

УДК 517.9
Зайка Ю.В.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ИДЕАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача наблюдения фазового вектора нелинейной возмущаемой динамической системы. На основе принципа двойственности задач наблюдения и управления строится множество идеально наблюдаемых функций, представимых интегральными операторами от выходов измерителей.

§1. Введение

Пусть движение объекта описывается в области $W=(t_0, t_1) \times U \in \mathbb{R}^{n+1}$ векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \sum_{i=1}^r \xi_i(t) f_i(x), \quad (1)$$

где $f, f_i \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_r(t))'$ - вектор возмущений (или программных управлений), $|\xi_i(t)| \leq 1 = \text{const}$. Предполагается, что допустимые $\xi_i(\cdot)$ являются кусочно-непрерывными, $[0, T] \subset (t_0, t_1)$ и при $\xi(\cdot) = 0$ в (1) решения $x(\cdot; x, t)$, $x \in U$, $t \in [0, T]$, продолжимы на $[0, T]$. Нули линейных пространств обозначаем одним символом.

Начальные данные и возмущения неизвестны, а доступная информация о движении задается значениями (измерениями) вектор-функции

$$y(t) = g(x(t)), \quad g \in C^1(U, \mathbb{R}^m). \quad (2)$$

Требуется определить такие (идеально наблюдаемые по аналогии с (1)) функции $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^1$, значения которых $\varphi(x(T))$ независимо от реализации допустимой $\xi(\cdot)$ однозначно вычисляются по соответствующим

$y(\cdot; x(T), T, \xi) = g(x(\cdot; x(T), T, \xi)): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$
с помощью интегрального оператора:

$$\varphi(x(T)) = \int_0^T k(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

Здесь $x(\tau)$ - любое решение возмущенной системы (1) такое, что $x(\tau) \in U$, $\tau \in [0, T]$, и $y(\tau) = g(x(\tau))$. Использование интегрального оператора (в не, например, производных $y^{(i)}(t_j)$) влечет определенную помехоустойчивость обработки измерений. Идеальность оператора означает независимость функции $k(\cdot, \cdot)$ от конкретной реализации $\xi(\cdot)$. Учет возмущений проводится лишь посредством реализации $y(\cdot)$. Если t_j достаточно велико и $x(t) \in U$, $t \in [0, t_j]$, то независимо от $\xi(\cdot)$ можно последовательно вычислять $\varphi(x(jT))$ по $y: [(j-1)T, jT] \rightarrow \mathbb{R}^m$ с целью контроля и управления движением с обратной связью.

Воспользуемся двойственностью задач наблюдения и управления, подробно изученной в линейном случае [2]. Определим [3,4] сопряженную систему управления для нелинейной пары (1), (2):

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial l}{\partial x}(t, x) \cdot f(x) = k(t, g(x)), \quad v(0, x) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x) \cdot F(x) = 0, \quad F = (f_1, \dots, f_r), \quad t \in [0, T], x \in U. \quad (5)$$

Допустимыми считаем непрерывно дифференцируемые $k(t, y)$ в соответствующих областях $\{(t, y)\} \subset [0, T] \times g(U)$, за исключением разве лишь конечного числа сечений $t = t_j$. В силу продолжимости невозмущенных решений на $[0, T]$ для фиксированной $k(\cdot, \cdot)$ функция $v(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющая уравнению (4) в $[0, T] \times U$ ($t \neq t_j$), существует и единственна. В операторной записи получаем систему управления в $C^1(U, \mathbb{R}^1)$ с фазовыми ограничениями:

$$\frac{d}{dt} v(t) = -AV(t) + BK(t), \quad v(0) = 0, \quad (6)$$

$$CV(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$V(t) = v(t, \cdot): U \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad AV(t) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, \cdot) f(\cdot),$$

$$CV(t) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, \cdot) F(\cdot), \quad BK(t) = k(t, g(\cdot)).$$

Цель настоящей статьи - описать идеально наблюдаемые функции $\varphi(\cdot)$ с помощью множества достижимости сопряженной сис-

темы (4), (5), что позволяет на этапе построения весовой функции $k(\cdot, \cdot)$ в (3) использовать разработанные методы математической теории управления.

§2. Идеальное наблюдение проекций в билинейной системе

Рассмотрим вначале более подробно частный случай:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{i=1}^r \xi_i(t) B_i x + \xi_0 B_0, \quad y = Gx, \quad (8)$$

где A, B_i — постоянные матрицы размерности $n \times n$, $G - m \times n$, $\text{rang } G = m$, $B_0 \in \mathbb{R}^n$. Требуется найти все векторы $h \in \mathbb{R}^n$ для которых проекции $h'x(T)$ однозначно восстанавливаются по $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ в виде линейных интегральных операций:

$$h'x(T) = (k, y) = \int_0^T k'(\tau) y(\tau) d\tau \quad \forall x(T) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi(\cdot).$$

В этом случае нет необходимости перестраивать операции восстановления проекций $h'x(T)$ в зависимости от конкретных возмущений $\xi(\cdot)$ ($k = k(t)$, $k \neq k(\xi)$). Функция ξ_0 определяет возмущение неоднородной части, а (ξ_1, \dots, ξ_r) — матрицы A линейной системы.

Для билинейной системы (8) уравнения (4), (5) примут вид

$$\frac{d}{dt} V(t) = -A'V(t) + G'k(t), \quad V(0) = 0, \quad (9)$$

$$B'V(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

поскольку функция $v(t, x) = \int_0^t k'(\tau) y(\tau; x, t) \Big|_{\xi=0} dt = V'(t)x$

линейна по $x \in \mathbb{R}^n$. Здесь V составлена из базисных столбцов матрицы (B_0, B_1, \dots, B_r) . Считаем $\text{rang } B = \gamma < n$.

Обозначим через K матрицу управляемости системы (9) $(G', A'G', \dots, A'^{q-1}G')$, q — степень минимального аннулирующего полинома A , через $\mathcal{L}(K)$ — линейную оболочку столбцов K , через N — множество тех $h \in \mathbb{R}^n$, для которых возможно представление $h'x(T) = (k, y) \quad \forall x(T) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi(\cdot)$.

Теорема 1. Множество достижимости $D_T = \{V(T)\}$ сопряженной системы управления (9), (10) совпадает с искомым N .

Доказательство. Выберем в (9) допустимое кусочно-непре-

рывное управление k , удовлетворяющее (10). Для $v(t, x) = V'(t)x$ в силу (8) имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \frac{dx}{dt} = k'(t)Gx.$$

Подставляя $x = x(t; x(T), T, \xi) \quad \forall \xi(\cdot)$ и интегрируя на $[0, T]$, получим $V'(T)x(T) = (k, y) \quad \forall x(T) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi(\cdot)$, откуда $D_T \subseteq N$.

Обратно, пусть для некоторых h, k выполнено $h'x(T) = (k, y)$. Подставим k в (9) и положим $v(t, x) = V'(t)x$. Домножая (9) скалярно на $x(t; x(T), T) \Big|_{\xi=0}$ и интегрируя на $[0, T]$, получим $v(T, x(T)) = V'(T)x(T) = (k, y) \quad \forall x(T) \in \mathbb{R}^n, \xi = 0$. Следовательно $V(T) = h$. Чтобы $h \in D_T$, осталось доказать (10). Предположим противное: для некоторых $j, \bar{t} \quad B_j V(\bar{t}) \neq 0$. Положим $\xi_j = 1$ на $(\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\xi_j = 0$ вне этой окрестности \bar{t} и $\xi = 0$, $i \neq j$. Введем $\bar{v}(t, x) = \bar{V}'(t)x$, где

$$\frac{d}{dt} \bar{V}(t) = -(A' + \xi_j(t)B_j')\bar{V}(t) + G'k(t), \quad \bar{V}(0) = 0.$$

Тогда $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}(t, x)(Ax + \xi_j(t)B_j x) = k'(t)Gx$, $\bar{v}(0, x) = 0$.

При достаточно малом $\varepsilon > 0 \quad \bar{V}(\bar{t} + \varepsilon) \neq V(\bar{t} + \varepsilon)$, а на $[\bar{t} + \varepsilon, T]$ уравнения для V, \bar{V} совпадают. Вследствие единственности решений $\bar{V}(T) \neq V(T) = h$. При фиксированном на $[0, T]$ возмущении $\xi = \bar{\xi}$ имеем $\bar{v}(T, x(T)) = \bar{V}'(T)x(T) = (k, y) \quad \forall x(T) \in \mathbb{R}^n$, что противоречит $\bar{V}(T) \neq h$. Поэтому исходное предположение неверно и ограничение (10) выполнено на $[0, T]$. Теорема доказана.

Определение $D_T(N)$ значительно упрощается в случае $m=1$. Действительно, пусть $y = Gx$, $G' \in \mathbb{R}^n$ и $B'K = (B'G', \dots, B'A^{q-1}G') = 0$. Последнее означает, что $\text{rang } K < n$ и столбцы матриц B_j ортогональны столбцам K , линейная оболочка $\mathcal{L}(K)$ которых образует множество достижимости линейной системы (9) для любого $t > 0$ без учета (10). Поэтому при любом допустимом k выполнено (10) и $N = D_T = \mathcal{L}(K)$. Покажем теперь, что при $B'K \neq 0$ любое кусочно-непрерывное на $[0, T]$ управление $k \neq 0$ приводит к нарушению (10), поскольку фазовая кривая системы (9) является "пространственной" в $\mathcal{L}(K)$. Пусть $k \neq 0$, $B'V = 0$ и $B'A'PG'$ — первый ненулевой столбец в $B'K$. Дифференцируя (без учета точек разрыва k) тож-

Продолжая этот процесс, приходим к $B'A'PG'k = B'A'P^{+1}V$, $B'A'PG'k \neq 0$, откуда можно выразить k через $V: k=L'V, L \in \mathbb{R}^n$. Но при связи $k(t)=L'V(t)$ линейная система (9) имеет лишь тривиальное решение $V=0$ и $k=0$. Полученное противоречие означает, что $B'K \neq 0$ влечет $H=\{0\}$. Таким образом, при $m=1$ фазовое ограничение (10) либо является несущественным ($B'V=0 \forall k, D_T = \mathcal{X}(K)$), либо допускает только тривиальное решение $V=0$ и $H=D_T=\{0\}$. Аналогичный вывод справедлив и при наличии ограничений $|k(t)| \leq \text{const}$ (изменится лишь $D_T=H \subset \mathcal{X}(K)$), использовании $k \in L_1(0, T)$, понимая равенство по t в смысле почти всюду на $[0, T]$.

Перейдем к рассмотрению общего случая $(y(t) \in \mathbb{R}^m)$. Если ограничиться в сопряженной системе управлениями $k=cK, c \in \mathbb{R}^m, K(t) \in \mathbb{R}^1$, то можно воспользоваться приведенными выше рассуждениями. При $B'(G'S, A'G'S, \dots, A^{q-1}G'S) \neq 0$ множество достижимости системы (9), (10) ($k=cK$) не содержит ненулевых векторов. Из тех вектор-столбцов c , для которых указанная матрица нулевая, составим матрицу $S: S'G'(B, AB, \dots, A^{q-1}B)=0$. Тогда линейная оболочка столбцов $\mathcal{X}((G'S, A'G'S, \dots, A^{q-1}G'S))$ является подмножеством искомого $H=\{h|h'x(T)=(k, y) \forall \xi, x(T) \in \mathbb{R}^n\}$.

Если найдется γ -матрица N из условия $AB=BN$, то (9), (10) выполняются только при условии $B'G'k=0$, в чем нетрудно убедиться, умножив (9) на B' . В этом случае $H=\mathcal{X}((G'P, A'G'P, \dots, A^{q-1}G'P))$, где столбцы P ортогональны столбцам GB . Если $G(B, AB, \dots, A^{q-1}B)=0$, т.е. столбцы B ортогональны базисным векторам множества достижимости (9), то $H = \mathcal{X}(K)$.

Теорема 2. Пусть p - первый номер, для которого $GA^pB \neq 0$. Множество H не содержит ненулевых векторов тогда и только тогда, когда $\text{rang } GA^pB = m$. Если $\text{rang } GA^pB < m$, то H содержит ненулевые векторы и совпадает с множеством достижимости некоторой линейной системы управления без фазовых ограничений.

Доказательство. Пусть $\text{rang } GA^pB = m$. Из $B'V=0$ следует $B'\dot{V} = -B'A'V + B'G'k=0, B'A'V=0, \dots, B'A'PG'k=B'A'P^{+1}V$. Поэтому k можно выразить через $V: k=L'V, L$ - матрица $m \times n$. Подставляя k в (9), получим $V=0, k=0$ и $H=\{0\}$. Покажем обратное: $H=\{0\}$ влечет $\text{rang } GA^pB = m$. Действительно, $H=\{0\}$ означает, что для любого допустимого k при условии $B'V=0$ на $[0, T]$ имеем $V(T)=0$. Но тог-

да для указанных k решение V тождественно обращается в ноль. Предположим противное: существует k_1 , для которого $B'V_1=0, V_1(T)=0, V_1(t) \neq 0, t \in (0, T)$. Сконструируем новое управление: $k_2(t) = 0, t \in [0, T-t), k_2(t) = k_1(t+T-t), t \in [T-t, T]$. В силу стационарности сопряженной системы $B'V_2=0$ на $[0, T]$, но $V_2(T)=V_1(t) \neq 0$. Полученное противоречие означает $V=0$. Из (9) и условия $\text{rang } G = m$ заключаем, что при $H=\{0\}$ только нулевое управление k удовлетворяет (9), (10). С другой стороны, имеем $B'A'PG'k = B'A'P^{+1}V$. Покажем, что это условие не только необходимо, но и достаточно для выполнения $B'V=0$ на $[0, T]$. Пусть в (9) управление k выбрано удовлетворяющим указанному тождеству. Домножая обе части сопряженного уравнения на B' , с учетом $B'G'=0$ получим $B'\dot{V} = -B'A'V$. Справа дифференцируемая вектор-функция, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (B'\dot{V}) &= B'A'^2V - B'A'G'k = B'A'^2V, \dots, \\ \frac{d^p}{dt^p} (B'\dot{V}) &= (-1)^{p+1} B'A'P^{+1}V + (-1)^p B'A'PG'k = 0. \end{aligned}$$

Учитывая начальные данные $V(0)=0, \left. \frac{d^i}{dt^i} B'\dot{V} \right|_{t=0} = 0, i = \overline{0, p-1}$,

получаем $B'\dot{V}=0$ и $B'V=0$. Итак, при исходном предположении $H=\{0\}$ показано, что необходимому и достаточному условию выполнения фазового ограничения (10) ($B'A'PG'k=B'A'P^{+1}V$) удовлетворяет единственное управление $k(k=0)$. Следовательно, $\text{rang } GA^pB = m$.

Перейдем к доказательству следующего утверждения в формулировке теоремы. Из тождества $B'A'PG'k=B'A'P^{+1}V$, равносильного фазовому ограничению $B'V=0$, при $\text{rang } GA^pB = \nu < m$ можно выразить ν компонент k через V и оставшиеся $m-\nu$ компонент k . При подстановке в (9) получим эквивалентную (9), (10) (с тем же множеством решений V) линейную систему $\dot{\hat{V}} = -\hat{A}V + \hat{G}k, V(0)=0, \hat{k}(t) \in \mathbb{R}^{m-\nu}$. Множество достижимости $\mathcal{X}((\hat{G}, \hat{A}\hat{G}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{G}))$ содержит ненулевые векторы (иначе $\text{rang } GA^pB = m$), и совпадает с искомым множеством H . Теорема доказана.

Замечание 1. Для $\text{rang } GA^pB < m$ достаточно $\text{rang } A^p < m$ или $\text{rang } B < m$. Если при $\text{rang } GA^pB < m$ для некоторого ненулевого $h \in H$ построено $\hat{k}(t)$ на $[0, T]$ из условия $V(T)=h$, то, подставляя в выражение k через \hat{k}, V значения $\hat{k}(t), V(t)$, получим $k(t)$ на $[0, T]$,

для которого и будет выполняться $h'x(T)=(k,y) \forall \xi, x(T) \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 2. Прежде чем строить управление $\hat{k}(t)$ целесообразно позаботиться о том, чтобы оно имело минимальную размерность (ранг \hat{G} может оказаться меньше $m-v$). Чтобы получить систему без фазовых ограничений, множество достижимости которой совпадает с искомым множеством H , можно поступить следующим образом. Составим матрицу N из всех линейно независимых вектор-столбцов 1 , ортогональных столбцам $B'A'PG'$. Пусть $N \neq 0$. Тогда $1'B'A'PG'k=1'B'A'P^{+1}V=0$, $1'B'A'P^{+2}V=1'B'A'P^{+1}G'k$, и при $1'B'A'P^{+1}G' \neq 0$ к системе $B'A'PG'k=B'A'P^{+1}V$ можно добавить новое уравнение. Если $1'B'A'P^{+1}G'=0$, то $1'B'A'P^{+2}V=0$ и $1'B'A'P^{+3}V=1'B'A'P^{+2}G'k=0$ и т.д. Либо сразу можно добавлять к $B'A'PG'k=B'A'P^{+1}V$ новые уравнения и домножать скалярно на векторы, ортогональные столбцам матрицы при k . Увеличивая таким образом число уравнений, связывающих k и V , уменьшаем размерность k .

Замечание 3. В задаче прогнозирования измерения проводятся на отрезке времени $[0,s], s < T$. Поэтому в искомые представления $h'x(T)=(k,y) \forall \xi, x(T) \in \mathbb{R}^n$, следует ввести дополнительные ограничения $k(t)=0, t \in [s,T]$. С учетом этого справедливы следующие утверждения. Если $G(B,AB, \dots, A^{q-1}B)=0$, то $H=\mathcal{X}((G', A'G', \dots, A'^{q-1}G'))$. Пусть p — первый номер, для которого $GA^pB \neq 0$ и $\text{rang } GA^pB=m$. Тогда $H=\{0\}$. Если $\text{rang } GA^pB < m$, то H состоит из векторов h , для которых $h'(B,AB, \dots, A^{q-1}B)=0$ и $\exp(A'(T-s))h \in H_s$, где H_s — множество достижимости (9) на $[0,s]$ при $B'V=0$, определяемое теоремой 2. В частности, $H=\{0\}$ при $\text{rang}(B, \dots, A^{q-1}B)=n$. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2. Следует учесть только, что в силу $k(t)=0, t \in [s,T]$, необходимо $B'V(T)=B'h=0, B'V'(T)=-B'A'h=0, \dots$, т.е. $h'(B,AB, \dots, A^{q-1}B)=0$.

Рассмотрим теперь случай, когда измерения тоже подвержены возмущениям:

$$y=Gx + \sum_{i=1}^d \zeta_i(t)G_i x + \zeta_0(t)G_0, \quad (11)$$

где G_i — матрицы размерности $m \cdot n, G_0 \in \mathbb{R}^m, \zeta_j$ — скалярные функции времени на $[0,T], |\zeta_j(t)| \leq 1 = \text{const}$. Составим в $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial y}{\partial x}(t,x)(Ax + \sum_{i=1}^d \xi_i(t)B_i x + \xi_0(t)B_0) = \\ = k'(t)(Gx + \sum_{i=1}^d \zeta_i(t)G_i x + \zeta_0(t)G_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Определим для v, k ограничения:

$$v(t,x)=V'(t)x, B_i'V(t)=0, i=0, \dots, r, k'(t)G_i=0, i=0, \dots, d, t \in [0,T].$$

Тогда получаем следующую линейную сопряженную систему управления с линейными ограничениями:

$$\dot{V}(t)=-A'V(t) + G'k(t), V(0)=0, \quad (13)$$

$$B'V(t)=0, C'k(t)=0, t \in [0,T], \quad (14)$$

$$B=(B_0, B_1, \dots, B_r), C=(G_0, G_1, \dots, G_d).$$

Пусть $h=V(T)$ принадлежит множеству достижимости (13), (14).

Для соответствующего k уравнение (12) примет вид:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial y}{\partial x}(t,x)Ax = k'(t)Gx, v(0,x)=0. \quad (15)$$

Поскольку (15) справедливо для $x \in \mathbb{R}^n$, то оно справедливо и на произвольной траектории $x(t)=x(t; x(T), T, \xi, \zeta)$. Интегрируя обе части уравнения на $[0,T]$ с учетом

$$\begin{aligned} Gx(t)=y(t) - \sum_{i=1}^d \zeta_i(t)G_i x(t) - \zeta_0(t)G_0, \text{ получим} \\ h'x(T) = \int_0^T k'(\tau)y(\tau)d\tau = (k,y), x(T) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, по формуле (16) имеем возможность по измерениям $y: [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ восстанавливать проекцию $h'x(T)$ независимо от реализации возмущений $\xi=(\xi_0, \dots, \xi_r), \zeta=(\zeta_0, \dots, \zeta_d)$.

Из соотношения $C'k=0$ следует выразить часть компонент k через остальные, подставить в (13) и затем уже воспользоваться теоремой 2.

Если $r=d, \zeta_1=\xi_1$, то, приравняв в (12) к нулю коэффициенты при ξ_1 , получим для (13) ограничения $G_i'k=B_i'V, i=0, \dots, r$, т.е. $k'C=V'B$. Следует выразить часть компонент k через остальные и вектор V , подставить в (13) и найти множество достижимости $D_T=H$ полученной системы управления без ограничений как линейную оболочку столбцов матрицы управляемости. В итоге необходимо

выразить k через t (см. замечание 1).

Если имеется возможность на $[0, T]$ измерять $y=Gx$ и возмущения $\xi_i, i=1, r$, то множество H тех векторов h , для которых справедливо представление $h'x(T)=(k, y) \forall \xi, x(T) \in \mathbb{R}^n$, можно расширить. Действительно, представим k в виде $k=\bar{k}+\bar{k}$. На $v(t, x)=V'(t)x$ наложим ограничения

$$\dot{V}(t)=-A'V(t)+G'\bar{K}(t), V(0)=0, B_0'V(t)=0, \quad (17)$$

$$G'\bar{K}(t)-\sum_{i=1}^r B_i'V(t)\xi_i(t)=0, t \in [0, T]. \quad (18)$$

Если наряду с (17) имеют место включения $B_i'V(t) \in z(G')$, $i=1, r$, то выполнения (18) можно добиться выбором \bar{k} для любых $\xi_i, i=1, r$. В противном случае представим $B_i = \bar{B}_i + \bar{B}_i$, где столбцы \bar{B}_i принадлежат $z(G')$, а \bar{B}_i - нет. Если к (17) добавить условия $B_i'V(t)=0$, то (18) удовлетворяется выбором \bar{k} . Построим, используя теорему 2, \bar{k} в (17) из условия $V(T)=h$ при ограничениях $B_0'V=0, \bar{B}_i'V=0, i=1, r$. Сложим уравнения (17), (18), домножим результат скалярно на $x(t; x(T), T, \xi)$ и проинтегрируем обе части уравнения на $[0, T]$. Получим $h'x(T)=(k, y)$, где $k=\bar{k}+\bar{k}$, \bar{k} определяется предварительно, а \bar{k} формируется по мере измерения ξ_i согласно (18), например, по формуле

$$\bar{k}(t)=M^{-1}G'(\sum_{i=1}^r B_i'\xi_i(t))V(t), M=GG'.$$

§3. Исследование общего нелинейного случая

Рассмотрим теперь систему наблюдения (1), (2) и соответствующую сопряженную систему управления (4), (5).

Теорема 3. Множество достижимости $D_T = \{v(T, \cdot): U \rightarrow \mathbb{R}^1\}$ сопряженной системы управления (4), (5) совпадает с множеством Φ функций $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^1$, определяемых интегральными операторами идеального наблюдения (3).

Доказательство. Фиксируем допустимое k и соответствующую $v(T, \cdot) \in D_T$. Тогда в силу (5) функция $v(t, x)$ независимо от ξ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial v}{\partial x}(t, x)(f(x) + F(x)\xi(t)) = k(t, g(x)), \quad (19)$$

$$v(0, x) = 0, x \in U, t \in [0, T].$$

Рассмотрим на отрезке времени $[0, T]$ произвольное решение $x(t) \in U$ возмущенной системы (1). Подставляя $x(t)$ в (19) и интегрируя обе части по $t \in [0, T]$, получим (3) для $\varphi = v(T, \cdot)$, т.е. $v(T, \cdot) \in \Phi, D_T \subseteq \Phi$.

Обратно, пусть для некоторых k, φ выполнено (3). Подставим k в (4). Полагая $x = x(t; x(T), T)$, $\xi = 0$, $x(T) \in U$, и интегрируя на $[0, T]$, получим с учетом определения φ по k $\varphi(x(T)) = v(T, x(T))$, т.е. $\varphi = v(T, \cdot)$ в U . Чтобы $\varphi \in D_T$, осталось доказать выполнение (5).

Предположим противное: для некоторых j, \bar{t}, \bar{x}

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\bar{t}, \bar{x})f_j(\bar{x}) \neq 0, (\bar{t}, \bar{x}) \in [0, T] \times U.$$

Положим $\xi_j = \varepsilon$ на $(\bar{t}-\varepsilon, \bar{t}+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\xi_j = 0$ вне ε -окрестности \bar{t} и $\xi_1 = 0, 1 \neq j$. Обозначим через \bar{v} решение (19) при $\xi = \xi$. Для достаточно малого ε решения $x(\cdot; x, t, \xi)$, $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon, |t - \bar{t}| < \varepsilon$, продолжим на $[0, T]$ и, следовательно, \bar{v} определена в некоторой окрестности $S \subseteq [0, T] \times U$ решения $(t, x(t; \bar{x}, \bar{t}, \xi))$, $t \in [0, T]$. Функция \bar{v} непрерывна в S и непрерывно дифференцируема за исключением разве конечного числа сечений (в том числе и $t = \bar{t} \pm \varepsilon$). Вычитая из (19) (при $\xi = \xi$) (4), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{v} - v) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v} - v)(f + F\xi) = -\frac{\partial}{\partial x}F\xi.$$

$$\bar{v}(0, x) = 0, v(0, x) = 0, (t, x) \in S.$$

Подставим $x = x(t) = x(t; \bar{x}, \bar{t}, \xi)$ и проинтегрируем по t . На указанном решении из $\bar{v}(t, x(t)) - v(t, x(t)) = 0, t \in [0, \bar{t} - \varepsilon]$,

$$\frac{d}{dt}(\bar{v}(t, x(t)) - v(t, x(t))) = 0, t \in (\bar{t} + \varepsilon, T),$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{v}(t, x(t)) - v(t, x(t))) \neq 0, t \in (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon), \varepsilon < 1,$$

следует $\bar{v}(T, x(T)) - v(T, x(T)) \neq 0, \bar{v}(T, x(T)) \neq v(T, x(T)) = \varphi(x(T))$. Поскольку значение $\bar{v}(T, x(T))$ равно интегралу в (3) к $x(t) \in U, t \in [0, T]$, то (3) не выполняется в точке $x(T; \bar{x}, \bar{t}), (\xi = \xi)$. Полу-

ченное противоречие влечет справедливость (5). Теорема доказана.

Перейдем теперь к изложению техники степенных рядов для построения $k(\cdot, \cdot)$ в (3). В предположениях вещественной аналитичности f, f_1, g в области $\{x \mid \|x\| = \max_1 |x_i| < a\}$, $f(0) = f_1(0) = 0$, $g(0) = 0$ существует окрестность нуля, в которой $f, f_1, g, v(t, \cdot)$ представимы степенными рядами, для $v(t, \cdot)$ — с непрерывно дифференцируемыми по t коэффициентами, сходящимися равномерно на $[0, T]$ при фиксированном x . Допустимыми считаем определенные в $[0, T] \times \{y \mid \|y\| < b\}$ и аналитические по y функции $k(t, y)$ ($k(t, 0) = 0$), сохраняющие непрерывность по совокупности аргументов и при комплексных y .

Приравняем в уравнениях (4), (5) слева и справа однородные полиномы одинаковой степени (верхний индекс):

$$\frac{\partial v^{(p)}}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial v^{(p)}}{\partial x^i}(t, x) f_i^{(p-1+1)}(x) = k^{(1)}(t, g^{(p)}(x)) + \dots +$$

$$+ k^{(p)}(t, g^{(1)}(x)), \quad \sum_{i=1}^p \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^i}(t, x) f_j^{(p-1+1)}(x) = 0,$$

$$v^{(1)}(0, x) = 0, \quad p \geq 1, \quad j = \overline{1, r}.$$

Каждому однородному полиному $w^{(p)}(\cdot)$ соответствует единственная симметрическая p -линейная форма $\tilde{w}^{(p)}(\cdot, \dots, \cdot)$ из условия $\tilde{w}^{(p)}(x, \dots, x) \equiv w^{(p)}(x)$, $\tilde{w}^{(1)}(\cdot) = w^{(1)}(\cdot)$ [5]. В терминах симметрических полилинейных форм имеем:

$$\frac{\partial \tilde{v}^{(p)}}{\partial t}(t, x, \dots, x) + \sum_{i=1}^p \sum_{q=1}^1 v^{(1)}(t, x, \dots, \tilde{f}^{(p-1+1)}(x, \dots, x), \dots, x) =$$

$$= k^{(1)}(t, \tilde{g}^{(p)}(x, \dots, x)) + \dots + \sum_{i_1 + \dots + i_{p-1} = p} \tilde{k}^{(p-1)}(t, \tilde{g}^{(1)}(x, \dots, x), \dots,$$

$$\dots, \tilde{g}^{(1-p-1)}(x, \dots, x)) + \tilde{k}^{(p)}(t, \tilde{g}^{(1)}(x), \dots, \tilde{g}^{(1)}(x)),$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{q=1}^1 \tilde{v}^{(1)}(t, x, \dots, \tilde{f}_j^{(p-1+1)}(x, \dots, x), \dots, x) = 0.$$

Индекс q указывает порядковый номер аргументов $\tilde{f}^{(1)}, \dots, \tilde{f}_j^{(1)}$, t считаем параметром. Используя операцию прямого произведения матриц \otimes [6], приравняем коэффициенты при одинаковых мономах $x_{i_1} \dots x_{i_p}$:

$$\frac{d}{dt} \tilde{V}^{(p)}(t) + \sum_{q=1}^p E \otimes \dots \otimes F^{(1)} \otimes \dots \otimes E \tilde{V}^{(p)}(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{q=1}^1 E \otimes \dots \otimes \tilde{F}^{(p-1+1)} \otimes \dots \otimes E \tilde{V}^{(1)}(t) =$$

$$= \tilde{G}^{(p)} K^{(1)}(t) + (\tilde{G}^{(2)} \otimes G^{(1)} + G^{(1)} \otimes \tilde{G}^{(2)}) \tilde{K}^{(2)}(t) + \dots +$$

$$+ \sum_{i_1 + \dots + i_{p-1} = p-1} \tilde{G}^{(i_1)} \otimes \dots \otimes \tilde{G}^{(i_{p-1})} \tilde{K}^{(p-1)}(t) + G^{(1)} \otimes \dots \otimes G^{(1)} \tilde{K}^{(p)}(t),$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{q=1}^1 E \otimes \dots \otimes \tilde{F}_j^{(p-1+1)} \otimes \dots \otimes E \tilde{V}^{(1)}(t) = 0, \quad \tilde{V}^{(p)}(0) = 0, \quad p \geq 1, \quad j = \overline{1, r},$$

$$\tilde{F}^{(p)} X^{(p)} = \tilde{F}^{(p)}(x, \dots, x) = f^{(p)}(x), \quad X^{(p)} = x \otimes \dots \otimes x \quad (p \text{ раз}),$$

$$\tilde{F}_j^{(p)} X^{(p)} = \tilde{F}_j^{(p)}(x, \dots, x) = f_j^{(p)}(x), \quad \tilde{G}^{(p)} X^{(p)} = \tilde{G}^{(p)}(x, \dots, x) = g^{(p)}(x),$$

$$\tilde{V}^{(p)}(t) X^{(p)} = \tilde{v}^{(p)}(t, x, \dots, x) = v^{(p)}(t, x),$$

$$\tilde{K}^{(p)} Y^{(p)} = \tilde{k}^{(p)}(t, y, \dots, y) = k^{(p)}(t, y).$$

В матричной записи получим:

$$\frac{d}{dt} V(t) = -F' V(t) + G' K(t), \quad V(0) = 0, \quad (20)$$

$$F_j' V(t) = 0, \quad j = \overline{1, r}. \quad (21)$$

Здесь первые n строк F равны $(F^{(1)}, \tilde{F}^{(2)}, \tilde{F}^{(3)}, \dots)$, следующие n^2 строк — $(0, F^{(1)} \otimes E + E \otimes F^{(1)}, \tilde{F}^{(2)} \otimes E + E \otimes \tilde{F}^{(2)}, \dots)$, аналогично в F_j , первые n строк G равны $(G^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}, \tilde{G}^{(3)}, \dots)$, следующие n^2 строк — $(0, G^{(1)} \otimes G^{(1)}, \tilde{G}^{(2)} \otimes G^{(1)} + G^{(1)} \otimes \tilde{G}^{(2)}, \dots)$.

$K = (k^{(1)'}, \tilde{k}^{(2)'}, \tilde{k}^{(3)'}, \dots)'$, $V = (V^{(1)'}, \tilde{V}^{(2)'}, \tilde{V}^{(3)'}, \dots)'$. Матрицы F, G имеют блочно-треугольную структуру. Если умножить обе части (20), (21) скалярно на $X = (x^{(1)'}, X^{(2)'}, X^{(3)'}, \dots)'$, то получим (4), (5), $v(t, x) = V'(t)X$. Множество достижимости $D_T = \{v(T, \cdot)\}$ определяется множеством достижимости $\{V(T)\}$ в силу $v(T, \cdot) \leftrightarrow V(T)$.

Для приближенного решения задачи наблюдения ограничимся конечномерной подсистемой

$$\frac{d}{dt} V_s(t) = -F'_s V_s(t) + G'_s K_s(t), \quad V_s(0) = 0, \quad (22)$$

$$F'_{js} V_s(t) = 0, \quad s \geq 1, \quad j = 1, r, \quad t \in [0, T], \quad (23)$$

где V_s, F_s, F_{js}, G_s - соответствующие подматрицы размерностей $s \times 1, s \times s, m \times s, s = n + n^2 + \dots + n^s$. Построим с помощью теоремы 2 в (22) допустимое K_s , удовлетворяющее фазовым ограничениям (23), и подставим его в сопряженную систему (4), (5). Выбор $K^{(1)}, 1 > s$, ограничим лишь условием сходимости степенного ряда $k(t, y) = K'(t)Y$, в частности, $\tilde{K}^{(1)} = 0, 1 > s$. Полагая $x = x(t; x(T), T, \xi)$, получим:

$$\frac{d}{dt} V'_s(t)X_s + \varepsilon_1 + V'_s(t)F'_s X_s + \varepsilon_2 = K'_s(t)G'_s X_s + \varepsilon_3,$$

$$X_s = (x', X^{(2)'}, \dots, X^{(s)'})', \quad \varepsilon_1 = o(\|x\|^s),$$

откуда после интегрирования на $[0, T]$

$$w_s(x(T)) = V'_s(T)X_s(T) = \int_0^T k(\tau, y(\tau))d\tau + o(\|x(T)\|^s).$$

Следовательно, при движении в достаточно малой окрестности положения равновесия $x=0$ с помощью оператора вида (3) можно приближенно (независимо от ξ) определять значения $w_s(x(T))$ полинома w_s степени не выше s . Использование нескольких различных K_s вместе с информацией $g(x(T))$ позволяет оценивать $x(T)$ в окрестности нуля. Прежде чем строить K_s , целесообразно понизить порядок системы (22) с \tilde{s} до $\bar{s} = \sum_{i=1}^s n(n+1)\dots(n+1-i)/i!$, учи-

тывая тот факт, что компоненты $\tilde{V}^{(p)}(t)$, соответствующие отличающимся лишь перестановкой индексов мономам $x_{i_1} \dots x_{i_p}$,

совпадают.

Если уравнения измеряемых величин также подвержены возмущениям и (или) имеется возможность измерять некоторые возмущения, то необходимо внести коррективы, аналогичные (11)-(18). Изложенная схема построения интегральных операторов идеального наблюдения пригодна и для нестационарного случая (за исключением теоремы 2).

Поскольку "идеальная" схема (3), (4), (5) описывает весьма ограниченное множество операций наблюдения, на практике может оказаться достаточным построение малочувствительной к возмущениям операции, обеспечив малость $\|v(T, \cdot) - \varphi\| + \|v_x F\|$ в соответствующих нормах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский М.С. Идеально наблюдаемые системы // ДАН СССР. 1970. Т. 191. № 6. С. 1224-1227.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. Кирич Н.Е. К теории методов оценивания в динамических системах // Вопросы механики и процессов управления. Вып. 8. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. С. 118-125.
4. Заика Ю.В., Кирич Н.Е. Сопряженные задачи идентификации динамических систем // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 5. С. 770-776.
5. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
6. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982.