$$X_K \le X_{K_m} \le O_H(Z_{K_m}, \varepsilon_o) \le O_H(Z_{[O_o(K,2^{-n})]}, \varepsilon_o) \le$$

$$\le O_H(O_H(Z_K, \frac{\varepsilon}{2}), \varepsilon_o) \le O_H(Z_K, \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}) = O_H(Z_K, \varepsilon) \le V.$$

Достаточность. Пусть для любого $Z \in U$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\{X: m(Z,X) < \varepsilon\} \subseteq U$. Покажем, что тогда U - открыто.

Пусть $\varepsilon > \frac{1}{2^m}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим открытое в LC $exp_c Y$ множество W, содержащее точку Z:

$$W = \bigcap_{j=1}^{m+1} O\{K_j, O(Z_{K_j}, \frac{\varepsilon}{2(m+1)})\},$$

и покажем, что оно лежит в U.

Для всякого $X \in W$ выполнены неравенства:

$$m(Z,X;K_j,2^{-j}) < \frac{\varepsilon}{2(m+1)}, \quad j=1,2,\dots,m+1.$$

Поэтому

$$m(Z,X) = \sum_{j=1}^{\infty} m(Z,X;K_j,2^{-j}) < \frac{\varepsilon}{2(m+1)} \cdot (m+1) + \sum_{j=m+2}^{\infty} 2^{-j} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $X \in W$ верно $m(Z.X) < \varepsilon$. а по условию это означает, что $X \in U$.

Утверждение 4. Если подпространство пространства LC $exp_c Y$ есть T_1-пространство, то оно метризуемо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.

Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 515.12

Стреколовская Н.С.

О РЕТРАКТЕ ЭКСПОНЕНТЫ $exp_2 X$ БИКОМПАКТА X

В работе доказывается теорема "Бикомпакт X является ретрактом экспоненты $exp_2 X$ ".

Приведем определения. На множестве непустых замкнутых множеств пространства X рассматривается топология Виеториса, базу которой образуют множества вида

$$O\langle U_1,\dots,U_n\rangle = \{F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ F \cap U_1 \ne \emptyset,\ F \cap U_2 \ne \emptyset,\ \dots,\ F \cap U_n \ne \emptyset\},$$

где $U_1,\dots,U_n$ открыты в X. Это топологическое пространство называется экспонентой expX. При этом пространство X естественно вкладывается в экспоненту $exp_2 X$, $X \subset exp_2 X$. Отображение вложения $j: X \to exp_2 X$ определяется формулой $j(x)=\{x\}$ для любой точки $x \in X$.

Множество из всех непустых замкнутых множеств пространства X мощности, не превосходящей кардинального числа k, называется $exp_k X$. При любом k имеет место включение $exp_k X \subset expX$ и можно рассматривать $exp_k X$ в качестве подпространства пространства expX (см. [1]).

Пусть X - бикомпакт. Рассмотрим на декартовом произведении $X \times X$ отношение эквивалентности: точка $(x,y) \sim (y,x)$. Так, заданное отношение эквивалентности задает разбиение R на произведении бикомпактов $X \times X$. Тривиальными элементами разбиения R являются точки вида (x,x). Фактор-пространство по разбиению R обозначим $X \times X/_R$, факторное отображение $\pi: X \times X \to X \times X/_R$.

Лемма . Экспонента бикомпакта X $exp_2 X$ гомеоморфна пространству $X \times X/_R$.

Доказательство леммы. Определим отображение $i: \exp_2 X \to X\times X/_R$. $i\{x\}=(x,x)$, если x – одноточечное множество в X, $i\{(x,y)\}=\{(x,y)\}$ для двухточечного множества. Отображение i, очевидно, взаимно однозначно. Покажем, что i – гомеоморфизм. Проверим непрерывность отображения i. Пусть Ot – произвольная окрестность точки $t=(x,y)$ в пространстве $X\times X/_R$, $x\neq y$, $x,y\in X$. В ней содержится окрестность вида $Ox\times Oy$, где Ox, Oy – открытые дизъюнктные окрестности точек x и y в бикомпакте X. Тогда $i(O\langle Ox,Oy\rangle)\subset Ox\times Oy\subset Ot$. Для точки $t=(x,x)$ в окрестности Ot возьмем окрестность $O't$, такую, что $\pi^{-1}O't = Ox\times Ox$, $O't\le Ot$, где Ox – окрестность точки x в бикомпакте X. Тогда $i(O\langle Ox\rangle)\subset O't\subset Ot$. Непрерывность отображения i доказана.

Проверим непрерывность обратного отображения i^{-1}. Пусть $O\langle W_1,W_2\rangle$ – произвольная базисная окрестность точки $t=(x,y)$, $x\neq y$ в $\exp_2 X$. Берем дизъюнктные окрестности Ox, Oy в бикомпакте X, чтобы $O\langle Ox,Oy\rangle\subset O\langle W_1,W_2\rangle$. Если точка $t=(x,x)$, то в любой базисной окрестности $O\langle W\rangle\ni t$ найдется окрестность $O't$, такая, что $\pi^{-1}O't\subset W\times W$. Ясно, что $i^{-1}(O't)\subset O\langle W\rangle$. Итак, экспонента $\exp_2 X$ гомеоморфна пространству $X\times X/_R$ ($\exp_2 X\approx X\times X/_R$). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Считаем $\exp_2 X \equiv X\times X/_R$ с помощью гомеоморфизма i, бикомпакт X подпространством $X\times X/_R$, состоящем из точек вида (x,x), $x\in X$ ($\Delta=\{(x,x),\ x\in X\}$). Построим ретракцию $r\colon X\times X/_R\to\Delta$. Пусть $F=(\{x\}\times X)\cup(X\times\{x\})$ в пространстве $X\times X$. Положим $r(\pi F)=(x,x)$, где π – факторное отображение. Докажем, что отображение r – непрерывно. В самом деле, базисные окрестности точки (x,x) в пространстве $X\times X/_R$ образуют множества вида $U = Ox\times Ox/_R$, где Ox – окрестность точки x в X. Покажем, что множество $\pi^{-1}(U\cap\Delta)$ открыто. Рассмотрим множество $\pi^{-1}r^{-1}(U\cap\Delta) = (Ox\times X)\cup(X\times Ox)$. Множество $(Ox\times X)\cup(X\times Ox)$ открыто в $X\times X$, следовательно, множество $r^{-1}(U\cap\Delta)$ открыто по определению факторной топологии, что и требовалось доказать.

В работе [2] поставлен следующий вопрос: если $\exp_2 X$ – AR-компакт, будет ли X – AR-компактом? Поскольку ретракт абсолютного ретракта является абсолютным

ретрактом, получаем с помощью теоремы положительный ответ на вопрос.

Следствие. Если $\exp_2 X$ – абсолютный ретракт, то бикомпакт X – абсолютный ретракт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. Шапиро Л.Б. О некоторых свойствах функторов экспоненциального типа// IV Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Тирасполь, 1979.