Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 517.986

Платонов С.С.

О ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ИНВАРИАНТНЫМИ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть T и τ - представления группы Ли G в топологических векторных пространствах. Получена теорема, дающая достаточные условия для того, чтобы можно было установить взаимно однозначное соответствие между замкнутыми T-инвариантными и τ-инвариантными подпространствами.

В качестве примеров применения теоремы рассмотрены случаи, когда T и τ - квазирегулярные представления группы G в некоторых конкретных функциональных топологических векторных пространствах, используемых в гармоническом анализе на группах Ли.

Пусть G - произвольная группа Ли, $T(g)$ и $\tau(g)$ - представления группы G в полных локально выпуклых пространствах (ЛВП) V и V_o соответственно (представления групп Ли всегда предполагаются непрерывными). Линейное пространство $H\subseteq V$ (или $H\subseteq V_o$) будем называть инвариантным подпространством (сокращенно ИПП), если H замкнуто и инвариантно относительно представления $T(g)$ (соотв. $\tau(g)$). В некоторых случаях удается установить взаимно однозначное соответствие между ИПП в V и V_o, что позволяет свести задачу описания инвариантных подпространств в V к описанию ИПП в V_o.

Наиболее важен для гармонического анализа на группах Ли следующий случай (см.[1,с.134]): пусть группа G транзитивно действует на гладком многообразии M, V и V_o - топологические векторные пространства, состоящие из функций на M (все функции

предполагаются комплекснозначными), T и τ - ограничения на V и V_o квазирегулярного представления $\pi(g)$, где

$$\pi(g):\ f(x)\to f(g^{-1}x),\quad x\in M,\ g\in G.$$

В настоящей работе получены некоторые достаточные условия для того, чтобы между ИПП в V и V_o можно было установить взаимно однозначное соответствие. В качестве приложения этих результатов установлено взаимно однозначное соответствие между ИПП в некоторых функциональных пространствах, которые часто используются в различных задачах гармонического анализа.

Пусть G - произвольная группа Ли. Через $C_c(G)$ и $C_c^\infty(G)$ обозначим множества всех непрерывных и бесконечно дифференцируемых функций на группе G с компактным носителем. Относительно свертки

$$\varphi_1*\varphi_2(g)=\int\varphi_1(gh^{-1})\varphi_2(h)dh \tag{1}$$

(dh -элемент меры Хаара на группе G, интегралы всюду берутся по всему пространству с мерой, если не указана область интегрирования) $C_c(G)$ и $C_c^\infty(G)$ являются ассоциативными алгебрами. Любое представление T группы G в полном ЛВП V индуцирует действие алгебры $C_c(G)$ в пространстве V:

$$\varphi*v=\int\varphi(g)T(g^{-1})v\,dg\quad \forall\varphi\in C_c(G),\ \forall v\in V; \tag{2}$$

интеграл в (2) можно понимать как интеграл Римана от функции со значениями в ЛВП V.

Теорема 1. Пусть T и τ -представления группы G в полных ЛВП V и V_o соответственно, и пусть выполняются следующие условия:

1) $V_o\subseteq V$, и это вложение непрерывно;

2) $T(g)|_{V_o}=\tau(g)\ \forall g\in G$;

3) $\forall v\in V$, $\forall\varphi\in C_c^\infty(G)$ вектор $\varphi*v\in V_o$ и отображение $v\to\varphi*v$ из V в V_o непрерывно.

Тогда между инвариантными подпространствами в V и V_o существует взаимно однозначное соответствие, которое получается сопоставлением ИПП $H_o\subseteq V_o$ его замыкания $H=[H_o]$ в V. То же соответствие получается, если сопоставить ИПП $H\subseteq V$ подпространство $H_o=H\cap V_o\subseteq V_o$.

Доказательство. Выберем на группе G последовательность функций $\varphi_n(g)\in C_c^\infty$, удовлетворяющую условиям: (1) $\varphi_n(g)>0$; (2) $\int\varphi_n(g)dg=1$; (3) носители $\mathrm{supp}(\varphi_n)$, начиная с некоторого номера, попадают в любую, сколь угодно малую окрестность единицы группы G. Такую последовательность функций будем называть δ-образной. Стандартное рассуждение показывает, что $\varphi_n * v \to v$ при $n \to \infty$ в пространстве V, а при $v \in V_o$ и в пространстве V_o.

Если H - замкнутое инвариантное подпространство в V, то $H \cap V_o$ будет инвариантным подпространством в V_o. Если $v \in H$, то векторы $\varphi_n * v \in H_o$ и, следовательно, H_o плотно в H. В результате получаем, что отображение $H_o \to [H_o]$ сюръективно.

Теперь пусть H_o - произвольное ИПП в V_o, $H = [H_o]$. Проверим, что $H \cap V_o = H_o$. Пусть $v \in H \cap V_o$. Тогда $v_\alpha \to v$ в пространстве V для некоторой направленности $v_\alpha \in H_o$. Из свойства (3) следует, что $\varphi_n * v_\alpha \to \varphi_n * v$ в пространстве V_o для любого фиксированного n. Так как $\varphi_n * v_\alpha \in H_o$ и H_o замкнуто в V_o, то $\varphi_n * v \in V_o$. Но $\varphi_n * v \to v$ при $n \to \infty$ в пространстве V_o, следовательно, и $v \in H_o$. Окончательно получаем, что отображения $H_o \to H = [H_o]$ и $H \to H_o = H \cap V_o$ являются взаимно обратными и устанавливают взаимно однозначное соответствие между инвариантными подпространствами в V_o и V.

Пусть группа Ли G транзитивно действует на многообразии M. Через $C = C^0$, $C^d (d=1,2,\dots)$ и C^∞ будем обозначать пространства всех непрерывных, d-раз непрерывно дифференцируемых и бесконечно дифференцируемых функций с обычными топологиями. В качестве пространства V возьмем пространство $C^d (d=0,1,2,\dots,\infty)$. Пусть $T(g): f(x) \to f(g^{-1}x)$ - квазирегулярное представление группы G в пространстве C^d. Пусть $V_o = \mathcal{E}$ и $\tau(g) = T(g)|_{\mathcal{E}}$. Легко видеть, что в этом случае выполняются условия теоремы 1. Следовательно, ИПП в C^d и $\mathcal{E}$ находятся во взаимно однозначном соответствии. В частности, получаем, что описание ИПП в C^d не зависит от d $(d=0,1,2,\dots,\infty)$.

Другие классы функциональных пространств будут состоять из функций экспоненциального роста в некотором смысле, который нуждается в уточнении.

Пусть M - риманово многообразие, G - транзитивная группа Ли преобразований пространства M, причем все преобразования группы G являются изометриями пространства M. Пусть O - фиксированная точка пространства M. Для $x \in M$ через $|x|$ обозначим расстояние от точки x до фиксированной точки O. Пусть K - стационарная подгруппа точки O. Для $g \in G$ определим "норму" $|g| = |gO|$. Тогда

очевидно, что при $x \in M$, $g \in G$

$$|ux| = |x|, \quad |u| = 0 \quad \forall u \in K; \tag{3}$$

$$|u_1 g u_2| = |g| \quad \forall u_1, u_2 \in K; \tag{4}$$

$$|gx| \leqslant |g| + |x|, \quad |g^{-1}x| \geqslant |x| - |g|, \quad |g^{-1}| = |g|. \tag{5}$$

$$|g_1 g_2| \leqslant |g_1| + |g_2| \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Через L^p_k $(p \geqslant 1)$ обозначим множество всех измеримых функций $f(x)$ на M, для которых

$$N_{p,k}(f) = \left(\int |f(x)|^p e^{-k|x|} dx \right)^{1/p} < \infty, \tag{6}$$

где dx - элемент римановой меры на многообразии M, интеграл берется по пространству M. При этом в функциональных пространствах, не состоящих из непрерывных функций, функции берутся с точностью до значений на множестве меры нуль. Пространство L^p_k является банаховым пространством (БП) относительно нормы $N_{p,k}$. Пространство

$$L^p_* = \bigcup_{k>0} L^p_k$$

снабдим топологией индуктивного предела БП L^p_k.

Отметим, что если $f(x) \in L^p_k$, то $f(gx) \in L^p_k$ для любого $g \in G$. Действительно,

$$N_{p,k}(f(gx)) = \left(\int |f(gx)|^p e^{-k|x|} dx \right)^{1/p} = \left(\int |f(y)|^p e^{-k|g^{-1}y|} dy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant e^{(k/p)|g|} N_{p,k}(f). \tag{7}$$

При этом была сделана замена $gx = y$, использованы инвариантность меры и (5).

Обозначим через C_k пространство непрерывных функций $f(x)$ на M, для которых $|f(x)| e^{-k|x|} \to 0$ при $|x| \to \infty$. Пространство C_k является БП относительно нормы

$$N_k(f) = \sup_{x \in M} |f(x)| e^{-k|x|}.$$

Пространство

$$C_* = \bigcup_{k>0} C_k$$

снабдим топологией индуктивного предела БП C_k.

Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли группы G. Для $X \in \mathfrak{g}$ и любой функции $f(x)$

пусть

$$(Xf)(x)=\frac{d}{dt}f(exp(tX)x)\Big|_{t=0}. \tag{8}$$

Выберем какой-нибудь базис $X_1,\ldots X_m$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Через C_k^d ($d\in\mathbb{Z}_+$) обозначим множество d-раз непрерывно дифференцируемых функций таких, что

$$X_{i_1}\ldots X_{i_r}f\in C_k$$

для любых векторов $X_{i_1},\ldots X_{i_r}$ $(0\leqslant r\leqslant d)$ из базиса алгебры $\mathfrak{g}$. C_k^d является банаховым пространством с нормой

$$N^*_{k,d}(f)=\Sigma\, N_k(X_{i_1}\ldots X_{i_r}f),$$

где суммирование происходит по всевозможным наборам $(i_1,\ldots i_r)$ $(0\leqslant r\leqslant d$, каждый индекс в наборе пробегает значения от 1 до m). В частности, $C_k^0=C_k$.

Пусть

$$C_k^\infty=\bigcap_{d=1}^{\infty}C_k^d.$$

Топология в C_k^∞ порождается системой норм $N^*_{k,d}$, и C_k^∞ становится локально выпуклым пространством.

Пространство

$$C_*^d=\bigcup_{k>0}C_k^d \quad (0\leqslant d\leqslant\infty)$$

снабдим топологией индуктивного предела ЛВП C_k^d.

Докажем, что пространства L_*^p и C_*^d удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть B_r-замкнутый шар радиуса r на многообразии M с центром в точке O, $v(B_r)$ -его объем.

Лемма 1. Для некоторых чисел $C,d>0$ справедливо неравенство

$$v(B_r)\leqslant Cd^r.$$

Доказательство. Рассуждение аналогично доказательству леммы 1 из работы [2]. Известно, что любое однородное риманово многообразие является полным [3, с.117] и, следовательно, по теореме Хопфа-Ринова, шар B_r компактен и любая пара точек $a,b\in M$ может быть соединена кривой длины $\rho(a,b)$, где $\rho(a,b)$ - расстояние от a до b.

Для любого $g\in G$ множество gB_r является шаром радиуса r с центром в точке gO. Так как шар B_r компактен, то найдется конечное множество $A_1=\{g_1,\ldots g_d\}\subset G$ такое, что

$$\bigcup_{i=1}^{d}g_iB_1\supseteq B_2.$$

Можно считать, что единица $e\in A_1$. Пусть множество A_n состоит из всевозможных произведений $g_{i_1}\ldots g_{i_n}$, где каждый множитель $g_{i_k}\in A_1$. Индукцией по n проверим, что

$$\bigcup_{g\in A_n}gB_1\supseteq B_{n+1}.$$

Для $n=1$ включение справедливо. Пусть $x\in B_{n+1}$. Соединим точки O и x кривой длины $|x|$ и на этой кривой найдем точку y, для которой $|y|\leqslant n$ и $\rho(x,y)\leqslant 1$. По предположению индукции $y=hz$, $h\in A_{n-1}$, $z\in B_1$. Из инвариантности расстояния следует, что $\rho(y,x)=\rho(z,h^{-1}x)\leqslant 1$, следовательно, $h^{-1}\in B_2$ и $h^{-1}x=g_iw$, $w\in B_1$. Окончательно $x=hg_iw$.

Так как множество A_n содержит не более чем d^n элементов, то $v(B_n)\leqslant d^nv(B_1)$. Если $[r]$ - целая часть числа r, то

$$v(B_r)\leqslant v(B_{[r]+1})\leqslant d^{[r]}v(B_1)\leqslant v(B_1)d^r.$$

Следствие 1. При $k>\ln(d)$ интеграл

$$\int_M e^{-k|x|}dx$$

конечен.

Действительно,

$$\int_M e^{-k|x|}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_n\setminus B_{n-1}}e^{-k|x|}dx,$$

а последний ряд сходится, так как

$$\int_{B_n\setminus B_{n-1}}e^{-k|x|}dx\leqslant e^{-k(n-1)}v(B_n)\leqslant e^{-k(n-1)}Cd^n=Ce^ke^{-n(k-\ln(d))}.$$

Лемма 2. $C_*\subseteq L_*^p$, причем это вложение непрерывно.

Доказательство. Пусть $f(x)\in C_k$ и $m>\ln(d)$. Тогда

$$N_{p,pk+m}(f)=\left(\int|f(x)|^p\,e^{-(k+m)|x|}dx\right)^{1\setminus p}\leqslant N_k(f)\left(\int e^{-m|x|}dx\right)^{1\setminus p}\leqslant CN_k(f).$$

Следовательно, $f\in L^p_{kp+m}$ и вложение $C\subset L^p_{kp+m}$ непрерывно.

Для любой функции $\varphi(g)$ на группе G и $X\in\mathfrak{g}$ пусть

$$(L(X)\varphi)(g)=\frac{d}{dt}\varphi(exp(tX)g)|_{t=0}.$$

Всюду в дальнейших формулах dg - элемент меры Хаара на группе G.

Лемма 3. Если $f\in L^p_*$ (или $f\in C^d_*$), $\varphi\in C^\infty_c(G)$, то $\varphi*f\in C^\infty_*$. Отображение $f\to\varphi*f$ из L^p_* (или из C^d_*) в C^∞_* непрерывно.

Доказательство. Предварительно заметим, что из единственности (с точностью до множителя) инвариантной меры на M следует, что для некоторого числа $A>0$

$$\int_G f(g^{-1}x)dg=A\int_M f(x)dx.$$

Пусть $f\in L^p_k$, $p>1$. Пользуясь неравенством Гельдера, получим

$$|\varphi*f(x)|=|\int\varphi(g)e^{(k/p)|g^{-1}x|}f(g^{-1}x)e^{-(k/p)|g^{-1}x|}dg|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int|f(g^{-1}x)|^p e^{-k|g^{-1}x|}dg\right)^{1/p}\cdot\left(\int|\varphi(g)|^q e^{(kq/p)|g^{-1}x|}dg\right)^{1/q}\leqslant$$
$$\leqslant A^{1/p}N_{p,k}(f)\,e^{(k/p)|x|}\cdot\left(|\varphi(g)|^q e^{(kp/q)|g|}dg\right)^{1/q},$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$. Следовательно,

$$|\varphi*f(x)|\leqslant C\,N_{p,k}(f)\,exp(\frac{k}{p}|x|),$$

где C не зависит от f. Из этого неравенства следует, что $\varphi*f\in C_{r/p}$ при $r>k$ и непрерывно зависит от f. Так как

$$X(\varphi*f)=(L(X)\varphi)*f\quad(X\in\mathfrak{g}),$$

то $\varphi*f\in C^\infty_{r/p}$ и непрерывно зависит от f.

Случаи $p=1$ и $f\in C^d_*$ рассматриваются аналогично.

Из теоремы 1 и леммы 3 сразу получаем следующее

Следствие 2. Между инвариантными подпространствами в L^p_* и C^d_* ($d\in\mathbb{Z}_+\cup\{\infty\}$) существует взаимно однозначное соответствие, построенное как в теореме 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Желобенко Д.П., Штерн А.И. Представления групп Ли. М.:Наука, 1983.
2. Гординг Л. Аналитические векторы в представлениях групп Ли // Математика. 1965. 9:5. С.78-94.
3. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М.:Наука, 1982.

Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 517.54

Старков В.В.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЛОКАЛЬНО КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ[1]

Рассматриваются классы $H(\alpha,K)$ гармонических в $\Delta=\{z:|z|<1\}$ функций $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ ($h(z)$ и $g(z)$ - регуляры в Δ), сохраняющих ориентацию ($J_f(z)>0$), K-квазиконформных в Δ, причем $f(0)=0$, $h'(0)+\overline{g'(0)}=1$, $\frac{h(z)}{h'(0)}$ из U_α ($\alpha\geqslant1$) - универсального линейно-инвариантного семейства функций. Расширяющиеся с ростом $\alpha\in[1,\infty]$ и $K\in[1,\infty]$ классы $H(\alpha,K)$ охватывают все сохраняющие ориентацию гармонические функции с указанной нормировкой. В статье рассмотрен случай конечных α и K. При $K=1$ приведенные результаты совпадают с известными результатами Х.Поммеренке в U_α.

Будем рассматривать комплекснозначные гармонические в круге $\Delta=\{z:|z|<1\}$ функции $f(z)=u+iv$, т.е. вещественные функции u и v должны быть гармоническими в Δ. В 80-е годы стала активно развиваться теория однолистных и локально однолистных гармонических в Δ функций. При этом в основу определения и изучения классов таких гармонических функций, по аналогии с регулярными в Δ функциями, закладывалась обычно геометрическая характеристика функций исследуемого класса (выпуклость, почти

[1] Настоящая статья представляет собой краткое изложение результатов. Полный текст статьи будет опубликован в 1994 г. в журнале "Annales UMCS".