Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 515.12

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГИЛЬБЕРТОВЫХ КУБОВ В ТЕРМИНАХ M-СТРУКТУРЫ

Е. В. Моисеев

Основным результатом статьи является теорема, содержание которой отражено в заголовке.

Данная работа является продолжением статьи [1], опубликованной в предыдущем выпуске сборника. В статье [1] вводится понятие M-структуры, которой обладают линейные нормированные пространства, экспоненты, суперрасширения и т.д. С помощью понятия M-структуры приводятся достаточные условия для того, чтобы пространство являлось абсолютным ретрактом [2] в классе метрических пространств. Эти условия являются также и необходимыми, что будет следовать из доказательства теоремы о характеризации гильбертовых кубов.

Итак, напомним основные понятия. Гильбертов куб топологически представляет счетное произведение отрезков в тихоновской топологии.

Будем говорить, что на метрическом пространстве (X,ρ) задана M-структура, если любому непрерывному отображению $f:\partial\sigma\to X$, заданному на границе $\partial\sigma$ симплекса σ ($\dim\sigma\geq 2$), поставлено в соответствие непрерывное подолжение $\bar f:\sigma\to X$ на весь симплекс и это соответствие удовлетворяет двум условиям:

1) постоянному отображению f соответствует постоянное $\bar f$;

2) для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любого симплекса σ ($\dim\sigma\geq 2$), любых двух непрерывных отображений f_1

и f_2 1-мерного остова σ_1 симплекса σ в X их непрерывные продолжения $\bar f_1$ и $\bar f_2$, имеющие одинаковые комбинаторные схемы (см. [1]), удовлетворяют условию:

$$\text{если } \max_{x\in\partial\sigma_1}\rho(f_1(x),f_2(x))<\delta,$$

$$\text{то } \max_{x\in\sigma_1}\rho(\bar f_1(x),\bar f_2(x))<\varepsilon.$$

Множество $Z\subset X$ будем называть M-выпуклым, если условие $f(\partial\sigma)\subset Z$ влечет влючение $\bar f(\sigma)\subset Z$ для любого σ ($\dim\sigma\geq 2$).

Метрическое пространство (X,ρ) называется равномерно линейно связным (р. л. с.), если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если $\rho(x,y)<\delta$, то существует дуга $\varphi:I\to X$ диаметром меньше ε, соединяющая точки x,y.

Пеановским континуумом называется связный, локально связный метрический компакт.

Остальные необходимые определения можно найти в монографии [2].

Теорема. *Пеановский континуум гомеоморфен гильбертову кубу Q тогда и только тогда, когда на нем можно определить M-структуру и при этом будут существовать два всюду плотных, непересекающихся, равномерно линейно связных, M-выпуклых подмножества.*

Доказательство. Сначала проведем доказательство в достаточную сторону.

Пусть (X,ρ) — пеановский континуум, на котором зафиксирована некоторая M-структура, Z_1 и Z_2 — подмножества X, обладающие свойствами, описанными в формулировке теоремы.

В доказательстве того, что X гомеоморфно гильбертову кубу, будем опираться на характеризационную теорему Торунчика [3]. Для этого надо показать, что X является AR-компактом и для любого $\varepsilon>0$ существуют отображения $g_1,g_2:X\to X$ такие, что

1) $g_1(X)\cap g_2(X)=\emptyset$;

2) $\rho(g_i(x),x)<\varepsilon$ для любого $x\in X$, $i=1,2$.

Тот факт, что X является абсолютным ретрактом, является прямым следствием теоремы 3 [1]. Осталось построить отображения g_1 и g_2. Рассмотрим отображение $g_1:X\to Z_1$, т. к. отображение g_2 строится аналогично.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Для $\frac{1}{2}\cdot\varepsilon$ существует, по определению M-структуры, $\delta_1(\frac{1}{2}\varepsilon)$ такое, что выполняется второе условие из определения. Для $\frac{1}{2}\cdot\delta_1$, по определению р. л. с. пространства, существует $\delta_2(\frac{1}{2}\delta_1)$ такое, что если $x, y \in Z_1$ и $\rho(x,y) < \delta_2$, то существует в Z_1 дуга диаметром меньше $\frac{1}{2}\cdot\delta_1$, связывающая эти точки. Зафиксируем некоторое конечное открытое покрытие γ пространства X, удовлетворяющее условию $diam(G) < \frac{1}{2}\delta_2$ для любого $G \in \gamma$. Обозначим $K(\gamma)$ — нерв покрытия γ [4]. Существует каноническое отображение $p : X \to K(\gamma)$ (см. [2]).

С другой стороны, можно построить отображение $\Gamma : K(\gamma) \to Z_1$ следующим образом. На вершинах нерва полагаем $\Gamma(G)$ равным некоторой точке $x \in Z_1 \cap G$. На одномерный остов нерва $K(\gamma)$ продолжаем отображение Γ, пользуясь р. л. с. свойством. На симплексы высших размерностей продолжаем Γ, пользуясь M-структурой. Отображение g_1 положим равным $\Gamma \circ p$.

За счет подбора ε и δ отображение g_1 удовлетворяет свойству $\rho(g_1(x), x) < \varepsilon$ для любого $x \in X$. Если аналогичным образом построить отображение g_2, то очевидно, $g_1(X) \cap g_2(X) = \emptyset$. Итак, пространство X гомеоморфно гильбертову кубу Q.

Для доказательства необходимости сформулированных условий нам понадобится понятие пространства замкнутых гиперпространств включения GX (см. [4]). Пространство GX является подпространством пространства $Exp(ExpX)$ (см. [2]), состоящим из гиперпространств включения, т. е. таких систем ξ замкнутых подмножеств X, что условие $F \supset F_1 \in \xi$ влечет $F \in \xi$.

По теореме 1 [4], если X — метризуемый континуум, то GX гомеоморфно гильбертову кубу Q. На GX существует M-структура, определяемая с помощью миксера (см. [1]). Таким образом, осталось описать два множества, удовлетворяющие условию теоремы. Для этого зафиксируем два семейства $\frac{1}{n}$-сетей в X:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}},$$

где $E_{\frac{1}{n}}$, $A_{\frac{1}{n}}$ — $\frac{1}{n}$-сети в X; $E_{\frac{1}{n}} \subset E_{\frac{1}{n+1}}$, $A_{\frac{1}{n}} \subset A_{\frac{1}{n+1}}$, а также $A \cap E = \emptyset$. Пусть $F \in Exp\,X$. Обозначим F^+ множество вида $\{\xi \in GX \mid \Phi \in \xi \Rightarrow \Phi \cap F \neq \emptyset,\ F \in \xi\}$. Тогда множества $E^+ = \cup_{n=1}^{\infty} E^+_{\frac{1}{n}}$

и $A^+ = \cup_{n=1}^{\infty} A^+_{\frac{1}{n}}$ будут обладать необходимыми свойствами. Пересечение $E^+ \cap A^+ = \emptyset$ в связи с тем, что $E \cap A = \emptyset$. Всюду плотность и равномерную линейную связность легко установить, используя доказательство теоремы 1 [4]. M-выпуклость в этом случае эквивалентна выпуклости относительно миксера, которая тоже, очевидно, имеет место (см.[1]). Доказательство теоремы закончено.

Литература

1. Моисеев Е. В. О пространствах с M-структурой // Труды ПГУ. Сер. Математика; Вып. 1. Петрозаводск, 1993. С. 27–34.

2. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971. 291 с.

3. Torunezyk H. On CE images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds // Fund. Math. 1980. V. 106. №1. P. 31–40.

4. Моисеев Е. В. О пространствах замкнутых гиперпространств роста и включения // Вестник МГУ. Сер. 1. 1988. № 3. С. 54–57.