

УДК 519.21

Фомин А.С.

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА
В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

В настоящей работе дается некоторое обобщение предыдущего результата автора [4]. С его использованием уточняется один из известных результатов работы [2], а именно, вместо установленной ранее асимптотической нормальности случайной величины $B^{-1}(W_n - \mu_n)$ для нее доказана локальная предельная теорема.

Пусть генеральная совокупность содержит n различных элементов; W_n - объем выборки с возвращением, при котором получено $a_n + 1$ различных элементов, $0 \leq a_n < n$. Обозначим:

$$b_n = n - a_n, \quad \alpha_n = \frac{a_n}{n}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{n}, \quad \mu_n = MW_n, \quad B_n^2 = DW_n, \quad \gamma_n^3 = MW_n^3.$$

Известно (см. [1]), что

$$W_n = \xi_{\frac{n}{n}} + \xi_{\frac{n-1}{n}} + \dots + \xi_{\frac{b_n}{n}},$$

где ξ_p ($0 < p \leq 1$) - независимые случайные величины (сл.в.) с геометрическим распределением:

$$P\{\xi_p = k\} = q^{k-1}p, \quad q = 1-p, \quad k = 1, 2, \dots, p = \frac{n}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots, \frac{b_n}{n}.$$

В работе [2] показано, что

$$B_n^2 = \frac{n}{\beta_n} (1 - \beta_n + \beta_n \ln \beta_n) + \frac{6 \cdot \theta_1}{\beta_n^2}, \quad \text{где } |\theta_1| < 1. \quad (1)$$

Аналогично устанавливается, что

$$\gamma_n^3 = \frac{n}{\beta_n} [3(1 - \beta_n)^2 + \beta_n^2 \ln \beta_n] + \frac{43 \cdot \theta_2}{\beta_n^3}, \quad \text{где } |\theta_2| < 1. \quad (2)$$

В той же работе [2] доказана асимптотическая нормальность сл.в. $B_n^{-1}(W_n - \mu_n)$. Этот результат отдельно доказывается для следующих трех случаев:

$$1) \quad 0 < \alpha_n < 1; \quad 2) \quad \alpha_n \rightarrow 0; \quad 3) \quad \beta_n \rightarrow 0.$$

В работе [3] доказана локальная предельная теорема с оценкой остаточного члена для случая 1). Настоящая статья посвящена доказательству локальной теоремы для случаев 2) и 3). Основной результат - это

Теорема 1. Пусть при $n \rightarrow \infty$

$$1) \quad \alpha_n \rightarrow 0; \quad \alpha_n \geq c_1 \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{n}}, \quad 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad (3)$$

$$2) \quad \beta_n \rightarrow 0; \quad \beta_n \geq c_2 \frac{\varepsilon_2}{n}, \quad 0 < \varepsilon_2 < 1. \quad (4)$$

Тогда, как в первом, так и во втором случае, при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \frac{P\{W_n = N\}}{B_n} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(N - \mu_n)^2}{2 \cdot B_n^2} \right\} \right| \rightarrow 0.$$

Теорему 1 мы получили из следующего результата.

Пусть $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ - n -я серия целочисленных независимых сл.в.,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k^{(n)}; \quad A_n = MS_n; \quad B_n^2 = DS_n; \quad \beta_k^{(n)} = M|\xi_k^{(n)} - M\xi_k^{(n)}|^3 < \infty,$$

$$k = 1, 2, \dots, n; \quad I_n = B_n^{-3} \sum_{k=1}^n \beta_k^{(n)}.$$

Тогда имеет место

Теорема 2. Пусть при $n \rightarrow \infty$

$$1) \quad B_n \rightarrow \infty;$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^n \beta_k^{(n)} = O(B_n^3);$$

существует абсолютная постоянная $K > 0$ такая, что если для любого целого $q \geq 2$

3) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \max_{0 \leq r \leq q-1} \mathcal{P}\{\xi_k^{(n)} = r \pmod{q}\} \leq 1 - K \cdot \max\{L_n^2 B_n^2, B_n^2\} \cdot \frac{\ln n}{n}$,
то равномерно по $N \in \mathbb{N}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\left| B_n \cdot \mathcal{P}\{S_n = N\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(N-A_n)^2}{2 \cdot B_n^2}\right\} \right| = o(1). \quad (5)$$

Теорема 2 доказана в работе [4] для частного случая:
 $M \xi_k^{(n)} = 0$, $k=1, 2, \dots, n$, $A_n = 0$. Несложно передеказать ее и для
общего случая: $M \xi_k^{(n)} = m_k$, $k=1, \dots, n$, $A_n = M S_n = \sum_{k=1}^n m_k$. Действи-
тельно, рассмотрим выражение

$$\Delta_n = B_n \cdot \mathcal{P}\{S_n = N\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(N-A_n)^2}{2 \cdot B_n^2}\right\}.$$

Из формулы Лапласа-Пуассона

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx - \frac{t^2}{2}} dt$$

и формулы обращения

$$\mathcal{P}\{S_n = N\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itN} \phi_n(t) dt,$$

где $\phi_n(t) = \phi_{S_n}(t)$ - характеристическая функция сл.в. S_n , обоз-
начая также $\mathcal{P}\{S_n = N\} = \mathcal{P}_n(N)$ и $x = B_n^{-1}(N - A_n)$, получим

$$\Delta_n = \frac{1}{2\pi} \left[B_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itN} \phi_n(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx - \frac{t^2}{2}} dt \right].$$

Введя новую переменную $t=2\pi t$, изменив пределы интегриро-
вания и проделав очевидные преобразования, получим

$$\Delta_n = \frac{1}{2\pi} \left[B_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi it(xB_n + A_n)} \phi_n(2\pi t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itx - 2\pi^2 t^2} dt \right].$$

Проделав обычную для такого доказательства группировку,
имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \frac{B_n}{2\pi} \int_{\frac{B_n}{n} \leq |t| \leq \frac{1}{2}} e^{-2\pi it(xB_n + A_n)} \phi_n(2\pi t) dt + \\ & + \frac{B_n}{2\pi} \int_{|t| \leq \frac{B_n}{n}} e^{-2\pi itxB_n} \left[\phi_n(2\pi t) e^{-2\pi itA_n} e^{-2\pi^2 t^2 B_n^2} \right] - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > \frac{1}{n}} e^{-2\pi itx - 2\pi^2 t^2} dt = J_1 + J_2 - J_3, \end{aligned}$$

где J_1 , J_2 и J_3 есть соответственно первый, второй и третий
интегралы в предыдущем соотношении.

$|J_3|$ оценивается непосредственно, $|J_3| = o(1)$. Интеграл
 $|J_2|$ оценивается стандартным образом с использованием леммы 1
(см. [5, с. 137]).

Первый интеграл

$$\begin{aligned} J_1 = & \frac{B_n}{2\pi} \int_{\frac{B_n}{n} \leq |t| \leq \frac{1}{2}} e^{-2\pi it(xB_n + A_n)} \phi_n(2\pi t) dt = \\ = & 0 \left[B_n \int_{\frac{B_n}{n} \leq |t| \leq \frac{1}{2}} |\phi_n(2\pi t)| dt \right]. \end{aligned}$$

Подробная оценка этого интеграла сделана в работе [4], где по-
казано, что $J_1 = o(1)$. Это заканчивает доказательство теоремы 2.

Теперь легко доказать теорему 1. Для этого, используя
условие (3) теоремы 1, а также соотношения (1) и (2), несложной
проверкой убеждаемся, что выполнены условия 1), 2) и 3) теоремы
2. А это означает, что для сл.в. W_n также имеет место локальная
предельная теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.
М.: Мир, 1968. Т.1.

2. Ваш I.E., Billingsley P. Asymptotic distributions for the coupon collector's problem // Ann. Math. Stat. 1965. 36. P. 1835-1839.
3. Набиев И. Локальная предельная теорема с оценками остаточного члена в задаче времени ожидания // Исследования по вырождающимся дифференциальным уравнениям и предельным теоремам теории вероятностей. Ташкент, 1985. С. 43-47.
4. Фомин А.С. Локальная теорема для серий независимых, равномерно распределенных в серии, целочисленных случайных величин // Вероятностные задачи прикладной математики. Петрозаводск, 1984. С.70-75.
5. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.

УДК 511.45

Широков Б.М.

ON A LENGTH OF THE CONTINUED
FRACTION'S PERIOD

В статье дана оценка количества чисел d из отрезка натурального ряда, для которых непрерывная дробь для \sqrt{d} имеет большой период.

Let $L(d)$ be the length of the continued fraction's period of \sqrt{d} for d that isn't a square of an integer. Let p be a prime number, N, P, Q, k, r, s - natural numbers.

From the results of E.V.Podsypanin [1] it follows

$$L(d) = O(\sqrt{d} \log d).$$

From the results of E.P.Golubeva [2] it follows

$$I(d) = O(\sqrt{d} L(1, \chi) 2^{-\omega(d)}),$$

where χ is a character of the quadratic field $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\omega(d)$ is a number of prime divisors of d .

In the paper [3] has been proved that for any real $K > 0$ and for sufficiently great N the number of integers d , $N < d \leq 2N$, for which $L(d) \geq K\sqrt{d}$ don't exceed $cN/\log K$ with absolute constant c .

The irrational

$$\xi = \frac{-P + \sqrt{d}}{Q} \quad (1)$$

where P and Q satisfy to the congruence

$$P^2 \equiv d \pmod{Q} \quad (2)$$

is called reduced if $0 < \xi < 1$ and conjugate number $\xi' < -1$, $\xi' = (P - \sqrt{d})/Q$. By other words, ξ is reduced if

$$0 < P < \sqrt{d}, \sqrt{d} - P < Q < \sqrt{d} + P \quad (3)$$