Литература

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

2. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.

3. Жидков Н. П. Линейные аппроксимации функционалов. М.: Изд-во МГУ, 1977. 262 с.

Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 519.554

К ВОПРОСУ О СВЯЗИ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ И СЛУЧАЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

В. Н. Земляченко, Ю. Л. Павлов

Предлагается характеризация ветвящихся процессов Гальтона—Ватсона в виде семейства маршрутов некоторого мультиграфа с целью описания известной связи между ветвящимися процессами и случайными деревьями. *

Взаимосвязь между ветвящимися процессами Гальтона—Ватсона и деревьями была осознана достаточно давно (см., например, [1,2]). В последнее время особенно возрос интерес к исследованию деревьев и лесов с помощью методов теории ветвящихся процессов [3-4]. В статье предлагается характеризация ветвящихся процессов, которая может оказаться полезной в таких исследованиях.

1. Терминология и обозначения

Введем ряд терминов и обозначений в модификации, приспособленные для дальнейшего изложения.

1.1. Кванторные обозначения для сумм и произведений

Пусть f — неотрицательная функция с не более чем счетной областью определения и R — любой предикат, определенный на этой области. Введем следующие обозначения кванторного типа для сумм:

$$\{\sigma x|R\}.f(x): \quad \{\sigma x|R\}.f(x) = \Sigma_{R(x)} f(x)$$

$$\sigma x.f(x): \quad R \equiv true \rightarrow \sigma x.f(x) = \{\sigma x|R\}.f(x)$$

$$\sigma(A,f): \quad R \equiv A \subseteq dom(f) \rightarrow \sigma(A,f) = \{\sigma x|R\}.f(x)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 94-01-00036-а.

$$\sigma(f): \quad A = dom(f) \to \sigma(f) = \sigma(A, f)$$
$$\sigma(A/B, f): \quad \sigma(A/B, f) = \sigma(A, f)/\sigma(B, f)$$

Аналогичные обозначения – с заменой σ и Σ на π и Π – вводим и для произведений:

$$\{\pi x|R\}.f(x), \ \pi x.f(x), \ \pi(A, f), \ \pi(f).$$

Величины $\sigma(A, f)$ и $\pi(A, f)$ можно рассматривать как *аддитивный* и *мультипликативный веса* множества A для данной *весовой* функции f, а $\sigma(A/B, f)$ — как *относительный* аддитивный вес A по отношению к B (для весовой функции f).

1.2. Натуральные числа, кортежи

$\mathbb{N}$ — множество всех целых неотрицательных (*натуральных*) чисел, понимаемых в теоретико-множественном смысле:

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \ \ldots$$

i, j, k, l, m, n — переменные, область изменения которых есть $\mathbb{N}$.

$n' = n + 1$ — *последователь* числа n.

$|X|$ — число элементов конечного множества X, т.е. элемент множества $\mathbb{N}$, равномощный с X.

$rel(R)$ — R есть отношение, если каждый элемент $w \in R$ является упорядоченной парой, $w = (x, y)$.

$R(x) = \{y|(x, y) \in R\}, \quad R^{-1}(x) = \{y|(x, y) \in R\}$.

$(x \leq y|R)$ — R есть отношение частичного порядка и $(x, y) \in R$,

$(x = y|R)$ — R есть отношение эквивалентности и $(x, y) \in R$.

$fnc(f)$ — f есть *функция*, если f есть отношение, у которого любые две упорядоченные пары различаются первым элементом.

$dom(f)$ — *область определения* функции f (множество первых элементов упорядоченных пар из f).

$rng(f)$ — *область значений* функции f (множество вторых элементов упорядоченных пар из f).

$f : A \to B$ — f есть отображение из A в B:

$$f : A \to B \equiv dom(f) = A \wedge rng(f) \subseteq B.$$

$f \circ x$, $f(x)$ — значение функции f на аргументе x. Первое из обозначений применяется, когда $f(x)$ есть функция: в этом случае пишем, например, $(f \circ x) \circ y$ вместо неудобочитаемого $(f(x))(y)$.

$f \circ x$ — результат действия функции f на множество x:

$$x \in dom(f) \ \Rightarrow \ f \circ x, \ x \subseteq dom(f) \ \Rightarrow \ f \circ x = \{f(\xi)|\xi \in x\}.$$

$\square$ — символ неопределенности: если $f(x) = \square$, то значение функции f не определено на x, т.е. $x \notin dom(f)$.

$crt(b)$ — b есть *кортеж* (набор, конечная последовательность):

$$crt(b) \equiv fnc(b) \wedge dom(b) = |b|.$$

Кортеж x обычно записывается в виде

$$x =< x(0), x(1), \ldots, x(|x| - 1) > .$$

$A_0 \times \ldots \times A_{m-1}$ — *декартово произведение* множеств $A_0, \ldots, A_{m-1}$:

$$\{x|crt(x) \wedge |x| = m \wedge x(0) \in A_0 \wedge \ldots \wedge x(m-1) \in A_{m-1}\}.$$

Замечание. Понятие упорядоченной пары необходимо только для определения понятия функции и в дальнейшем — после введения $\mathbb{N}$ — может быть полностью элиминировано из теоретико-множественных построений на основе понятия кортежа. В частности, упорядоченную n-ку элементов в любом контексте (в том числе и для $n = 2$) можно заменить кортежем.

$X^{\hat{}}$ — кортеж, получаемый из кортежа x с элементами-кортежами "соединением" составляющих его кортежей:

$$X =<< a, \ldots, b >, \ldots, < c, \ldots, d >> \Longrightarrow X^{\hat{}} =< a, \ldots, b, \ldots, c, \ldots, d > .$$

$\mathbb{N}_1$ — множество всех кортежей со значениями в $\mathbb{N}$. $\mathbb{N}_2$ — множество всех кортежей со значениями в $\mathbb{N}_1$.

1.3. Графы

Согласно обычному интуитивному определению, *граф* (ориентированный) есть набор $G = < V, E >$ множеств $V = V(G)$ и $E = E(G)$ *вершин* и *дуг* с условием $V \times V \supseteq E$; если $e \in E$ и $e = < x, y >$, то x и y называются *начальной* и *конечной* вершинами дуги e. При более общем понимании графа в качестве дуг могут фигурировать произвольные множества (а не только пары), но с условием, что для любой дуги e задана ее *граница* $\partial(e)$ — какой-то набор $< x, y >$ из $V \times V$, элементы которого и объявляются начальной и конечной вершинами дуги e. Рациональная реконструкция приведенных определений позволяет построить следующее удобное в техническом плане определение:

Пусть $< V, E, \partial >$ — набор функций такой, что для любого g, на котором задано значение каждой из этих функций, выполняется соотношение

$$\partial \circ g : E \circ g \rightarrow < V \circ g > \times < V \circ g >.$$

Если на g задано значение каждой из функций V, E, ∂ посредством вводящего равенства

$$< V \circ g, E \circ g, \partial \circ g > = < a, b, c >,$$

где a, b, c — заданные множества, то g называется *обобщенным графом*, элементы множеств $V \circ g$ и $E \circ g$ — *вершинами* и *дугами*, набор $(\partial \circ g) \circ e$ — *границей* дуги e. Если e — дуга с границей $< x, y >$, то x и y называются ее *начальной* и *конечной* вершинами.

Граф (обычный) есть обобщенный граф g, для которого выполняется условие

$$E \circ g \subseteq (V \circ g) \times (V \circ g) \wedge e \in E \circ g \Longrightarrow (\partial \circ g) \circ e = e$$

и который записывается в виде $< V \circ g, E \circ g >$ или даже — с допущением некоторой некорректности — в виде $< V, E >$.

$g_1 \sim g_2$ — (обычные) графы g_1 и g_2 *изоморфны*, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi : V \circ g_1 \rightarrow V \circ g_2$ такое, что $\varphi(E \circ g_1) = E \circ g_2$.

Замечание. В дальнейшем будет рассматриваться только один конкретный обобщенный граф, так что нет необходимости введения понятия изоморфизма для обобщенных графов.

α-граф — это любой граф g, на множестве $V \circ g$ вершин которого задано некоторое бинарное отношение, обозначаемое через $\alpha \circ g$.

$(g_1 \sim g_2 | \alpha)$ — графы g_1 и g_2 *изоморфны как α-графы*, если существует такое взаимно однозначное отображение φ множества $V \circ g_1$ на множество $V \circ g_2$, что выполняется условие

$$\varphi(E \circ g_1) = E \circ g_2 \wedge \varphi(\alpha \circ g_1) = \alpha \circ g_2.$$

Маршрут в графе $< V, E, \partial >$ — это кортеж дуг, в котором для любых двух последовательных дуг x и x' конечная вершина дуги x совпадает с начальной вершиной дуги x':

$$(\partial \circ x) \circ 1 = (\partial \circ x') \circ 0.$$

$Mr \circ g$ — множество всех маршрутов в графе g.

Продолжим функцию ∂ на множество маршрутов, постулируя для любого маршрута ξ выполнение условия

$$|\xi| = m \wedge x = \xi \circ 0 \wedge y = \xi \circ (m-1) \Longrightarrow \partial \circ \xi = < x \circ 0, y \circ 1 >.$$

Наличие символа ∂ в любом выражении предполагает по умолчанию, что аргумент есть объект, для которого функция ∂ уже определена, т.е. дуга или маршрут.

Если X — маршрут, то величина $|X|$ рассматривается как *длина* маршрута. Отдельная вершина формально рассматривается как маршрут нулевой длины (вообще не содержащий дуг), состоящий только из начальной вершины.

Имея в виду, что применительно к графам набор $< x, y >$ можно рассматривать как "переход" из x в y, для его обозначения естественно использовать стрелку $\rightarrow$ и ввести следующую символику:

$(x \rightarrow y | e) \equiv e \in E \wedge \partial \circ e = < x, y >$,

$(x \rightarrow\rightarrow y | X) \equiv X \in Mr \wedge \partial \circ E = < x, y >$.

2. Пространство маршрутов

В этом пункте описывается пространство элементарных событий ветвящегося процесса Гальтона—Ватсона в виде семейства маршрутов некоторого графа.

Ветвящийся процесс Гальтона—Ватсона — это любая неотрицательная функция γ, определенная на $\mathbb{N}$ с условием нормировки $\sigma n.\gamma(n) = 1$ и продолженная на множество $\mathbb{N}_1 \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ соотношениями

$$X \in \mathbb{N}_1 \wedge X = \emptyset \to \gamma(X) = 1 \qquad (\gamma 0.1)$$
$$X \in \mathbb{N}_1 \wedge X \neq \emptyset \to \gamma(X) = \pi i \cdot \gamma(X(i)) \qquad (\gamma 0.2)$$
$$X \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \wedge X \circ 0 = 0 \wedge X \circ 1 \neq 0 \to \gamma(X) = 0 \qquad (\gamma 0.3)$$
$$X \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \wedge X \circ 0 \neq 0 \to \gamma(X) = \{\sigma e | e \in \mathbb{N}_1 \wedge \partial(e) = X\}.\gamma(e) \qquad (\gamma 0.4)$$

Принятая здесь форма нумерации соотношений в виде $(\gamma 0.i)$ с использованием символа 0 предназначена для указания их определяющего характера; в дальнейшем функция γ будет продолжена и на другие множества — в этих случаях используются номера вида $(\gamma.i)$.

Пусть R — граф, определяемый следующим образом:

$$V \circ \mathrm{R} = \mathbb{N},\ E \circ \mathrm{R} = \mathbb{N}_1,\ (\partial \circ \mathrm{R}) \circ e = < |e|, \sigma(e) > .$$

Обозначая через $Mr \circ \mathrm{R}$ множество всех маршрутов графа R, определим следующие множества маршрутов:

$$\Omega = \{X \in Mr \circ \mathrm{R} | (\partial \circ X) \circ 1 = 0\}$$
$$\Omega_m = \{X \in \Omega | (\partial \circ X) \circ 0 = m\}$$
$$\Omega' = \{X \in Mr \circ \mathrm{R} | (\partial \circ X) \circ 1 \neq 0\}.$$

Любой маршрут множества Ω можно рассматривать как "завершенный" в том смысле, что он не допускает продолжения (поскольку из вершины 0 не исходит ни одной дуги). В этой связи маршруты множества Ω будем называть *тупиковыми*, а все остальные маршруты — *нетупиковыми*. Предварительно говоря, тупиковые маршруты будут сопоставляться реализациям "завершенных" ветвящихся процессов, а нетупиковые — реализациям "продолжающихся" процессов.

Сопоставим ветвящемуся процессу γ набор $< \mathrm{R}, \gamma >$, рассматриваемый как граф, каждой дуге $X \in \mathbb{N}_1$ которого приписан вес $\gamma(X)$. Этот граф можно трактовать как диаграмму переходов однородной дискретной марковской цепи с множеством $\mathbb{N}$ состояний, в которой непосредственные переходы $m \to n$ между состояниями могут осуществляться многими способами: каждая дуга X, для которой $\partial(X) = < m, n >$, задает один из таких способов, а $\gamma(X)$ есть вероятность непосредственного перехода $m \to n$ по этому способу. Величина $\gamma(< m, n >)$ есть "полная" вероятность непосредственного перехода $m \to n$, так что можно принять следующее выразительное обозначение:

$$\gamma(m \to n) = \gamma(< m, n >).$$

В терминах ветвящегося процесса $\gamma(X)$ есть вероятность непосредственного превращения m частиц в n новых частиц таким образом, что частица с номером i превращается в $X(i)$ новых частиц, а величина $\gamma(m \to n)$ есть "полная" вероятность непосредственного превращения m частиц в n новых частиц.

Следует отметить, что указанная интерпретация графа R как диаграммы ветвящегося процесса содержит предположение, что частицы, рожденные данной частицей, можно каким-то образом занумеровать: только при таком предположении дуга x специфицирует картину превращения m частиц в n новых частиц. Это предположение имеет не математический, а, скорее, философский характер и, будучи принятым, приводит к онтологизации формальных объектов x, т.е. к необходимости их трактовки в качестве объектов той же степени реальности, что и сами состояния m и n.

Продолжим функцию γ на множество $\mathbb{N}_2$ и, в частности, на множество $M \circ \mathrm{R}$ маршрутов в графе R соотношением

$$X \in \mathbb{N}_2 \Longrightarrow \gamma(X) = \pi i.\gamma(X(i)). \qquad (\gamma.5)$$

Обозначим через $\gamma(m \to\to 0)$ сумму весов $\gamma(X)$ по всем тупиковым маршрутам с начальной вершиной m:

$$\gamma(m \to\to 0) = \{\sigma X | X \in \Omega_m\}.\gamma(X)\}.$$

Очевидно, что при $m \neq 0$ величина $\gamma(m \to\to 0)$ есть вероятность вырождения процесса γ, начинающегося с m частиц,и для нее выполняется условие

$$\gamma(m \to\to 0) \leq 1.$$

Любой тупиковый маршрут, начинающийся в вершине $m \in \mathbb{N}$, будем рассматривать как реализацию ветвящегося процесса, начинающегося с m частиц; длина маршрута есть время жизни процесса в данной его реализации. В случае, когда $\gamma(m \to\to 0) = 1$, т.е. для докритических и критических процессов, будем рассматривать Ω_m как дискретное пространство элементарных событий X с приписанными им вероятностями $\gamma(X)$ и называть Ω_m *пространством маршрутов*. В качестве σ-алгебры рассмотрим множество $\mathrm{B}(\Omega_m)$ всех подмножеств множества Ω_m. Функция γ трактуется как вероятность, естественным образом продолженная на $\mathrm{B}(\Omega_m)$ посредством соотношения

$$X \in \mathrm{B}(\Omega_m) \Rightarrow \gamma(X) = \{\sigma x | x \in X\}.\gamma(X). \qquad (\gamma.6)$$

В этих обозначениях набор

$$< \Omega_m, \mathrm{B}(\Omega_m), \gamma >$$

есть вероятностное пространство, соответствующее ветвящемуся процессу, начинающемуся с m частиц и имеющему функцию γ в качестве распределения числа потомков одной частицы; функция γ продолжена посредством соотношений $(\gamma 0.1)$-$(\gamma 0.4)$, $(\gamma.5)$, $(\gamma.6)$.

3. Маршруты и плоские леса

В этом пункте будет установлено соответствие между тупиковыми маршрутами и плоскими лесами специального вида, определяемыми далее посаженными лесами.

Введем несколько определений, относящихся к деревьям и лесам (рассматриваемым в данном пункте как обычные графы).

Если g — граф, то полагаем

$$g(x) = \{y | < x, y > \in E \circ g\}, \quad g^{-1}(x) = \{y | < y, x > \in E \circ g\}.$$

Выходящий лес — это граф f, у которого в каждую вершину входит не более одной дуги и отсутствуют контуры:

$$(\forall x)(|f^{-1}(x)| \le 1) \wedge (\forall x)(\forall k)(x \notin f^k(x)).$$

Корень (выходящего леса) — любая вершина, в которую не входит ни одна дуга; $V_0(f)$ — множество всех корней леса f. Для любой некорневой вершины x будем обозначать через $x_\uparrow$ ту единственную вершину, из которой имеется дуга в вершину x, т.е. для которой выполняется условие

$$\{x_\uparrow\} = f^{-1}(x).$$

Для любой корневой вершины x значение $x_\uparrow$ не определено, так что полагаем выполненным условие

$$x_\uparrow = \square,$$

которое можно рассматривать как определение корневой вершины x.

Выходящее дерево — это выходящий лес f с условием $|V_0(f)| = 1$. Корень выходящего дерева f обозначаем через $v_0(f)$ или просто через v_0, если из контекста ясно, какое именно дерево имеется в виду. В дальнейшем будем, для краткости, иногда опускать слово "выходящие" для лесов и деревьев.

$(H \circ f) \circ x$ — *высота* вершины x в выходящем лесе f: длина маршрута с начальной вершиной в корне дерева, содержащего вершину x, и конечной вершиной в x. $H \circ f$ — наибольшая из высот $(H \circ f) \circ x$ по всем x.

$(D \circ f) \circ x$ — *кратность*, или степень, вершины x в выходящем лесе f, т.е. число дуг, исходящих в лесе f из вершины x.

Посаженное дерево — выходящее дерево t, для каждой вершины x которого задано бинарное отношение на множестве $t(x)$, являющееся линейным порядком. Объединение этих линейных порядков есть бинарное отношение, которое будем обозначать через $\alpha \circ t$. Иначе говоря, посаженное дерево рассматривается как α-граф.

Посаженный лес f характеризуется бинарным отношением $\alpha \circ f$, которое — в дополнение к линейным упорядочениям множеств $f(x)$ — задает еще и линейное упорядочение множества всех корней.

В случае, когда возникает необходимость рассмотрения для одного и того же выходящего леса f нескольких заданных на $V \circ f$ бинарных отношений, соответствующие посаженные леса представляются наборами вида $< f, \xi >$, где ξ — отношение.

Плоское дерево с висячим корнем — посаженное дерево, у которого из корня выходит ровно одна дуга.

Плоский лес — посаженный лес, состоящий из плоских деревьев с висячими корнями.

Пусть f — посаженный лес. Продолжим бинарное отношение $\alpha = \alpha \circ f$ до бинарного отношения $\alpha' \supset \alpha$, определяемого рекурсивным условием

$$(x \le y|\alpha') \equiv x = \square \vee (x_\uparrow = y_\uparrow \wedge (x \le y|\alpha) \vee (x_\uparrow \ne y_\uparrow) \wedge (x_\uparrow \le y_\uparrow|\alpha').$$

Исходя из определения отношения α' легко доказать по индукции следующие очевидные предложения:

Предложение 1. *Отношение α' есть линейный порядок на $V \circ f$.*

Предложение 2. *Для любых двух посаженных лесов f_1 и f_2 выполняется соотношение*

$$< f_1, \alpha_1 > \sim < f_2, \alpha_2 > \equiv < f_1, \alpha_1' > \sim < f_2, \alpha_2' > .$$

Пусть $< f, \alpha >$ — посаженный лес. Рассмотрим лес $< f, \alpha' >$, где α' — построенное ранее продолжение отношения α до отношения линейного порядка на множестве $V \circ f$. Перенумеруем вершины леса f в соответствии с линейным порядком α', т.е. если вершина x имеет при этом порядке номер i, то в f вершина x всюду заменяется на i. Полученный таким образом лес обозначим через f'. Поскольку между двумя линейными порядками существует не более одного изоморфизма, то справедливо следующее

Предложение 3.

$$< f_1, \alpha_1 > \sim < f_2, \alpha_2 > \equiv (f_1)' \sim (f_2)'.$$

Из последнего предложения непосредственно следует

Предложение 4. *Посаженный лес $< f, \alpha >$ не имеет нетривиальных автоморфизмов, т.е. если φ есть взаимно однозначное отображение множества $V \circ f$ на себя и $\varphi \circ < f, \alpha > = < f, \alpha >$, то φ есть тождественное отображение множества $V \circ f$ на себя.*

Леса и деревья являются естественной моделью для разнообразных процессов роста, представителем которых можно считать и ветвящиеся процессы. В этой связи возникает необходимость построения

модели для процессов, которые в каком-то смысле не являются завершенными (сохраняются некоторые "точки роста"). Простейшей возможностью является указание в дереве или лесе вершин, в которых может происходить "рост" — например, появление новых исходящих дуг. Для наших целей достаточно рассматривать в качестве точек роста в лесе множество всех вершин максимальной высоты, ассоциируя с этим множеством последнее (еще живущее) поколение частиц. Этими соображениями мотивируется следующее определение:

Растущий лес f — это лес, связанный с некоторым посаженным лесом f_1 соотношениями

$$H(x, f_1) \le H(f_1) - \Rightarrow f(x) = f_1(x),$$
$$H(x, f_1) = H(f_1) \Rightarrow f(x) = \square.$$

Завершенный лес — так мы будем называть (в контексте рассмотрения растущих лесов) обычный посаженный лес, т.е. такой "несобственный" растущий лес, у которого отсутствуют точки роста — вершины x, для которых выполняется условие $f(x) = \square$.

Обозначим через FN множество всех посаженных лесов f с условием $V \circ f \in \mathbb{N}$, а через FN' — множество растущих лесов с тем же условием. Предварительно говоря, посаженные леса соответствуют тупиковым маршрутам, а растущие — нетупиковым.

Установим взаимно однозначное соответствие между множеством $\Omega'(m)$ всех нетупиковых маршрутов с начальной вершиной m и множеством $FN'(m)$ всех растущих лесов с m корневыми вершинами, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, в форме следующей теоремы:

Теорема. *Существует пара отображений $\varphi : \Omega'(m) \to NF'(m)$ и $\psi : NF'(m) \to \Omega'(m)$, удовлетворяющих условиям:*

(1) φ есть отображение множества $\Omega'(m)$ в множество $NF'(m)$:

$$\varphi \circ \Omega'(m) \subset NF'(m),$$

(2) ψ есть отображение множества $NF'(m)$ на множество $\Omega'(m)$:

$$\psi \circ NF'(m) = \Omega'(m),$$

(3) $f_1 \sim f_2 \Rightarrow \psi(f_1) = \psi(f_2) \wedge \varphi \circ (\psi \circ f_1) \sim f_2$.

Теорема будет доказываться посредством фактического построения отображений φ и ψ.

Построение отображения φ

Пусть $\omega \in \Omega'$ — нетупиковый маршрут с начальной вершиной m и пусть $< f, \alpha > = \varphi(\omega)$ — растущий лес, который необходимо построить по ω. Напомним, что $\omega\hat{}$ есть кортеж, получаемый соединением кортежей, входящих в кортеж ω, а величина $\sigma(i, \omega\hat{})$ есть вес множества $i \in \mathbb{N}$ при весовой функции $\omega\hat{}$.

Идея построения состоит в рассмотрении $\omega\hat{} \circ i$ как кратности вершины i в определяемом лесе, т.е. как $(D \circ f) \circ i$, и рассмотрении отношения α как естественного линейного порядка на множестве натуральных чисел.

Вводим лес $< f, \alpha >$ следующим определением: $\sigma(0, \omega\hat{}) = 0$, $f \circ i = [m + \sigma(i', \omega\hat{})] \setminus [m + \sigma(i, \omega\hat{})]$, $\omega\hat{} \circ i = \square \Rightarrow f \circ i = \square$, $(i \leq j | \alpha) \equiv i \leq j$.

Продолжение отображения ϕ на Ω

Если ω — тупиковый маршрут, то для построенного отображения φ выполняется условие

$$f = \varphi(\omega) \wedge i \in |\omega\hat{}| \Rightarrow f \circ i \neq \square,$$

т.е. в лесе f отсутствуют "точки роста".

Построение отображения ψ

Обозначая через ω маршрут $\psi(f, \alpha')$, вводим следующее определение:

$$\omega\hat{} \circ i = |f' \circ i|.$$

Маршрут ω очевидным образом строится по кортежу $\omega\hat{}$: начальная дуга маршрута есть отрезок кортежа $\omega\hat{}$, содержащий m элементов, а длина следующего отрезка (представляющего следующую дугу) есть сумма элементов начального отрезка и т. д.

Утверждения теоремы 1 непосредственно следуют из проведенных построений отображений φ и ψ и из уже доказанных предложений.

Теорема позволяет рассматривать в качестве пространства элементарных событий множество всех завершенных посаженных лесов с m корневыми вершинами. Каждому такому лесу $f = \varphi(\omega)$ приписывается вероятность $\gamma(f) = \gamma(\omega)$, и функция γ естественным образом продолжается на всевозможные множества завершенных лесов, так что получается обычное вероятностное пространство.

Отметим, что рассмотрение растущих, незавершенных лесов также может иметь какой-то смысл. А именно, любое множество таких лесов, в котором никакой лес не является частью другого, может рассматриваться "почти" как пространство элементарных событий — сумма вероятностей по этому пространству меньше единицы (как, впрочем, для надкритических процессов в обычном случае).

Литература

1. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984.

2. Athreya K. B., Ney P.E. Branching Process. Springer, Berlin, 1972.

3. Ватутин В. А. Распределение расстояния до корня минимального поддерева, содержащего все вершины данной высоты // Теория вероятностей и ее приложения. 1993. Т. 38. №2. С. 273–287.

4. Ватутин В. А. О высоте ствола случайных корневых деревьев // Дискретная математика. 1994. Т. 6. №3. С. 110–121.

5. Дрмота М. Распределение высоты листов корневых деревьев // Дискретная математика. 1994. Т. 6. №1. С. 67-82.

6. Павлов Ю. Л. Некоторые свойства плоских деревьев с висячим корнем // Дискретная математика. 1992. Т. 4. №2. С. 61–65.

7. Павлов Ю. Л. Предельные распределения высоты случайного леса из плоских корневых деревьев // Дискретная математика. 1994. Т. 6. №1. С. 137-154.