Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 515.12

Иванов А.В.

МИКСЕРЫ, ФУНКТОРЫ И МЯГКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В работе доказана параметрическая версия теоремы ван Милла и ван де Вэла, утверждающей, что связный компакт с миксером является абсолютным ретрактом. Получен ряд следствий, касающихся ковариантных функторов в категории бикомпактов.

Симметрическим миксером на топологическом пространстве X называется такое непрерывное отображение μ: $X^3 \to X$, что значение $\mu(x,y,z)$ не зависит от перестановки координат x,y,z и $\mu(x,x,z)=x$ для любых точек $x,z \in X$ (см. [1]). На всяком пространстве X с миксером μ определено понятие μ-выпуклых подмножеств. Подмножество $A \subset X$ называется μ-выпуклым, если для любых точек $x,y,z \in A$ $\mu(x,y,z) \in A$.

Интерес к изучению бикомпактных пространств с миксером (в дальнейшем мы рассматриваем только бикомпактные хаусдорфовы пространства) был мотивирован следующим результатом ван Милла и ван де Вэла [1].

Теорема. Пусть X - связный метризуемый компакт, на котором задан миксер μ такой, что μ-выпуклые подмножества образуют базу. Тогда X - абсолютный ретракт.

В настоящей работе доказана параметрическая версия приведенной выше теоремы и получен ряд следствий, касающихся функторов.

Пусть (X,μ) - пространство с миксером. Множество $A \subset X$ будем называть сильно μ-выпуклым, если для любых $x,y \in A$ и для любого $z \in X$ $\mu(x,y,z) \in A$. Будем говорить, что миксер μ обладает свойством SC (сильной выпуклости), если для любых точек $a,b \in X$ множество $B_{ab}=\{x: \mu(a,b,x)=x\}$ сильно μ-выпукло.

Примером миксера со свойством SC может служить миксер μ на отрезке $[0,1]$, который ставит в соответствие тройке точек x,y,z ту из них, что лежит между двумя остальными. Заметим, что произведение миксеров со свойством SC на пространствах X и Y дает миксер с тем же свойством на произведении $X \times Y$. Так что, используя приведенный выше пример, можно построить миксер со свойством SC на всяком n-мерном кубе. Стандартный миксер на суперрасширении λX, который ставит в соответствие тройке максимальных сцепленных систем ξ_1, ξ_2, ξ_3 систему $(\xi_1 \cap \xi_2) \cup (\xi_1 \cap \xi_3) \cup (\xi_2 \cap \xi_3)$ (см. [2]), также обладает свойством SC.

Пусть (X,μ)- пространство с миксером и SCX - пространство замкнутых сильно μ-выпуклых подмножеств X с топологией Вьеториса. (Отметим, что $SCX \supset X$, так как для любой точки $x \in X$ $\{x\}$ сильно μ-выпукло). Отображение p: $X \times SCX \to X$ назовем отображением ближайшей точки для пространства с миксером (X,μ), если

1) p непрерывно;
2) для любой пары x,A $p(x,A) \in A$;
3) если $x \in A$, то $p(x,A) = x$.

Справедливо следующее

Предложение. Если миксер μ обладает свойством SC, то для (X,μ) существует отображение ближайшей точки.

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $A \in SCX$. Для любой точки $a \in A$ рассмотрим множество $C_{xa}=B_{xa} \cap A$. Покажем, что система $\eta=\{C_{xa}: a \in A\}$ центрирована. Любые два множества системы η пересекаются, поскольку для любых точек $a,b \in A$ $\mu(x,a,b) \in C_{xa} \cap C_{xb}$. Предположим, что мы уже доказали непустоту пересечения любых k множеств системы η. Покажем, что пересечение $L = C_{xa_1} \cap \ldots \cap C_{xa_{k+1}}$ также непусто для любых точек $a_1, \ldots, a_{k+1} \in A$. Для этого в каждом пересечении $C_{xa_1} \cap \ldots \cap C_{xa_k}$, $C_{xa_1} \cap \ldots \cap C_{xa_{k-1}} \cap C_{xa_{k+1}}$ и $C_{xa_k} \cap C_{xa_{k+1}}$ возьмем соответственно по точке a,b и c и рассмотрим точку $y=\mu(a,b,c)$. В силу сильной μ-выпуклости множеств C_{xa_i} очевидно, что $y \in L$.

Итак, система η центрирована и, следовательно, $\bigcap_{a \in A} C_{xa} \neq \emptyset$. Очевидно, что пересечение $\cap C_{xa}$ состоит из одной точки z, причем эта точка обладает следующим свойством: $\mu(x,a,z) = z$ для любой точки $a \in A$. Точку z будем называть инвариантной точкой множества A

для заданной точки x. Введем обозначение: $p(x,A) = z$.
Нетрудно проверить, что p - искомое отображение ближайшей точки. Предложение доказано.

Теорема 1. Пусть $f: X \to Y$ - открытое непрерывное отображение связных метризуемых компактов. Пусть на X существует миксер μ такой, что

1) для любого $y \in Y$ $f^{-1}y$ сильно μ-выпукло;
2) открытые μ -выпуклые множества образуют базу в X;
3) μ обладает свойством SC.

Тогда f - мягкое отображение.

Доказательство. В условиях теоремы X является абсолютным ретрактом. Кроме того, для (X,μ) существует отображение ближайшей точки p. Проверим выполнение определения мягкости для отображения f. Пусть Z - бикомпакт, A - замкнутое подмножество Z и $g: Z \to Y$, $h: A \to X$ такие непрерывные отображения, что $g|_A = f \circ h$. Рассмотрим произвольное продолжение $H': Z \to X$ отображения h и положим $H(z) = P(H'(z), f^{-1}g(z))$. Тогда H - искомое продолжение h.

Теорема доказана.

Замечание 1. В формулировке теоремы 1 можно отбросить требование метризуемости X,Y и условие 2), если потребовать дополнительно, что X - абсолютный ретракт (или абсолютный экстензор в размерности n; в этом случае отображение f будет n-мягким).

Теорема 2. Пусть F: Comp$\to$Comp - ковариантный непрерывный сохраняющий вес функтор из категории бикомпактов и непрерывных отображений в ту же категорию, который сохраняет свойство открытости отображений и свойство связности пространств. Пусть на каждом пространстве FX задан канонический миксер μ_x со свойством SC, такой, что открытые μ-выпуклые множества образуют базу пространства FX и для любого отображения $f: X \to Y$ отображение Ff коммутирует с миксерами μ_x и μ_y, т.е. $Ff(\mu_x(x,y,z)) = \mu_y(Ff(x), Ff(y), Ff(z))$. Тогда

1) для любого связного $\varkappa$-метризуемого бикомпакта X FX есть AR;
2) для любого открытого отображения связных $\varkappa$-метризуемых бикомпактов $f: X \to Y$ Ff является мягким отображением;

3) для любого $\varkappa$-метризуемого бикомпакта X FX есть бикомпакт Дугунджи;
4) для любого открытого отображения $f: X \to Y$ $\varkappa$-метризуемых бикомпактов отображение Ff является 0-мягким.

Изложим кратко идею доказательства теоремы. **Доказательство** пунктов 1) и 2) проводится одновременно по индукции по весу X. В силу условий на функтор F для любого связного X веса ω_0 FX является абсолютным ретрактом. Следовательно, для любого отображения $f: X \to Y$ связных пространств веса ω_0 отображение Ff удовлетворяет условиям теоремы 1 (см. замечание 1; условие 1) теоремы 1 вытекает из условия коммутирования миксеров μ_x и μ_y с отображением Ff). Следовательно, Ff - мягкое отображение.

Предположим теперь, что условия 1), 2) доказаны для всех X веса $<\tau$ и пусть $wX = \tau$. Разложим X в спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta: \alpha,\beta<\tau\}$ с открытыми проекциями и $\varkappa$-метризуемыми X_α. Спектр $FS = \{FX_\alpha, F\pi^\alpha_\beta: \alpha,\beta<\tau\}$ состоит из AR-пространств и мягких отображений.
Следовательно, в силу теоремы Е.В.Щепина [3] $\lim FS = FX$ есть абсолютный ретракт. Наконец, в силу замечания 1 и свойств функтора F получаем, что если $f: X \to Y$ - открытое отображение связных $\varkappa$-метризуемых бикомпактов, то $Ff: FX \to FY$ - мягкое отображение.

Условия 3) и 4) доказываются аналогично.

Замечание 2. Для доказательства условий 3) и 4) не используется требование, что μ-выпуклые множества образуют базу в FX.

Нетрудно проверить, что условиям теоремы 2 удовлетворяют, в частности, функтор суперрасширения λ и функтор полных сцепленных систем N (см. [4]). Таким образом, полученные ранее автором характеризации классов $\varkappa$-метризуемых бикомпактов и связных $\varkappa$-метризуемых бикомпактов в терминах λ и N (см. [4-6]) являются непосредственным следствием теоремы 2 и тем самым их доказательства значительно упрощаются. Автору не известно, можно ли с помощью аппарата миксеров упростить доказательства следующих, полученных им ранее, результатов, имеющиеся доказательства которых требуют пока привлечения громоздкой спектральной техники.

Теорема 3. Для непрерывного отображения $f: X \to Y$ связных однородных по характеру $\varkappa$-метризуемых бикомпактов следующие условия эквивалентны:

1) f открыто и не имеет точек однократности;

2) λf является тривиальным I^{τ}-расслоением, где $\tau=wX$;

3) Nf является тривиальным I^{τ}-расслоением.

Теорема 4. Для непрерывного отображения $f\colon X\to Y$ нульмерных однородных по характеру $\varkappa$-метризуемых бикомпактов следующие условия эквивалентны:

1) f открыто и $|f^{-1}y|>1$ для любого $y\in Y$;

2) λf является тривиальным D^{τ}-расслоением, где $\tau=wX$;

3) Nf является тривиальным D^{τ}-расслоением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Mill J., van de Vel. On an internal property of Absolute Retracts // Top. Proc. 1979. V.4. P.193-200.
2. Драничников А.Н. Миксеры. Обращение одной теоремы ван Милла - ван де Вэла // Математические заметки. 1985. Т.37. Вып. 4. С.587-593.
3. Щепин Е.В. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров // Успехи матем. наук. 1976. Т.31. Вып.5. С. 191-226.
4. Иванов А.В. Суперрасширения открыто-порожденных бикомпактов // Доклады АН СССР. 1981. Т. 259. № 2. С.275-278.
5. Иванов А.В. Решение проблемы ван Милла о характеризации бикомпактов, суперрасширения которых являются абсолютными ретрактами // Доклады АН СССР. 1982. Т. 262. № 3. С. 526-528.
6. Иванов А.В. О пространстве полных сцепленных систем // Сибирский матем. журнал. 1986. Т.27. № 6. С. 95-110.

Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 515.12

Моисеев Е.В.

О ПРОСТРАНСТВАХ С М-СТРУКТУРОЙ

В статье вводится понятие пространства с М-структурой, которое обобщает некоторые свойства пространств λX, $\mathrm{Exp}X$, GX, NX и других.

Основное определение. Будем говорить, что на метрическом пространстве (X,ρ) задана М-структура, если любому непрерывному отображению $f\colon \partial\sigma\to X$, заданному на границе $\partial\sigma$ симплекса σ ($\dim\sigma\geq 2$), поставлено в соответствие непрерывное продолжение $\bar f\colon\sigma\to X$ на весь симплекс и это соответствие удовлетворяет двум условиям:

1. Постоянному отображению f соответствует постоянное $\bar f$.

2. Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любого симплекса σ ($\dim\sigma\geq 2$), любых двух непрерывных отображений f_1 и f_2 1-мерного остова σ_1, симплекса σ в X их непрерывные продолжения $\bar f_1$ и $\bar f_2$, имеющие одинаковые комбинаторные схемы, удовлетворяют условию: если $\max\limits_{x\in\sigma_1}\rho(f_1(x),f_2(x))<\delta$, то $\max\limits_{x\in\sigma_1}\rho(\bar f_1(x),\bar f_2(x))<\varepsilon$.

Здесь необходимо сформулировать определение комбинаторной схемы продолжения (к.с.п.). Рассмотрим некоторый стандартный симплекс σ ($\dim\sigma\geq 2$). Если отображение g задано на 1-мерном остове σ, то с помощью М-структуры его можно продолжить на весь симплекс σ. Продолжение будем производить последовательно на n-мерные остовы. Сначала возьмем некоторую двумерную грань $(e_{i_1},e_{i_2},e_{i_3})$ симплекса σ. Сечение отображения g на границе этой грани продолжаем на всю грань. Для этого с помощью линейного гомеоморфизма отождествим симплекс $(e_{i_1},e_{i_2},e_{i_3})$ со стандартным