \right)^q \le K(q, N) \sum_{i=1}^{N} a_i^q. \tag{1}$$

Если $q \in (0; 1)$, то $K(q, N) \equiv 1$. Тогда

$$\sum_i (\mu B_r(x_i))^q (\nu B_r(x_i))^{1-q} \le \sum_i \left[\mu \left(\bigcup_{C_{i_k} \in \mathcal{A}_i} C_{i_k} \right) \right]^q (\nu B_r(x_i))^{1-q} \le$$

$$\le \sum_i \left(\sum_k \mu C_{i_k} \right)^q (\nu B_r(x_i))^{1-q} \le$$

$$\leq \sum_i K(q, \operatorname{card}\mathcal{A}_i)\left(\sum_k (\mu C_{i_k})^q\right)(\nu C_i^*)^{1-q} \leq$$

$$\leq K'(q)\sum_i\left(\sum_k (\mu C_{i_k})^q\right)(\nu C_i^*)^{1-q} \leq K'(q)\sum_i\sum_k (\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_k})^{1-q},$$

где $K'(q) = \max_i\{K(q, \operatorname{card}\mathcal{A}_i)\}$.

Выберем теперь произвольную ячейку C_j разбиения $\mathcal{P}_n$ и рассмотрим множество $\mathcal{D}_j$ пересекающих ее всевозможных шаров упаковки, т. е.

$$\mathcal{D}_j = \{B_r(x_s) : B_r(x_s) \cap C_j \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, существует конечное число M такое, что $\operatorname{card}\mathcal{D}_j < M$ для любого j. Поэтому, продолжая цепочку неравенств, получим

$$K(q,N)\sum_i\sum_k (\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_k})^{1-q} \leq K(q,N)M\sum_{j:E\cap C_j\neq\emptyset}(\mu C_j)^q(\nu C_j)^{1-q}.$$

Отсюда следует, что

$$L^q_{\mu,\nu,r}(E) \leq M^q_{\mu,\nu,n}(E).$$

Переходя к соответствующим переделам и деля обе части на $q-1$, получим

$$\underline{D}_{\mu,\nu}(q) \leq \underline{P}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{D}_{\mu,\nu}(q) \leq \overline{P}_{\mu,\nu}(q).$$

4. Пусть $q \in (0,1)$, задано $\{B_r(x_i)\}_{i\in I}$ – центрированная упаковка множества E шарами радиуса r. Подберем n таким, чтобы $\frac{1}{2^{n+1}} <$ $< r \leq \frac{1}{2^n}$. Для любого элемента упаковки $B_r(x_i)$ можно выбрать ячейки C_i разбиения $\mathcal{P}_n$ пространства X, пересекающие выбранный шар. Рассмотрим семейство $\mathcal{C}_i$ таких ячеек для каждого $B_r(x_i)$

$$\mathcal{C}_i = \{C_{i_k} \in \mathcal{P}_n : \quad C_{i_k} \cap B_r(x_i) \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, что элементов семейства $\mathcal{C}_i$ не более 3^d. Тогда, используя неравенство (1), будем иметь

$$\sum_{i\in I}(\mu B_r(x_i))^q(\nu B_r(x_i))^{1-q} \leq \sum_{i\in I}\left(\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}\mu C_{i_k}\right)^q\cdot\left(\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}\nu C_{i_k}\right)^{1-q} \leq$$

$$\leq \sum_{i\in I}\left(\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q\right)\cdot\left(\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}(\nu C_{i_k})^{1-q}\right)=$$

$$=\sum_{i\in I}\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}\sum_{C_{i_l}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_l})^{1-q}\leq A\cdot\sum_{i\in I}\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_k})^{1-q},$$

где A – константа, удовлетворяющая условию

$$\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}\sum_{C_{i_l}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_l})^{1-q}\leq A\cdot\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_k})^{1-q}.$$

Для каждой ячейки C_j разбиения $\mathcal{P}_n$, имеющей непустое пересечение с множеством E, можно выбрать множество замкнутых шаров $B'_r(x_i)$, пересекающихся с ячейкой C_j. Пусть максимальное число таких шаров равно D, тогда

$$A\cdot\sum_{i\in I}\sum_{C_{i_k}\subset\mathcal{C}_i}(\mu C_{i_k})^q(\nu C_{i_k})^{1-q}\leq A\cdot D\cdot\sum_{j:C_j\cap E\neq\emptyset}(\mu C_j)^q(\nu C_j)^{1-q}.$$

Отсюда следует, что для $q\in(0,1)$ выполнены неравенства

$$\underline{P}_{\mu,\nu}(q)\geq\underline{D}_{\mu,\nu}(q),\qquad\overline{P}_{\mu,\nu}(q)\geq\overline{D}_{\mu,\nu}(q).$$

Докажем неравенства в обратную сторону. Допустим, что дано произвольное разбиение $\mathcal{P}_n$ пространства X на ячейки с длиной стороны $\frac{1}{2^n}$. Для каждой ячейки C_i этого разбиения, пересекающейся с множеством E, можно выбрать точку $x_i\in C_i\cap E$ и построить замкнутый шар с центром в точке x_i радиуса $r=\sqrt{d}/2^{n-1}$. Все построенные таким образом шары объединим в одно семейство

$$\mathcal{A}_0=\left\{B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_i)\right\}_{i\in I}.$$

Оно, очевидно, является покрытием множества E.

Из всех элементов семейства $\mathcal{A}_0$ выберем шар $B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_1})$, для которого произведение $\mu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_1})\cdot\nu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_1})$ является максимальным. Положим

$$\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_0\setminus B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_1}).$$

Из $\mathcal{A}_1$ выберем второй шар $B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_2})$, не пересекающийся с первым, для которого верно

$$\mu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_2}) \cdot \nu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_2}) = \max\{\mu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_i) \cdot \nu B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_i)\}.$$

Далее, действуя по описанному алгоритму, построим семейство

$$\mathcal{B} = \left\{ B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x_{i_k}) \right\}$$

дизъюнктных шаров. Заметим, что для зафиксированного шара $B_{\frac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}}(x^*_{i_k})$ семейства $\mathcal{B}$ количество элементов семейства $\mathcal{A}_0$, пересекающих этот шар, будет не превосходить некоторой константы C, зависящей от размерности d пространства X.

Для любой упаковки $\{B_r(x_j)\}_{j\in J}$ множества E шарами радиуса $r = \dfrac{\sqrt{d}}{2^{n-1}}$ получим

$$\begin{aligned} M^q_{\mu,\nu,r}(E) \geq & \sum_{j\in J} (\mu B_r(x_j))^q (\nu B_r(x_j))^{1-q} \geq \\ \geq & \sum_{B_r(x_{i_k})\in\mathcal{B}} (\mu B_r(x_{i_k}))^q (\nu B_r(x_{i_k}))^{1-q} \geq \\ \geq & \frac{1}{C} \sum_{B_r(x_i)\in\mathcal{A}_0} (\mu B_r(x_i))^q \left(\nu B_r(x_i)\right)^{1-q} \geq \frac{1}{C}\sum_{i\in I} (\mu C_i)^q (\nu C_i)^{1-q} \geq \\ \geq & \frac{1}{C} \inf_{\mathcal{P}_n} \sum_{i\in I} (\mu C_i)^q (\nu C_i)^{1-q}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$L^q_{\mu,\nu,n}(E) \geq M^q_{\mu,\nu,n}(E),$$

что в свою очередь для $q \in (0,1)$ влечет

$$\underline{P}_{\mu,\nu}(q) \leq \underline{D}_{\mu,\nu}(q), \qquad \overline{P}_{\mu,\nu}(q) \leq \overline{D}_{\mu,\nu}(q).\square$$

Список литературы

[1] Светова Н. Ю. *Взаимные мультифрактальные спектры I. Точные спектры* // Труды Петрозаводского государственного университета. Сер. Математика. Вып. 11. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 2004. С. 42–47.

[2] Светова Н. Ю. *Взаимные мультифрактальные спектры II. Спектры Лежандра, Хентшель — Прокачиа и спектры, определенные для разбиений* // Труды ПетрГУ. Сер. Математика. 2004. Вып. 11. С. 47–56.

[3] Besicovich A. S. *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions* / A. S. Besicovich // Proc. Cambridge Philos. Soc. Vol. 41, 1945. P. 103–110.

[4] Cole J. *Relative multifractal analysis* / J. Cole // Chaos, solitons & fractals. 2000. № 11. P. 2233–2250.

[5] Falconer K. J. *Fractal geometry. Mathematical Foundations and Applications* / K. J. Falconer. John Wiley & Sons. New York, 1990. 337 p.

[6] Dansereau R. *New relative multifractal dimension measures* / R. Dansereau, W. Kinser // 26th International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'2001). Salt Lake City. Utah. May 7–11. 2001. 4 p.

[7] Lanterman A. D. *Kullback-Leibler distances for quatifying clutter and models* / A. D. Lanterman, J. A. O'Sullivan, M. I. Miller // Optical engineering. 1999. vol. 38. № 2. P. 2134–2146.

[8] Lau K.-S. *Multifractal measures and a weak separation condition* / K.-S. Lau, S.-M. Ngai // Advances in mathematics. 1999. № 141. P. 45–96.

[9] Olsen L. *A multifractal formalism* / L. Olsen // Advances in mathematics. 1995. № 116. P. 82–195.

[10] Riedi R. H. *Conditional and relative multifractal spectra* / R. H. Riedi, I. Scheuring // Fractals. 1997. vol. 5. № 1. P. 153–168.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33.