однородных по характеру æ-метризуемых бикомпактов следующие условия эквивалентны:

1) f открыто и не имеет точек однократности;

2) λf является тривиальным I^{τ}-расслоением, где $\tau = wX$;

3) Nf является тривиальным I^{τ}-расслоением.

Теорема 4. Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ нульмерных однородных по характеру æ-метризуемых бикомпактов следующие условия эквивалентны:

1) f открыто и $|f^{-1}y| > 1$ для любого $y \in Y$;

2) λf является тривиальным D^{τ}-расслоением, где $\tau = wX$;

3) Nf является тривиальным D^{τ}-расслоением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Mill J., van de Vel. On an internal property of Absolute Retracts // Top. Proc. 1979. V.4. P.193-200.
2. Дранишников А.Н. Миксеры. Обращение одной теоремы ван Милла - ван де Вэла // Математические заметки. 1985. Т.37. Вып. 4. С.587-593.
3. Щепин Е.В. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров // Успехи матем. наук. 1976. Т.31. Вып.5. С. 191-226.
4. Иванов А.В. Суперрасширения открыто-порожденных бикомпактов // Доклады АН СССР. 1981. Т. 259. № 2. С.275-278.
5. Иванов А.В. Решение проблемы ван Милла о характеризации бикомпактов, суперрасширения которых являются абсолютными ретрактами // Доклады АН СССР. 1982. Т. 262. № 3. С. 526-528.
6. Иванов А.В. О пространстве полных сцепленных систем // Сибирский матем. журнал. 1986. Т.27. № 6. С. 95-110.

Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 515.12

Моисеев Е.В.

О ПРОСТРАНСТВАХ С M-СТРУКТУРОЙ

В статье вводится понятие пространства с M-структурой, которое обобщает некоторые свойства пространств λX, $\mathrm{Exp}X$, GX, NX и других.

Основное определение. Будем говорить, что на метрическом пространстве (X,ρ) задана M-структура, если любому непрерывному отображению $f\colon \partial\sigma \to X$, заданному на границе $\partial\sigma$ симплекса σ ($\dim\sigma \geq 2$), поставлено в соответствие непрерывное продолжение $\bar{f}\colon \sigma \to X$ на весь симплекс и это соответствие удовлетворяет двум условиям:

1. Постоянному отображению f соответствует постоянное $\bar{f}$.

2. Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любого симплекса σ ($\dim\sigma \geq 2$), любых двух непрерывных отображений f_1 и f_2 1-мерного остова σ_1, симплекса σ в X их непрерывные продолжения $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$, имеющие одинаковые комбинаторные схемы, удовлетворяют условию: если $\max\limits_{x\in\sigma_1} \rho(f_1(x),f_2(x)) < \delta$, то $\max\limits_{x\in\sigma_1} \rho(\bar{f}_1(x),\bar{f}_2(x)) < \varepsilon$.

Здесь необходимо сформулировать определение комбинаторной схемы продолжения (к.с.п.). Рассмотрим некоторый стандартный симплекс σ ($\dim\sigma \geq 2$). Если отображение g задано на 1-мерном остове σ, то с помощью M-структуры его можно продолжить на весь симплекс σ. Продолжение будем производить последовательно на n-мерные остовы. Сначала возьмем некоторую двумерную грань $(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$ симплекса σ. Сечение отображения g на границе этой грани продолжаем на всю грань. Для этого с помощью линейного гомеоморфизма отождествим симплекс $(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$ со стандартным симплексом (e_1, e_2, e_3) и продолжим отображение, пользуясь М-структурой. Так, перебрав все двумерные грани, перейдем к трехмерным и так далее. В результате получим продолжение $\bar g$ отображения g, но это продолжение, вообще говоря, определено не однозначно. В частности, на том шаге, который мы рассмотрели подробно, оно зависит от того, как мы вершинам $e_{1_1}, e_{1_2}, e_{1_3}$ сопоставили вершины e_1, e_2, e_3. Комбинаторной схемой продолжения будет называться способ, которым мы каждой К-мерной грани симплекса σ ($2 \leqslant K \leqslant \dim \sigma$) сопоставили стандартный К-мерный симплекс.

Множество $Z \leqslant X$ будем называть М-выпуклым, если условие $f(\partial\sigma) \leqslant X$ влечет включение $\bar f(\sigma) \leqslant Z$ для любого σ ($\dim \sigma \geqslant 2$).

Метрическое пространство (X, ρ) с заданной на нем М-структурой будем называть М-пространством.

Предложение 1. Пусть на метрическом пространстве (X, ρ) определен способ, с помощью которого каждому непрерывному отображению окружности $g : S_1 \to X$ поставлено в соответствие непрерывное продолжение этого отображения на круг $\bar g : B_2 \to X$, которое удовлетворяет двум условиям :

1. Постоянному g соответствует постоянное $\bar g$.
2. Для любых g_1 и g_2 справедливо :

$$\max_{x \in S_1} \rho(g_1(x), g_2(x)) = \max_{x \in B_2} \rho(\bar g_1(x), \bar g_2(x)).$$

Тогда на этом пространстве можно определить М-структуру.

Доказательство. Сначала покажем, что структура, описанная в формулировке предложения, естественным образом поднимается по индукции в любую размерность, то есть сферу S_1 в формулировке предложения можно заменить на S_n ($n \geqslant 2$), а круг B_2 соответственно на n+1-мерный шар B_n.

Итак, база индукции содержится в формулировке предложения. Идею индукционного перехода удобно рассмотреть на первом шаге. Пусть B_2 и B_3 – шары с центром в 0 и радиусом 1 в пространствах R_2 и R_3 соответственно. Обозначим через h_z "непрерывное" семейство гомеоморфизмов B_2 в B_3 : $(x, y) \overset{h_z}{\longleftrightarrow} (x \cdot \sqrt{1-z^2}, \ y \cdot \sqrt{1-z^2}, \ z)$. Пусть дано непрерывное отображение $g : S_2 \to X$, тогда композиция отображений $g \circ h_z |_{S_1}$ по индукционному предположению имеет продол-

жение $\overline{g \circ h_z} : B_2 \to X$. Продолжение $\bar g : B_3 \to X$ определим как композицию $\bar g(t) = \overline{g \circ h_z} \circ h_z^{-1}(t)$, где $t = (x, y, z)$. Легко проверяется, что это отображение удовлетворяет необходимым свойствам.

Для определения на пространстве X М-структуры осталось зафиксировать семейство гомеоморфизмов, переводящих n-мерные шары в n-мерные симплексы ($n \geqslant 2$). Заметим, что для этой М-структуры справедливо равенство $\varepsilon = \delta$. Доказательство предложения закончено. Пространства со структурой, описанной в предложении 1, ниже мы будем тоже называть М-пространствами.

Примеры М-пространств

1. Линейные нормированные пространства.

На этих пространствах существует структура, описанная в предложении 1, начиная с размерности 0. В этом случае B_1 – это просто отрезок $[0,1]$, а S_0 – пара точек $\{0,1\}$. Пусть $f(0) = x$, $f(1) = y$, тогда $\bar f(t) = (1-t) \cdot x + t \cdot y$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Очевидно, что постоянному отображению соответствует постоянное продолжение, а также справедлива цепочка неравенств :

$$\| \bar f_1(t) - \bar f_2(t) \| = \| (1-t) \cdot (x_1 - x_2) + t \cdot (y_1 - y_2) \| \leqslant \| (1-t) \cdot (x_1 - x_2) \| + \| t \cdot (y_1 - y_2) \| = (1-t) \cdot \| x_1 - x_2 \| + t \cdot \| y_1 - y_2 \|.$$

Следовательно, выполняется и второе условие.

Далее, используя идею предложения 1, поднимаем эту структуру в любую размерность.

2. Пространство с миксером (см.[1]), если миксер удовлетворяет условию :

$$\rho(\mu(x_1, \dots, x_n), \mu(y_1, \dots, y_n)) \leqslant \max_{i=\overline{1,k}} \rho(x_i, y_i). \qquad (*)$$

Миксер – это непрерывное отображение $\mu : \underbrace{X \times \dots \times X}_{k} \to X$ со свойством :

$$\mu(x, x, \dots, x, y) = \mu(x, x, \dots, y, x) = \dots = \mu(y, x, \dots, x) = x.$$

Для удобства рассуждений считаем $k = 3$.

На таком пространстве М-структура строится следующим образом. Зафиксируем на окружности S три различных точки : $t', t'', t''' \in S$.

Пусть $g : S \to X$ - непрерывное отображение и $x \in B$. Тогда $\bar{g}(x) = \mu(g(pr'(x)),\ g(pr''(x)),\ g(pr'''(x)))$, где $pr'(x)$ - проекция точки x на сферу S лучом, проходящим через x и имеющим начало в t' (аналогично определяются отображения pr'' и pr'''). В статье [1] проверяется непрерывность отображения $\bar{g}$. Условие (*) обеспечивает выполнение необходимого для М-структуры свойства, М-выпуклость точек в этом случае очевидна.

Для компакта X пространства λX , NX , $N_k X$, GX можно определить как подпространства $Exp(Exp\ X)$ (см. ниже), состоящие соответственно из гиперпространств включения (г.в.) максимальных относительно условия сцепленности, сцепленных г.в., k - сцепленных г.в., просто г.в. (подробности см. [1], [2], [3]).

Теорема 1. Пусть X - компакт, тогда пространства λX , NX , $N_k X$, GX будут М-пространствами в метрике Хаусдорфа второй экспоненты $Exp(Exp\ X)$.

Доказательство. Имеет место включение $\lambda X \subseteq NX \subseteq GX$. На GX существует стандартный миксер

$$\mu(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (\zeta_1 \cap \zeta_2) \cup (\zeta_2 \cap \zeta_3) \cup (\zeta_1 \cap \zeta_3)$$

(ζ_i рассматриваются как подмножества $Exp\ X$), а λX и NX - М-выпуклые подмножества.

Проверим условие (*). Для этого надо показать, что для всяких $\zeta_1, \zeta_2, \eta_1, \eta_2 \in GX$

$$\rho_H(\zeta_1 \cap \eta_1, \zeta_1 \cap \eta_2) \leq \max_{i=1,2} \rho_H(\zeta_i, \eta_i),$$

$$\rho_H(\zeta_1 \cap \eta_1, \zeta_2 \cap \eta_2) \leq \max_{i=1,2} \rho_H(\zeta_i, \eta_i).$$

Неравенство для объединений справедливо в метрике Хаусдорфа для любых подмножеств , а неравенство для пересечений влечет импликация $F \in \zeta_1 \cap \zeta_2 \Rightarrow B(F,\varepsilon) \in \eta_1 \cap \eta_2$ ($B(F,\varepsilon)$ - замкнутый ε-шар).

Доказательство утверждения теоремы для $N_k X$ проводится аналогично с использованием К-миксера .

3. Пространства $Exp\ X$, $Exp_c X$, $Comp\ X$, $Comp_c X$.

$Exp\ X$ - пространство непустых, ограниченных замкнутых подмножеств с метрикой Хаусдорфа (ниже везде будут рассматриваться только ограниченные замкнутые подмножества).

$Exp_c X$ - подпространство $Exp\ X$, состоящее из связных подмножеств.

$Comp\ X$ - подпространство $Exp\ X$, состоящее из компактных подмножеств.

$Comp_c X$ - подпространство $Comp\ X$, состоящее из связных подмножеств.

Теорема 2. Пространство $Exp\ X$ является М-пространством.

Для доказательства теоремы понадобятся две леммы, которые доказываются стандартно.

Лемма 1. Объединение компактного семейства (в смысле $Exp\ X$) ограниченных замкнутых множеств - ограниченно и замкнуто в X.

Лемма 2. Объединение связного компактного семейства связных замкнутых множеств - связно.

Доказательство теоремы. Пусть $g : S \to Exp\ X$ - непрерывное отображение, круг B вкладывается в $Comp_c S$ так, что S является его границей при естественном вложении (лемма 4 [4]). Ниже B будет пониматься как подмножество $Comp_c S$. Продолжение отображения g построим следующим образом : $\bar{g} = C \circ Comp_c\ g|_B$, где $C : Comp_c S \to Comp_c(Exp\ X)$ - отображение объединения, а $Comp_c g : Comp_c S \to Comp_c(Exp\ X)$. Непрерывность C доказывается в пункте б).

а) Для любых непрерывных отображений g_1 и g_2 в любое метрическое пространство $g_1, g_2 : S \to Z$ справедливо равенство :

$$\max_{\varphi \in Comp_c S} \rho_H(Comp_c g_1(\varphi), Comp_c g_2(\varphi)) = \max_{x \in S} \rho(g_1(x), g_2(x)).$$

б) Если F , $\Phi \in Comp_c(Exp\ X)$, тогда по лемме 1 $C(\Phi)$ и $C(F) \in Exp\ X$ и $\rho_H(C(F), C(\Phi)) \leq \rho_{H^2}(F, \Phi)$.

Проверим последнее неравенство. Пусть $x \in C(\Phi)$, тогда $x \in \varphi \in \Phi$ и, следовательно, существует $f \in F$, что $\rho_H(\varphi, f) = \rho_{H^2}(F, \Phi) = \varepsilon$, то есть $\varphi \in B(f,\varepsilon)$, где $B(f,\varepsilon)$ - замкнутый ε-шар в метрике ρ_H . Последнее влечет существование $y \in f$ такого, что $\rho(x,y) < \varepsilon$. Таким образом, для любой точки $x \in C(\Phi)$ существует точка $y \in C(F)$, удовлетворяющая условию : $\rho(x,y) = \rho_{H^2}(F,\Phi)$, и , наоборот, для любой точки $y \in C(F)$ существует $x \in C(\Phi)$ с тем же условием. Утверждение б) доказано.

Из а) и б) следует, что на $Exp\ X$ действительно определена

М-структура, в выпуклость точек относительно этой М-структуры очевидна.

Следствие. Пространства $\mathrm{Exp}_c X$, $\mathrm{Comp}\, X$, $\mathrm{Comp}_c X$ являются М-пространствами.

Доказательство. Из леммы 2 и доказательства теоремы 2 следует, что $\mathrm{Exp}_c X$ является М-выпуклым подмножеством $\mathrm{Exp}\, X$. Из лемм 2′ и 2′′ статьи У.Ташметова [4] следует, что $\mathrm{Comp}\, X$ и $\mathrm{Comp}_c X$ являются М-выпуклыми подмножествами $\mathrm{Exp}\, X$.

4. Ретракты М-пространств при равномерно непрерывных ретракциях, в частности, пространства упорядоченных дуг $\Gamma(X)$ и $\Gamma^c(X)$ (см.[5]), если ретракции коммутируют с М-структурой, то есть для любого непрерывного отображения границы симплекса f справедливо $\Gamma \circ \bar{f} = \overline{\Gamma \circ \bar{f}}$.

Если X – континуум, то на $\Gamma(X)$ и $\Gamma^c(X)$ существует специальная параметризация (теорема 2.1 [5]), связанная отображением Уитни. $\Gamma(X)$ и $\Gamma^c(X)$ являются М-пространствами в метрике $\max\limits_{t \in [0,1]} \rho_H(\gamma(t), \alpha(t))$, где $\gamma(t)$ и $\alpha(t) \in \Gamma(X)$. Для доказательства этого надо воспользоваться леммой 3.3 [5] о том, что $\Gamma(X)$ является ретрактом $\mathrm{Comp}(\Gamma(X))$.

5. М-пространствами являются прямые произведения М-пространств в метрике максимума.

Теорема 3. Пусть X – локально линейно (и линейно) связное М-пространство, тогда X – ANR ($\mathcal{M}$) – абсолютный окрестностный (AR ($\mathcal{M}$) – абсолютный) ретракт в классе метрических пространств.

Доказательство. Докажем, что $X \in AE(\mathcal{M})$, то есть является абсолютным экстензором в классе метрических пространств, в данном случае это эквивалентные утверждения (см. [6, с. 98]).

Пусть (Y, ρ) – метрическое пространство, A – замкнутое подмножество Y, $f : A \to X$ – непрерывное отображение.

Существует каноническое покрытие $G = \{ G_\lambda \mid \lambda \in L \}$ множества $Y \setminus A$ (см. [6, с. 76]). Это покрытие локально конечно, и для любой точки $a \in A$, любой ее окрестности V_a в пространстве Y существует такая окрестность W_a точки a в Y, что из неравенства $G_\lambda \cap W_a \neq \emptyset$ следует, что $G_\lambda \subset V_a$.

Пусть N – нерв покрытия G, N является политопом с триангуляцией –, образованной всеми симплексами вида

$\sigma(G_{\lambda_0}, \ldots, G_{\lambda_k})$, где $G_{\lambda_0} \cap \ldots \cap G_{\lambda_k} \neq \emptyset$.

План дальнейших рассуждений такой : мы построим некоторое отображение $f_\infty : N \to X$ и докажем, что отображение $\bar{f} : Y \to X$, равное :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in A, \\ f_\infty \circ \varkappa(x), & \text{если } x \in Y \setminus A, \end{cases}$$

является непрерывным продолжением отображения f ($\varkappa : Y \setminus A \to N$ – каноническое отображение (см. [6, с. 86]).

Итак, определим отображение f_0 на 0-мерном остове N_0 триангуляции –, сопоставив каждой вершине G_λ точку $a_\lambda \in Y$ так, что $\rho(a_\lambda, G_\lambda) < 2 \sup\limits_{x \in G_\lambda} \rho(x, A)$. Положив $f_0(G_\lambda) = f(a_\lambda)$ для любой вершины G_λ из N_0, получаем непрерывное отображение $f_0 : N_0 \to X$.

Пусть σ – 1-мерный симплекс триангуляции N_1. Отображение f_0 продолжим на σ таким образом, что $\mathrm{diam}(f_1(\sigma))$ меньше удвоенного инфинума диаметров всевозможных продолжений отображения f_0. Далее отображение f_1 продолжаем последовательно на k-мерные остовы N_k триангуляции – с помощью М-структуры.

Пусть определено отображение $f_k : N_k \to X$. Рассмотрим симплекс $\sigma \in N_{k+1}$. Отображение f_k определено на границе $\partial\sigma$, поэтому определено отображение $\bar{f}_k : \sigma \to X$. Таким образом, $f_{k+1}|_\sigma = \bar{f}_k|_\sigma$ и отображение $f_\infty : N \to X$ задано на всем нерве N.

Проверим, что отображение $\bar{f}$ действительно является непрерывным. В самом деле, из конструкции f_∞ следует, что f_∞ является непрерывным отображением нерва N в пространство X. Так как покрытие G локально конечно, то это влечет непрерывность отображения $\bar{f}$ во внутренних, то есть во всех, точках множества $X \setminus A$. Во внутренних точках множества A непрерывность отображения $\bar{f}$ очевидна. Осталось проверить, что отображение $\bar{f}$ непрерывно в любой точке $x \in A \setminus (\overline{Y \setminus A})$. Следующее свойство является простым следствием условий 1 и 2 из определения М-структуры : для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для любой точки $x \in X$, любого симплекса σ, любого непрерывного отображения $\varphi : \sigma_1 \to O_\delta x$ 1-мерного остова σ в δ-окрестность точки x продолжение этого отображения $\bar{\varphi}$ на весь симплекс $б$ по любой комбинаторной схеме попадает в $O_\varepsilon x$ - ε-окрестность точки x. Из конструкции отображения $f_1 : N_1 \to X$ следует, что существует окрестность V точки f(x), такая, что если $f_0(б_0) \subset V$, то $f_1(б_1) \subset O_\delta x$ для любого симплекса $б \in -$ ($б_0, б_1$ - соответствующие остовы симплекса $б$). В самом деле, по определению локальной линейной связности, для любого $\mu>0$ существует $\eta>0$, такое, что если $t_1, t_2 \in O_\eta f(x)$, то существует путь, связывающий t_1 с t_2 и содержащийся в $O_\mu f(x)$.

Последнее вместе с определением отображения f_1 влечет импликацию : $f_0(б_0) \subset O_\eta f(x)$, тогда $f_1(б_1) \subset O_{2\mu} f(x)$. Из непрерывности отображения f следует существование окрестности W_x, такой, что если $a_\lambda \in W_x$ (см. определение f_0), то $f(a_\lambda) \in V$, а так как покрытие G каноническое, то существует окрестность Ox со свойством : $G_\lambda \cap Ox \neq \emptyset \Rightarrow a_\lambda \in W$.

Таким образом, если $y \in Ox$, то $\varkappa(y) \in б$ и $f_\infty(б) \leq O_\delta x$ (так как $f_0(б_0) \leq V$ б $f_1(б_1) \leq O_\delta x$ б $f_\infty(б) \leq O_\varepsilon x$), а, значит, $\bar{f}(Ox) \leq U$, то есть отображение $\bar{f}$ непрерывно в точке x.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mill J. van. An almost fixed point theorem for metrisable continua //Arch. Math. 1983. V. 40. P. 159 - 169.
2. Иванов А.В. О пространствах полных сцепленных систем // Сиб. матем. журн. 1986. Т.27. N 6. С. 95 - 110.
3. Моисеев Е.В. О пространствах замкнутых гиперпространств роста и включения //Вестник МГУ, сер.1. 1988. N 3. С.54 - 57.
4. Ташметов У.О. О связности и локальной связности некоторых гиперпространств //Сиб. матем.журн. 1974. Т.15. N 5. С.1115 - 1130.
5. Eberhart C., Nadler S., Nowell N.O. Spaces of order arcs in hyperspaces // Fund. Math. 1981. V. 112. N 2. P. 111 - 120.
6. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971. С. 291.

Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 517.986

Мосягин В.В.

К ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С КОНУСОМ

В статье доказаны теоремы о неподвижных точках монотонных и гетеротонных операторов в локально выпуклых линейных топологических пространствах с конусом.

1. Пусть (X,τ) - вещественное полное хаусдорфово локально выпуклое топологическое пространство; $P=\{p\}$ - система полунорм, определяющих топологию τ в X [1]; θ - нуль пространства X.

Определение 1.1. Замкнутое выпуклое множество $K \subset X$ называется конусом, если $x \in K$, $x \neq \theta$ влечет за собой $\alpha x \in K$ при $\alpha \geq 0$ и $-x \notin K$.

Любой конус $K \subset X$ позволяет ввести в X полуупорядоченность: $x > y$ (равносильно $y < x$), если $x-y \in K$. Элементы $x > \theta$ (то есть $x \in K$) называются положительными.

Использование полуупорядоченности при изучении операторов, действующих в X, опирается на знание свойств отношения $>$.

Предложение 1.1. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ - две топологически сходящиеся (соответственно к точкам x_o, y_o) последовательности в пространстве X, полуупорядоченном при помощи конуса K,

$$x_n \xrightarrow{\tau} x_o, \quad y_n \xrightarrow{\tau} y_o,$$

причем

$$x_n < y_n \quad (n=1,2,\dots). \tag{1.1}$$

Тогда $x_o < y_o$.

Доказательство. Соотношение (1.1) означает, что $y_n - x_n \in K$ $(n=1,2,\dots)$. В силу замкнутости K предел $y_o - x_o$ последовательности $y_n - x_n$ $(n=1,2,\dots)$ также принадлежит K. Утверждение доказано.