отображения $\bar{\varphi}$ на весь симплекс σ по любой комбинаторной схеме попадает в $O_\varepsilon x$ – ε-окрестность точки x. Из конструкции отображения $f_1 : N_1 \to X$ следует, что существует окрестность V точки $f(x)$, такая, что если $f_0(\sigma_0) \subset V$, то $f_1(\sigma_1) \subset O_\delta x$ для любого симплекса $\sigma \in$ – (σ_0, σ_1 – соответствующие остовы симплекса σ). В самом деле, по определению локальной линейной связности, для любого $\mu > 0$ существует $\eta > 0$, такое, что если $t_1, t_2 \in O_\eta f(x)$, то существует путь, связывающий t_1 с t_2 и содержащийся в $O_\mu f(x)$.

Последнее вместе с определением отображения f_1 влечет импликацию : $f_0(\sigma_0) \subset O_\eta f(x)$, тогда $f_1(\sigma_1) \subset O_{2\mu} f(x)$. Из непрерывности отображения f следует существование окрестности W_x, такой, что если $a_\lambda \in W_x$ (см. определение f_0), то $f(a_\lambda) \in V$, а так как покрытие G каноническое, то существует окрестность Ox со свойством : $G_\lambda \cap Ox \neq \emptyset \Rightarrow a_\lambda \in W$.

Таким образом, если $y \in Ox$, то $\varkappa(y) \in \sigma$ и $f_\infty(\sigma) \leqslant O_\delta x$ (так как $f_0(\sigma_0) \leqslant V$ б $f_1(\sigma_1) \leqslant O_\delta x$ б $f_\infty(\sigma) \leqslant O_\varepsilon x$), а , значит , $\bar{f}(Ox) \leqslant U$, то есть отображение $\bar{f}$ непрерывно в точке x.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mill J. van. An almost fixed point theorem for metrisable continua //Arch. Math. 1983. V. 40. P. 159 - 169.
2. Иванов А.В. О пространствах полных сцепленных систем // Сиб. матем. журн. 1986. Т.27. N 6. С. 95 - 110.
3. Моисеев Е.В. О пространствах замкнутых гиперпространств роста и включения //Вестник МГУ, сер.1. 1988. N 3. С.54 - 57.
4. Ташметов У.О. О связности и локальной связности некоторых гиперпространств //Сиб. матем.журн. 1974. Т.15. N 5. С.1115 - 1130.
5. Eberhart C., Nadler S., Nowell N.O. Spaces of order arcs in hyperspaces // Fund. Math. 1981. V. 112. N 2. P. 111 - 120.
6. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971. С. 291.

Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 517.986
Мосягин В.В.

К ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С КОНУСОМ

В статье доказаны теоремы о неподвижных точках монотонных и гетеротонных операторов в локально выпуклых линейных топологических пространствах с конусом.

1. Пусть (X,τ) – вещественное полное хаусдорфово локально выпуклое топологическое пространство; $P=\{p\}$ – система полунорм, определяющих топологию τ в X [1]; θ – нуль пространства X.

Определение 1.1. Замкнутое выпуклое множество $K \subset X$ называется конусом, если $x \in K$, $x \neq \theta$ влечет за собой $\alpha x \in K$ при $\alpha \geqslant 0$ и $-x \bar{\in} K$.

Любой конус $K \subset X$ позволяет ввести в X полуупорядоченность: $x > y$ (равносильно $y < x$), если $x - y \in K$. Элементы $x > \theta$ (то есть $x \in K$) называются положительными.

Использование полуупорядоченности при изучении операторов, действующих в X, опирается на знание свойств отношения $>$.

Предложение 1.1. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – две топологически сходящиеся (соответственно к точкам x_o, y_o) последовательности в пространстве X, полуупорядоченном при помощи конуса K,

$$x_n \xrightarrow{\tau} x_o, \quad y_n \xrightarrow{\tau} y_o,$$

причем

$$x_n < y_n \quad (n=1,2,\dots). \tag{1.1}$$

Тогда $x_o < y_o$.

Доказательство. Соотношение (1.1) означает, что $y_n - x_n \in K$ $(n=1,2,\dots)$. В силу замкнутости K предел $y_o - x_o$ последовательности $y_n - x_n$ $(n=1,2,\dots)$ также принадлежит K. Утверждение доказано.

Наличие полуупорядочения в X позволяет ввести понятия мажоранты, миноранты, супремума и инфимума.

Если множество $M \subset X$ имеет мажоранту, то его называют ограниченным сверху; если имеет миноранту - ограниченным снизу.

В каждом конкретном случае специфика конуса, при помощи которого вводится полуупорядочение в локально выпуклом пространстве X, может обеспечить наличие дополнительных свойств у отношения $\geqslant$. Это обстоятельство, как и в случае банаховых пространств [2], стимулирует изучение различных классов конусов в X.

Ниже всюду через X будем обозначать вещественное полное хаусдорфово локально выпуклое пространство, полуупорядоченное при помощи конуса K.

Определение 1.2. Конус K в X называется миниэдральным, если каждое конечное число элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ имеет точную верхнюю границу $\tilde{z} = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, и сильно миниэдральным, если точная граница есть у любого ограниченного сверху множества.

Определение 1.3. Конус K в пространстве X называется б-правильным, если каждая неубывающая последовательность

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots, \tag{1.2}$$

ограниченная сверху некоторым элементом

$$x_n \leqslant y \quad (n=1,2,\ldots), \tag{1.3}$$

сходится топологически в X.

Предложение 1.2. Если конус $K \subset X$ б-правильный, то каждая последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая соотношению

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots \geqslant u \tag{1.4}$$

при некотором $u \in X$, сходится в топологии τ.

Доказательство очевидно.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.14 из работы [2].

Теорема 1.1. Пусть в пространстве X конус K б-правилен и миниэдрален. Тогда каждая ограниченная сверху последовательность имеет точную верхнюю границу.

Доказательство. Пусть

$$x_n \leqslant z \quad (n=1,2,\ldots). \tag{1.5}$$

Тогда очевидно,

$$y_n = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leqslant z \quad (n=1,2,\ldots). \tag{1.6}$$

Так как последовательность $\{y_n\}$ не убывает и ограничена сверху, то она сходится в топологии τ к некоторому пределу $z_o \in X$. Переходя к пределу в неравенстве $y_n \leqslant y_{n+k}$ при $k \to \infty$, получим $y_n \leqslant z_o (n=1,2,\ldots)$, откуда следует, что $x_n \leqslant z_o (n=1,2,\ldots)$.

Допустим, что выполнены соотношения (1.5). Тогда выполнены соотношения (1.6), переходя в которых к пределу $n \to \infty$, получим неравенство $z_o \leqslant z$. Значит, z_o является точной верхней границей последовательности $\{x_n\}$. Теорема доказана.

Определение 1.4 [1]. Конус K в пространстве X называется нормальным, если существует система полунорм $P=\{p\}$, определяющих топологию τ пространства X, монотонных на конусе (если $\theta \leqslant x \leqslant y$, то $p(x) \leqslant p(y)$ для каждой полунормы p из P).

2. Тот факт, что вещественное полное хаусдорфово локально выпуклое пространство X полуупорядочено при помощи некоторого конуса K, может использоваться при изучении оператора A, действующего в X, лишь в том случае, когда A обладает свойствами, связанными с полуупорядоченностью.

Определение 2.1. Оператор A, действующий в пространстве X, называется:

положительным, если $A(K) \subset K$;

монотонным на множестве $\mathfrak{D} \subseteq X$, если из $x, y \in \mathfrak{D}$, $x \geqslant y$ следует $A(x) \geqslant A(y)$.

Для нелинейных операторов указанные свойства независимы. Для линейного оператора из свойства положительности следует монотонность.

Множество элементов $x \in X$, удовлетворяющих неравенствам

$$v_o \leqslant x \leqslant w_o,$$

где v_o, w_o - фиксированные элементы из X, называется конусным отрезком и обозначается через $\langle v_o, w_o \rangle$.

Легко доказать, что если K - нормальный конус в X, то множество $\langle v_o, w_o \rangle$ ограничено по полунормам.

Пусть для монотонного оператора A, действующего в X, могут быть указаны такие элементы v_o, w_o, что $v_o \leqslant w_o$ и

$$Av_o \geq v_o,\ Aw_o \leq w_o. \tag{2.1}$$

Тогда оператор A оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle v_o,w_o\rangle$. Действительно, в этом случае неравенства

$$v_o \leq x \leq w_o$$

влекут за собой неравенства

$$v_o \leq A(v_o) \leq A(x) \leq A(w_o) \leq w_o. \tag{2.2}$$

Построим последовательности

$$v_n=A(v_{n-1}),\ w_n=A(w_{n-1})\ (n=1,2,\dots). \tag{2.3}$$

Первая из них в силу (2.1) монотонно возрастает и ограничена сверху, а вторая монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому указанные последовательности сходятся, если конус K б-правильный. Если оператор A непрерывен, то в равенствах (2.3) можно перейти к пределу. Значит,

$$v^*=A(v^*),\ w^*=A(w^*),$$

где v^* - предел последовательности $\{v_n\}$, а w^* - предел последовательности $\{w_n\}$. При этом элементы v^*,w^* могут быть различными.

Приведенные рассуждения показывают, что для доказательства существования решений уравнения

$$x=A(x)$$

в пространстве X с непрерывным и монотонным оператором A и для построения сходящихся последовательных приближений достаточно установить существование элементов v_o,w_o, удовлетворяющих соотношениям (2.1). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть K - б-правильный конус в X. Пусть непрерывный и монотонный на конусном отрезке $\langle v_o,w_o\rangle$ оператор A преобразует этот отрезок в себя.

Тогда оператор A имеет на $\langle v_o,w_o\rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку. При этом последовательности (2.3) сходятся к неподвижным точкам оператора A.

Следующая теорема гарантирует существование неподвижной точки у разрывного оператора A, действующего в пространстве X.

Теорема 2.2 (принцип Биркгофа-Тарского [2]). Пусть конус K в пространстве X сильно миниэдрален. Тогда любой монотонный оператор A (не обязательно непрерывный), оставляющий инвариантным конусный отрезок $\langle v_o,w_o\rangle$, имеет на $\langle v_o,w_o\rangle$ по крайней мере одну

неподвижную точку.

3. В пространстве X рассмотрим класс операторов, обладающих свойством своеобразной обобщенной монотонности. Следуя работе [3], дадим следующие определения.

Определение 3.1. Оператор V, действующий в вещественном полном хаусдорфовом локально выпуклом пространстве X, полуупорядоченном при помощи конуса $K \subset X$, называется гетеротонным, если он допускает диагональное представление

$$V(x)=W(x,x), \tag{3.1}$$

причем оператор $W(v,w)$, действующий из $X \times X$ в X, монотонно возрастает по первому аргументу и монотонно убывает по второму.

Определение 3.2. Конусный отрезок $\langle v_o,w_o\rangle$ назовем сильно инвариантным для гетеротонного оператора V, если

$$W(v_o,w_o) \geq v_o,\ W(w_o,v_o) \leq w_o.$$

Замечание 3.1. Из сильной инвариантности $\langle v_o,w_o\rangle$ следует его обычная инвариантность для V, так как если $x \in \langle v_o,w_o\rangle$, то $v_o \leq W(v_o,w_o) \leq W(x,x)=V(x) \leq W(w_o,v_o) \leq v_o$.

В дальнейшем существенную роль будет играть условие

δ. Система уравнений

$$W(v,w)=v,\ W(w,v)=w \tag{3.2}$$

на множестве $M \subset X \times X$ не имеет решений таких, что $v \neq w$.

Введение в множестве пар элементов (v,w) систему полунорм

$$\tilde{p}(v,w)=p(v)+p(w),\ p \in P, \tag{3.3}$$

превращает $X \times X$ в вещественное полное хаусдорфово локально выпуклое пространство.

Теорема 3.1. Пусть конусный отрезок $\langle v_o,w_o\rangle$ является сильно инвариантным для гетеротонного оператора V и на $\langle v_o,w_o\rangle$ выполнено условие δ. Пусть, кроме того, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) конус K б-правильный, оператор W непрерывен;
2) конус K сильно миниэдрален.

Тогда у оператора $\tilde{V}$ существует неподвижная точка $x^* \in \langle v_o,w_o\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\tilde{V}: X \times X \longrightarrow X \times X$, который паре элементов (v,w) сопоставляет пару $(W(v,w),W(w,v))$. Легко видеть, что из непрерывности оператора W следует непрерывность оператора $\tilde{V}$.

Введем далее полуупорядоченность в $X \times X$ по правилу: $(v',w')>(v,w)$, если $v'>v$, $w'<w$. Можно считать, что полуупорядоченность, определяемая знаком $>$, вводится при помощи конуса

$$\tilde{K}=\{(v,w):\ v \in K,\ -w \in K\}.$$

При этом очевидно, что б-правильность, миниэдральность конуса K влекут за собой наличие соответствующих свойств у конуса $\tilde{K}$.

Завершим доказательство следующим образом. Очевидно, что из $(v',w')>(v,w)$ следует $\tilde{V}(v',w')>\tilde{V}(v,w)$, т.е. оператор $\tilde{V}$ является монотонным. Кроме того, $\tilde{V}$ оставляет инвариантным конусный отрезок

$$\langle (v_o,w_o),(w_o,v_o)\rangle=\{(v,w):\ (v_o,w_o) < (v,w) < (w_o,v_o)\}.$$

Теперь из теорем о существовании неподвижной точки у монотонного оператора следует, что в наших предположениях $\tilde{V}$ имеет неподвижную точку (v^*,w^*), которая, очевидно, является решением системы уравнений (3.2). В силу условия б $v^*=w^*$. Следовательно, оператор V имеет неподвижную точку $x^*=v^*=w^*$. Теорема доказана.

Замечание 3.2. Список условий 1)-2) можно продолжить. В него можно включить любое условие, которое обеспечивает существование неподвижной точки у монотонного оператора, имеющего инвариантный конусный отрезок. Например, можно было бы добавить условие: конус K - нормальный, оператор V - вполне непрерывный (определение вполне непрерывного оператора, действующего в локально выпуклом пространстве, дано в работе [4]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. С. 359.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. С. 394.
3. Опойцев В.И. Нелинейная системостатика. М.: Наука, 1986. С. 248.
4. Schaefer H. Uber die Methode der apriori Schranken // Math. Annalen. 1955. Bd. 129. S. 415-416.

Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 518.3

Нижник П.П., Аюкаев Р.И.

АНАМОРФОЗА ДЕКАРТОВА АБАКА В СОСТАВНЫХ НОМОГРАММАХ

Получена нелинейная анаморфоза декартова абака, с использованием которой разработана номограмма, пригодная для практических расчетов.

Задача отыскания линейной анаморфозы $\bar{x}=\varphi(x)$, $\bar{y}=\phi(y)$ уравнения $f(x,y,z)=0$, как показывает практика, разрешима не всегда.

Теорема 1. Чтобы уравнение $f(x,y,z)=0$ допускало анаморфозу, необходимо и достаточно, чтобы отношение частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ можно было бы представить в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых является функцией лишь одного аргумента.

Из уравнений анаморфозы имеем

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} = \frac{\phi'(y)}{\varphi'(x)} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \text{ но } \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\partial f/_{\partial x}}{\partial f/_{\partial y}}.$$

Поэтому $\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} = \dfrac{\phi'(y)}{\varphi'(x)} \dfrac{\partial f/_{\partial x}}{\partial f/_{\partial y}} R(z)$, т.е. касательная во всех точках каждой кривой имеет одно и то же направление.

Из последнего имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} = - \varphi'(x)\,(\phi'(y))^{-1}R(z).$$

Верно и обратное. Если отношение частных производных представляется произведением трех множителей, являющихся функцией трех переменных, то уравнение допускает анаморфозу, выпрямляющую декартов абак.