есть нуль. В силу условия теоремы $p_n \geq 293$, т.к. $3\ln p_n < \sqrt{p_n}$, и леммы с $p = p_n$ и $r = [\ln p_n/2]$ имеем

$$\mu_n(\Gamma_n) \leq \frac{1}{p}\left(\frac{(2r)^r p h^r + 4r\sqrt{p}h^{2r}}{h^{2r}} + h\right) \leq \frac{\ln p_n}{c\sqrt{p_n}}$$

для некоторого постоянного числа $c \leq 1/3$. Обозначим через N множество точек $x = (x_1, x_2, \ldots) \in T$, где хотя бы одна из координат $x_n \in \Gamma_n$. Из полученной оценки и условия теоремы вытекает

$$mes(T \setminus N) \geq 1 - \sum_{n\geq 1}\mu_n(\Gamma_n) \geq 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{\ln p_n}{c\sqrt{p_n}} > 1 - \frac{c}{c} = 0.$$

Автоморфизм A тора T, определенный сдвигом

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 + 1(\bmod\ p_1), x_2 + 1(\bmod\ p_2), \ldots),$$

согласно, например, теореме 1 работы [4], эргодичен по мере mes. В силу $mes(T \setminus N) > 0$ и эргодичности A почти каждая точка $q = (q_1, q_2, \ldots) \in T$ под действием некоторой степени A^C с конечным показателем $C = C(q, T) \geq 0$ перейдет в $T \setminus N$. Множество всех таких q обозначим Q. Теорема доказана.

Литература

1. Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Физматгиз, 1962.

2. Murata I. On the magnitude of the least prime primitive root // J. Number Theory. 1992. V. 37. №1. P. 47–66.

3. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Мир, 1974.

4. Пустыльников Л. Д. О распределении квадратичных вычетов и невычетов и об одной динамической системе // УМН. 1993. Т. 48. С. 179–180.

Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 517.986

ПОДПРОСТРАНСТВА, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБОБЩЕННЫХ СДВИГОВ ЯКОБИ *

С.С.Платонов

Получено описание строения замкнутых подпространств, инвариантных относительно обобщенных сдвигов Якоби, в некоторых топологических векторных пространствах, состоящих из функций экспоненциального роста.

§1. Общие свойства обобщенных сдвигов и формулировка основных результатов

Пусть Δ – дифференциальный оператор Штурма—Лиувилля вида

$$\Delta = \frac{1}{A(t)}\frac{d}{dt}(A(t)\frac{d}{dt}) + q(t), \tag{1.1}$$

где функция $A(t)$ определена на полуинтервале $[0, +\infty)$ и $A(t) = t^{2\alpha+1}C(t)$, $\alpha > -\frac{1}{2}$, $C(t)$ – функция класса C^∞ на R, четная, строго положительная; $q(t)$ – четная R–значная функция класса C^∞ на R.

Операторы Бесселя и Якоби получаются при A и q соответственно равных:

$$(i) \quad \begin{cases} A = t^{2\alpha+1}, \quad \alpha > -\frac{1}{2}; \\ q(t) = 0; \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} A(t) = 2^{2\beta+1}(\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1} = (\operatorname{sh} t)^{2(\alpha-\beta)}(\operatorname{sh} 2t)^{2\beta+1}, \\ \qquad \alpha > \beta > -\frac{1}{2}; \\ q(t) = (\alpha+\beta+1)^2. \end{cases}$$

* Работа поддержана РФФИ, проект 95–01–0139а.

Пусть $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ — множества соответственно четных и нечетных функций класса C^∞ на R (все функции, если не оговорено противное, предполагаются комплекснозначными), $\mathcal{D}_0$ - подмножество в $\mathcal{E}_0$, состоящее из функций с компактным носителем.

Через L_k^p $(p \geq 1, k > 0)$ обозначим банахово пространство (БП), состоящее из всех измеримых четных функций $f(t)$ на R с конечной нормой

$$N_{p,k}(f) = \left(\int_0^\infty |f(t)|^p \, e^{-kt} A(t) \, dt \right)^{1/p}.$$

Пусть

$$L_*^p = \bigcup_{k>0} L_k^p.$$

Пространство L_*^p снабдим топологией индуктивного предела БП L_k^p.

Через C_k обозначим множество всех четных непрерывных функций $f(t)$ на R таких, что $f(t)e^{-kt} \to 0$ при $t \to +\infty$. Относительно нормы

$$n_k(f) = \sup_{t \geq 0} |f(x)| e^{-kt}$$

C_k является банаховым пространством. Пусть $C_* = \bigcup_{k>0} C_k$ - индуктивный предел БП C_k. Через C_k^d $(k > 0, d = 0, 1, 2, \ldots)$ обозначим подпространство в C_k, состоящее из всех $2d$–раз непрерывно дифференцируемых функций таких, что $f, \Delta f, \ldots \Delta^d f \in C_k$. Пространство C_k^d является банаховым относительно нормы

$$n_{k,d} = n_k(f) + n_k(\Delta f) + \ldots + n_k(\Delta^d f).$$

Пространство $C_*^d = \bigcup_{k>0} C_k^d$ снабдим топологией индуктивного предела БП C_k^d. В частности, $C_*^0 = C_*$.

Для любой функции $f(t) \in \mathcal{D}_0$ определим оператор обобщенного сдвига (ООС) $T^s f(t) = u(t, s)$ как решение следующей задачи Коши:

$$\Delta_t u(t,s) = \Delta_s u(t,s); \tag{1.2}$$

$$u(t,0) = f(t); \quad \frac{\partial u}{\partial s}(t,0) = 0, \tag{1.3}$$

где Δ_t, Δ_s - операторы Δ, примененные по переменным t и s соответственно. Такой оператор обобщенного сдвига является частным

случаем операторов обобщенного сдвига Дельсарта—Левитана (см. [1]). Далее будет показано, что оператор T^s можно продолжить по непрерывности на пространства L_*^p и C_*^d. Продолженный оператор также будем обозначать T^s.

Пусть $\mathcal{F}$ — одно из пространств L_*^p, C_*^d $(d = 0, 1, \ldots)$ или любое функциональное топологическое векторное пространство, инвариантное относительно операторов T^s. Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ будем называть инвариантным подпространством (ИПП), если $\mathcal{H}$ инвариантно относительно операторов T^s при всех $s \in R$. Будем также всюду предполагать, что ИПП $\mathcal{H}$ несобственное, т.е. $\mathcal{H} \neq \mathcal{F}$ и $\mathcal{H} \neq \{0\}$.

В настоящей работе в пространствах L_*^p и C_*^d описываются все ИПП, если Δ - оператор Якоби и выполняется дополнительное условие

$$\alpha - \beta \in Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{1.4}$$

Ранее в работах [2,3] изучались ИПП для случаев, когда Δ - оператор Бесселя или когда $A(t) \equiv 1$, $q(t)$ - произвольная ограниченная функция. Случай оператора Якоби представляет интерес для некоторых задач гармонического анализа на группах Ли и симметрических пространствах [4,5] (т.к. радиальная часть оператора Лапласа на симметрических пространствах ранга 1 является оператором Якоби).

Для любого комплексного числа μ и натурального r через $V_{\mu,r}$ обозначим подпространство в $\mathcal{E}_0$, состоящее из всех решений уравнения

$$(\Delta + \mu^2)^r f = 0. \tag{1.5}$$

При $\mu \neq 0$ $V_{\mu,r}$ является линейной оболочкой функций

$$e(\mu,t),\ \partial_\mu e(\mu,t), \ldots \partial_\mu^{r-1} e(\mu,t), \tag{1.6}$$

где $e(\mu, t)$ - четная собственная функция оператора Δ с собственным значением $(-\mu^2)$, нормированная условием $e(\mu, 0) = 1$, ∂_μ - дифференцирование по параметру μ. При $\mu = 0$ функции (1.6) нужно заменить на

$$e(\mu,t)\Big|_{\mu=0},\quad \partial_\mu^2 e(\mu,t)\Big|_{\mu=0}, \ldots \quad \partial_\mu^{2(r-1)} e(\mu,t)\Big|_{\mu=0}. \tag{1.7}$$

Пусть

$$C_+ = \{z = x + iy \in C : x \geq 0 \text{ и при } x = 0 \quad y \geq 0\}.$$

Подпространство $V_{\mu,r}$ является простейшим инвариантным подпространством. Так как $V_{\mu,r} = V_{(-\mu),r}$, то без ограничения общности можно считать, что $\mu \in C_+$. В общем случае строение ИПП описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}$ – одно из пространств L^p_* или C^d_* $(d \in Z_+)$, T^s — ООС, соответствующий оператору Якоби, причем выполнено условие (1.4). Тогда для любого ИПП $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ существует единственный конечный или счетный набор комплексных чисел $\sigma = \{\mu_j\}$ $(\mu_j \in C_+$, каждое число μ_j может входить в набор с конечной кратностью $r_j)$ такой, что $\mathcal{H}$ совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки подпространств V_{μ_j,r_j}, где $\mu_j \in \sigma$.*

Назовем набор σ спектром ИПП $\mathcal{H}$. Набор комплексных чисел $\sigma = \{\mu_j\}$ $(\mu_j = a_j + ib_j \in C_+)$ является спектром некоторого ИПП $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: (A) *при каждом $t > 0$ для тех $\mu_j = a_j + ib_j$, у которых $|b_j| < t$, после их перенумерования в порядке роста a_j $(0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots)$, последовательность $a_j / \ln j \to \infty$ или множество этих чисел конечно.*

Доказательство теоремы 1 является основной целью настоящей работы. Основные используемые при доказательстве методы являются обобщением методов П.К.Рашевского [4], который фактически рассматривал задачу об описании ИПП в L^p_* для ООС, соответствующего дифференциальному оператору $\Delta = \partial_t^2 + \operatorname{cth} t \cdot \partial_t$. Отметим также, что теорема, аналогичная теореме 1, для некоторых частных случаев оператора Якоби доказана в работе Л.А.Хинкиса [6].

Предварительно приведем общие свойства ООС T^s, соответствующего произвольному оператору Δ типа (1.1) по работам [7, 8]:

1^0. *Для любой функции $f(t) \in \mathcal{E}_0$ задача Коши (1.2), (1.3) имеет единственное решение $u(t,s) \in C^\infty(R^2)$. Функция $u(t,s)$ четная по каждой из переменных t и s.*

2^0. *Для любого $s \in R$ оператор T^s является линейным непрерывным оператором из $\mathcal{E}_0$ в $\mathcal{E}_0$.*

3^0. $T^s f(t) = T^t f(s); \qquad T^0 f(t) = f(t)$.

4^0. *Если $f(t) \in \mathcal{D}_0$, то функция $T^s f(t)$ (s фиксировано) принадлежит $\mathcal{D}_0$.*

5^0. *Пусть*

$$< f, g > = \int_0^\infty f(t) g(t) A(t)\, dt.$$

Для любых функций $f \in \mathcal{D}_0$, $g \in \mathcal{E}_0$ справедливо равенство

$$< T^s f, g > = < f, T^s g > \quad \forall s \in R. \tag{1.8}$$

Далее будем всюду считать, что $t, s \ge 0$. На отрицательные значения t, s функции продолжаются по четности.

Обобщенная свертка функций $f \in \mathcal{D}_0$, $g \in \mathcal{E}_0$ определяется формулой

$$f * g(s) = \int_0^\infty (T^s f)(t)\, g(t)\, A(t)\, dt.$$

Эквивалентно можно написать

$$f * g(s) = < T^s f, g >, \tag{1.9}$$

или, с учетом 5^0,

$$f * g(s) = < f, T^s g > . \tag{1.10}$$

По формулам (1.9) и (1.10) свертка распространяется и на более широкий класс функций. Так, при $f \in \mathcal{D}_0$, $g \in L^p_*$ свертку определим формулой (1.9). Отметим, что при этом $f * g \in \mathcal{E}_0$.

Далее будем предполагать, что оператор Δ имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{A(t)} \frac{d}{dt} \left(A(t) \frac{d}{dt} \right) + \rho^2, \tag{1.11}$$

где $\rho \ge 0$ – постоянное число. Предположим также, что помимо условий, ранее налагавшихся на оператор (1.1), должны выполняться следующие условия:

(α) *$A(t)$ возрастает и стремится к бесконечности при $t \to +\infty$;*

(β) *$A'(t)/A(t)$ монотонно убывает и стремится к 2ρ при $t \to +\infty$.*

При этих условиях в работе [9] показано, что ООС T^s можно представить в виде

$$T^s f(t) = \int\limits_{|t-s|}^{t+s} f(u)\, W(t,s,du), \tag{1.12}$$

где $W(t, s.du)$ – положительная мера массы 1 с носителем на отрезке $[|t-s|, t+s]$. Этому условию удовлетворяет оператор Якоби. Для него ядро $W(t,s,du)$ можно выписать и в явном виде (см.[7, с.93–94]), но это не понадобится далее.

Проверим, что оператор T^s может быть продолжен по непрерывности на пространства C_* и L^p_*. Заметим, что при $u \le t+s$ и $k>0$ справедливо неравенство

$$e^{-kt} \le e^{k(s-u)} = e^{ks}\cdot e^{-ku}.$$

Тогда

$$n_k(T^s f) = \sup_{t\ge 0} |T^s f(t)| e^{-kt} \le$$

$$\le e^{ks} \sup_{t\ge 0} \int_{|t-s|}^{t+s} |f(u)| e^{-ku}\, W(t,s.du) \le e^{ks} n_k(f).$$

Следовательно, для $f \in \mathcal{E}_0$

$$n_k(T^s f) \le e^{ks} n_k(f). \tag{1.13}$$

Поэтому оператор T^s продолжается по непрерывности на пространство C_k и все пространство C_*, причем для $f \in C_k$ выполняется неравенство (1.13).

Проверим, что

$$|T^s f(t)|^p \le T^s(|f(t)|^p). \tag{1.14}$$

Действительно, пользуясь неравенством Гельдера, получаем

$$|T^s f(t)|^p = \left|\int_{|t-s|}^{t+s} f(u)\cdot 1\cdot W(t,s,du)\right|^p \le$$

$$\le \int_{|t-s|}^{t+s} |f(u)|^p\, W(t,s,du) = T^s\left(|f(t)|^p\right).$$

Заметим, что

$$0 \le T^s(e^{-kt}) = \int_{|t-s|}^{t+s} e^{-ku} W(t,s,du) \le$$

$$\le e^{-k|t-s|} \int_{|t-s|}^{t+s} W(t,s,du) \le e^{ks} e^{-kt}. \tag{1.15}$$

Аналогично

$$T^s\left(e^{kt}\right) \le e^{ks} e^{kt}. \tag{1.16}$$

Если $f \in \mathcal{D}_0$, то, пользуясь (1.15), (1.14) и (1.8), получим оценку

$$N^p_{p,k}(T^s f) = \int_0^\infty |T^s f(t)|^p e^{-kt} A(t)\,dt \le \int_0^\infty (T^s |f(t)|^p)\, e^{-kt} A(t)\,dt =$$

$$= < T^s(|f(t)|^p),\, e^{-kt} > = < |f(t)|^p, T^s e^{-kt} > \le$$

$$\le e^{ks} < |f(t)|^p, e^{-kt} > = e^{ks} N^p_{p,k}(f).$$

Тогда

$$N_{p,k}(T^s f) \le e^{ks/2} N_{p,k}(f). \tag{1.17}$$

Следовательно, оператор T^s можно продолжить по непрерывности на все пространство L^p_*, причем неравенство (1.17) справедливо для всех $f \in L^p_k$.

Лемма 1.1. *Пусть $f \in L^p_*$, $\varphi \in \mathcal{D}_0$. Тогда функция $f * \varphi \in C^d_*$ при любом $d \in Z_+$. Отображение $f \to f*\varphi$ из L^p_* в C^d_* непрерывно.*

Доказательство. Пусть $f \in L^p_k$. Функция $f*\varphi$ бесконечно дифференцируема. Пользуясь неравенством Гельдера, получим

$$|f*\varphi(s)| = \left|\int_0^\infty f(t) e^{-kt/p} (T^s\varphi(t))\, e^{kt/p} A(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \left(\int_0^\infty |f(t)|^p e^{-kt} A(t)\,dt\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty |T^s\varphi(t)|^p e^{kt} A(t)\,dt\right)^{1/p}$$

Из неравенств (1.13), (1.16) и свойства (1.8) следует, что

$$\int_0^\infty |T^s\varphi(t)|^p e^{kt} A(t)\,dt \le \int_0^\infty T^s(|\varphi(t)|^p)\, e^{kt} A(t)\,dt =$$

$$= < T^s(|\varphi(t)|^p), e^{kt} > = < |\varphi(t)|^p, T^s e^{kt} > \le e^{ks} \int_0^\infty |\varphi(t)|^p e^{kt} A(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$|f*\varphi(s)| \le c e^{ks/p} N_{p,k}(f) < c e^{ks} N_{p,k}(f), \tag{1.18}$$

где число c зависит только от функции φ. Поэтому $g = f * \varphi \in C_k$ и непрерывно зависит от f.

Далее заметим, что

$$\Delta_s g = \int_0^\infty f(t)\big(\Delta_s T^s\varphi(t)\big)A(t)\,dt =$$
$$= \int_0^\infty f(t)T^s(\Delta_t\varphi(t))A(t)\,dt = f * (\Delta_t\varphi).$$

Следовательно, для всякого натурального n $\Delta_s^n g \in C_k$ и непрерывно зависит от f. Тогда $g = f * \varphi \in C_k^d$ и непрерывно зависит от f.

Лемма 1.2. *Между инвариантными подпространствами в C_*^d и L_*^p существует взаимно однозначное соответствие, которое получается сопоставлением ИПП $\mathcal{H} \subset C_*^d$ его замыкания $[\mathcal{H}]$ в L_*^p. То же соответствие получается, если сопоставить ИПП $\mathcal{H} \subseteq L_*^p$ подпространство $\mathcal{H} \cap C_*^d \subset C_*^d$.*

Доказательство леммы 1.2 получается (с учетом леммы 1.1) практически дословным повторением доказательства теоремы 1 из [10], если только в этом доказательстве свертки заменить на обобщенные свертки; в качестве $\varphi_n(t)$ берется любая δ–образная последовательность функций из $\mathcal{E}_0$.

Из леммы 1.2 следует, что теорему 1 достаточно доказать для пространства C_*^d при каком–нибудь $d \in Z_+$.

Через $\mathcal{L}_k$ $(k > 0)$ обозначим БП, состоящее из всех нечетных измеримых функций $f(x)$ на R с конечной нормой

$$\nu_k(f) = \Big(\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-kx}\,dx\Big)^{1/2}.$$

Пусть $\mathcal{L}_* = \bigcup\limits_{k>0} \mathcal{L}_k$ – индуктивный предел БП $\mathcal{L}_k$.

Доказательство теоремы 1 проводится редукцией к задаче об описании замкнутых подпространств в $\mathcal{L}_*$, инвариантных относительно обобщенного сдвига

$$f(x) \mapsto \frac{1}{2}\big(f(x+y) + f(x-y)\big) \quad \forall y \in R \tag{1.19}$$

(обобщенный сдвиг (1.19) соответствует оператору $\Delta = \partial_x^2$). Описание таких подпространств дается следующей теоремой П.К.Рашевского (см. [4]).

Теорема 2. *Замкнутые несобственные линейные подпространства в $\mathcal{L}_*$, инвариантные относительно преобразований (1.19), находятся во взаимно однозначном соответствии с наборами комплексных чисел σ, удовлетворяющих условию (A). При этом набору σ соответствует подпространство, которое совпадает с замыканием в $\mathcal{L}_*$ линейной оболочки функций*

$$\sin\mu x, \quad x\sin\mu x = \partial_\mu \sin\mu x, \ldots \partial_\mu^{r-1}\sin\mu x, \tag{1.20}$$

где $\mu \in \sigma$, r – кратность числа μ в наборе. При $\mu = 0$ функции (1.20) нужно заменить на

$$x, \quad x^3, \ldots \quad x^{2r-1}. \tag{1.21}$$

§2. Доказательство теоремы 1

Всюду в этом параграфе $\Delta = \Delta_{m,r}$ – оператор Якоби, имеющий вид

$$\Delta = \Delta_{m,r} = \partial_t^2 + 2m\cdot\operatorname{cth} t\cdot\partial_t + 2(2r+1)\operatorname{cth} 2t\cdot\partial_t + (m+2r+1)^2, \tag{2.1}$$

где $r \in R$, $r > -\frac{1}{2}$, $m \in Z_+$ (в обозначениях §1 $m = \alpha - \beta$, $r = \beta$).

При $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ положим

$$\Phi_\alpha(f)(x) = c_\alpha 2^{-\alpha-\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{f(t)(\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}}{(\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2t)^{\alpha+1/2}}\,dt, \tag{2.2}$$

где c_α – некоторая константа, которая будет указана ниже. Если положить $f(t) = \tilde f(\operatorname{sh} t)$ и сделать замену переменной $\operatorname{sh} t = \operatorname{sh} x \sin\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, то преобразование Φ_α примет вид

$$\Phi_\alpha(f)(x) =$$
$$= c_\alpha \operatorname{sh} x \int \tilde f(\operatorname{sh} x\sin\theta)(1 + \operatorname{sh}^2 x\sin^2\theta)^\alpha(\sin\theta)^{2\alpha+1}(\cos\theta)^{-2\alpha}\,d\theta \tag{2.3}$$

(интегралы по θ всюду берутся от 0 до $\frac{\pi}{2}$). Из (2.3) видно, что если $f \in \mathcal{E}_0$, то $\Phi_\alpha(f) \in \mathcal{E}_1$. Пусть

$$c_\alpha = \Big(\int (\sin\theta)^{2\alpha+1}(\cos\theta)^{-2\alpha}\,d\theta\Big)^{-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)}.$$

Тогда при $x \to 0$

$$\Phi_\alpha(f)(x) = f(0)x + o(x). \tag{2.4}$$

Положим для удобства

$$\tilde g(\operatorname{sh} t) = \tilde f(\operatorname{sh} t)(1+\operatorname{sh}^2 t)^\alpha = \tilde f(\operatorname{sh} t)(\operatorname{ch} t)^{2\alpha}. \tag{2.5}$$

Тогда

$$\Phi_\alpha(f)(x) = c_\alpha \operatorname{sh} x \int \tilde g(\operatorname{sh} x \sin\theta)(\sin\theta)^{2\alpha+1}(\cos\theta)^{-2\alpha}\, d\theta. \tag{2.6}$$

При $\alpha = \frac12$ доопределим

$$\Phi_{1/2}(f)(x) = \operatorname{sh} x f(x). \tag{2.7}$$

Пусть

$$\Delta_r = \partial_t^2 + 2(2r+1)\cdot \operatorname{cth} 2t \cdot \partial_t + (2r+1)^2. \tag{2.8}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $(-\frac12) < \alpha \le \frac12$, $f(t) \in \mathcal{E}_0$. *Тогда*

$$\Phi_\alpha(\Delta_\alpha f) = \partial_x^2(\Phi_\alpha f).$$

Доказательство. Случай $\alpha = \frac12$ проверяется непосредственно. Пусть $\alpha < \frac12$. Обозначим

$$p(x) = \Phi_\alpha(f)(x).$$

Тогда

$$p''(x) = c_\alpha \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x \int \tilde g''(\operatorname{sh} x \sin\theta)(\sin\theta)^{2\alpha+3}(\cos\theta)^{-2\alpha}\, d\theta +$$

$$+ c_\alpha(2\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x)\int \tilde g'(\operatorname{sh} x\sin\theta)(\sin\theta)^{2\alpha+2}(\cos\theta)^{-2\theta}\, d\theta + p(x). \tag{2.9}$$

Легко видеть, что

$$(\operatorname{ch} t)^{2\alpha}\Delta_\alpha f = \tilde g''(\operatorname{sh} t)\,(1+\operatorname{sh}^2 t) + (2\alpha+1)\operatorname{sh}^{-1} t\cdot \tilde g'(\operatorname{sh} t) +$$

$$+ 3\tilde g'(\operatorname{sh} t) + \tilde g(\operatorname{sh} t).$$

Тогда

$$\Phi_\alpha(\Delta_\alpha f) =$$

$$+ c_\alpha \operatorname{sh} x \int \tilde g''(\operatorname{sh} x\sin\theta)(1+\operatorname{sh}^2 x \sin^2\theta)(\sin\theta)^{2\alpha+1}(\cos\theta)^{-2\alpha}\, d\theta +$$

$$+ (2\alpha+1)c_\alpha \int \tilde g'(\operatorname{sh} x\sin\theta)\,(\sin\theta)^{2\alpha}(\cos\theta)^{-2\alpha}\, d\theta +$$

$$+ 3c_\alpha \operatorname{sh}^2 x \int \tilde g'(\operatorname{sh} x\sin\theta)(\sin\theta)^{2\alpha+2}(\cos\theta)^{-2\alpha}\, d\theta + p(x). \tag{2.10}$$

Вычитая из (2.9) формулу (2.10) и проинтегрировав по частям, получим, что

$$p''(x) - \Phi_\alpha(\Delta_\alpha f) = -c_\alpha \int (\sin\theta)^{2\alpha+1}(\cos\theta)^{-2\alpha+1}\, d\tilde g'(\operatorname{sh} x\sin\theta) +$$

$$+ 2c_\alpha \int \tilde g'(\operatorname{sh} x\sin\theta)\,(\sin\theta)^{2\alpha+2}(\cos\theta)^{-2\alpha}\, d\theta -$$

$$-(2\alpha+1)c_\alpha \int \tilde g'(\operatorname{sh} x\sin\theta)\,(\sin\theta)^{2\alpha}(\cos\theta)^{-2\alpha}\, d\theta = 0,$$

т.е.

$$p''(x) = \Phi_\alpha(\Delta_\alpha f)\,(x).$$

Произвольное число $r > -\frac12$ представим в виде $r = n + \alpha$, где $-\frac12 < \alpha \le \frac12$, $n \in Z_+$. Положим

$$A_r(f)(t) = (\operatorname{sh} 2t)^{-2\alpha}\left(\operatorname{sh}^{-1} 2t\cdot\partial_t\right)^n\left((\operatorname{sh} 2t)^{2r} f(t)\right). \tag{2.11}$$

Пусть

$$\Psi_r(f) = \Phi_\alpha(A_r(f)). \tag{2.12}$$

Очевидно, что при $f \in \mathcal{E}_0$ функция $\Psi_r(f) \in \mathcal{E}_1$.

Лемма 2.2. *Для любого* $r > -\frac12$

$$\Psi_r(\Delta_r f) = \partial_x^2(\Psi_r f).$$

Доказательство. Для $r \le \frac{1}{2}$ утверждение следует из леммы 2.1. Введем оператор

$$P_l(f)(t) = (\operatorname{sh} 2t)^{-2l+2} (\operatorname{sh}^{-1} 2t \cdot \partial_t) ((\operatorname{sh} 2t)^{2l} f(t)) = \\ = \operatorname{sh} 2t \cdot f'(t) + 4l \operatorname{ch} 2t \cdot f(t).$$

Непосредственным подсчетом проверяется, что

$$P_l(\Delta_l f) = \Delta_{l-1}(P_l f). \tag{2.13}$$

Оператор A_r можно представить в виде произведения

$$A_r = P_{\alpha+1} \cdot P_{\alpha+2} \cdot \ldots \cdot P_r.$$

Тогда из (2.13) следует, что

$$A_r(\Delta_r f) = \Delta_\alpha(A_r f).$$

Окончательно, используя лемму 2.1, получим, что

$$\Psi_r(\Delta_r f) = \Phi_\alpha(A_r(\Delta_r f)) = \Phi_\alpha(\Delta_\alpha(A_r f)) = \\ = \partial_x^2 (\Phi_\alpha A_r(f)) = \partial_x^2(\Psi_r f).$$

Для любых $m \in Z_+$, $r > -\frac{1}{2}$ введем преобразование

$$\Psi_{m,r}(f) = c \left(\operatorname{sh}^{-1} x \cdot \partial_x\right)^m \Psi_r \left((\operatorname{sh} t)^{2m} f(t)\right), \tag{2.14}$$

где c – некоторый числовой коэффициент, который будет уточнен в дальнейшем.

Лемма 2.3. *Для $f \in \mathcal{E}_0$ справедливо соотношение*

$$\Psi_{m,r}\left(\Delta_{m,r}(f)\right) = \partial_x^2 \left(\Psi_{m,r} f\right).$$

Доказательство. Определим операторы

$$\Delta'_{m,r} = \partial_t^2 - 2m \cdot \operatorname{cth} t \cdot \partial_t + 2(2r+1) \cdot \operatorname{cth} 2t \cdot \partial_t - 4mr(\operatorname{cth} t)^2 + \\ + (m + 2r + 1)^2 - 4m(r+1);$$

$$\Delta''_m = \partial_x^2 - 2m \cdot \operatorname{cth} x \cdot \partial_x + m^2.$$

Напомним, что

$$\Psi_r(f) = \Phi_\alpha\left(A_r(f)\right),$$

где $r = n + \alpha$, $n \in Z_+$, $-\frac{1}{2} < \alpha \le \frac{1}{2}$,

$$A_r = P_{\alpha+1} \cdot P_{\alpha+2} \cdot \ldots \cdot P_r, \\ P_l(f) = \operatorname{sh} 2t \cdot \partial_t f + 4l \cdot \operatorname{ch} 2t \cdot f.$$

Непосредственным подсчетом проверяются соотношения

$$(\operatorname{sh} t)^{2m} \left(\Delta_{m,r} f\right) = \Delta'_{m,r} \left((\operatorname{sh} t)^{2m} f(t)\right), \tag{2.15}$$

$$P_l \cdot \Delta'_{m,l} = \Delta'_{m,l-1} \cdot P_l. \tag{2.16}$$

Из (2.16) следует, что

$$A_r \cdot \Delta'_{m,r} = \Delta'_{m,\alpha} \cdot A_r. \tag{2.17}$$

Пусть $g(t) = A_r\left((\operatorname{sh} t)^{2m} f(t)\right)$. Проверим, что

$$\Phi_\alpha\left(\Delta'_{m,\alpha} g\right) = \Delta''_m \left(\Phi_\alpha g\right). \tag{2.18}$$

Заметим, что

$$\Delta'_{m,\alpha} = \Delta_\alpha - 2m \cdot \operatorname{cth} t \cdot \partial_t - 4m\alpha(\operatorname{cth} t)^2 + (m^2 - 2m),$$

где Δ_α определен в (2.8).

По лемме 2.1

$$\Phi_\alpha(\Delta_\alpha g) = \partial_x^2(\Phi_\alpha g). \tag{2.19}$$

При $m = 0$ из (2.19) следует (2.18). Пусть $m \ge 1$. Функция $(\operatorname{sh} t)^{2m} f(t)$ имеет при $t = 0$ нуль кратности не меньше $2m$. Операторы P_l не уменьшают кратности нуля. Поэтому и функция $g(t)$ будет иметь при $t = 0$ нуль кратности $\ge 2m$, в частности, $g(0) = 0$.

Пусть $\alpha < \frac{1}{2}$,

$$p(x) = \Phi_\alpha(g)(x) = c_\alpha 2^{-\alpha-1/2} \int_0^x \frac{g(t)(\operatorname{sh} 2t)^{2\alpha+1}}{(\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2t)^{\alpha+1/2}}\, dt. \tag{2.20}$$

Проинтегрируем в (2.20) по частям:

$$p(x)=\frac{c_\alpha 2^{-\alpha-1/2}}{(2\alpha-1)}\int_0^x g(t)(\operatorname{sh}2t)^{2\alpha}\,d(\operatorname{ch}2x-\operatorname{ch}2t)^{-\alpha+1/2}=$$

$$=D\int_0^x(\operatorname{ch}2x-\operatorname{ch}2t)^{-\alpha+\frac12}\left[g'(t)(\operatorname{sh}2t)^{2\alpha}+4\alpha g(t)(\operatorname{sh}2t)^{2\alpha-1}\operatorname{ch}2t\right]dt,$$

где

$$D=\frac{c_\alpha 2^{-\alpha-1/2}}{(1-2\alpha)}.$$

Тогда, если обозначить

$$h(t)=g'(t)(\operatorname{sh}2t)^{2\alpha}+4\alpha g(t)(\operatorname{sh}2t)^{2\alpha-1}\operatorname{ch}2t,$$

получаем

$$\operatorname{cth}x\cdot p'(x)=c_\alpha 2^{-\alpha-\frac12}\operatorname{cth}x\cdot\operatorname{sh}2x\cdot\int_0^x(\operatorname{ch}2x-\operatorname{ch}2t)^{-\alpha-\frac12}h(t)\,dt=$$

$$=c_\alpha 2^{-\alpha-\frac12}2\operatorname{ch}^2x\int_0^x(\operatorname{ch}2x-\operatorname{ch}2t)^{-\alpha-\frac12}h(t)\,dt=$$

$$=c_\alpha 2^{-\alpha-\frac12}\int_0^x(\operatorname{ch}2x-\operatorname{ch}2t)^{-\alpha+\frac12}h(t)\,dt+$$

$$+c_\alpha 2^{-\alpha-\frac12}\int_0^x(\operatorname{ch}2x-\operatorname{ch}2t)^{-\alpha-\frac12}(\operatorname{ch}2t+1)h(t)\,dt=$$

$$=(1-2\alpha)p(x)+\Phi_\alpha\left(\operatorname{cth}t\cdot g'(t)\right)+\Phi_\alpha\left(2\alpha\cdot\operatorname{cth}^2t\cdot g(t)\right)+2\alpha\,p(x)=$$

$$=\Phi_\alpha(\operatorname{cth}t\cdot g'+2\alpha\cdot\operatorname{cth}^2t\cdot g)+p(x).$$

Следовательно,

$$\Phi_\alpha\left(\Delta'_{m,\alpha}\right)=\partial_x^2p(x)-2m\cdot\operatorname{cth}x\cdot\partial_xp(x)+2m\,p(x)+(m^2-2m)p(x)=$$
$$=\partial_x^2p-2m\cdot\operatorname{cth}x\cdot\partial_xp+m^2p. \tag{2.21}$$

Следующее соотношение проверяется непосредственно

$$\left(\operatorname{sh}^{-1}x\cdot\partial_x\right)\Delta''_m=\Delta''_{m-1}\left(\operatorname{sh}^{-1}x\cdot\partial_x\right). \tag{2.22}$$

Окончательно из (2.21) и (2.22) получаем соотношение из леммы 2.3.

Отметим, что преобразование $\Psi_{m,r}$ введено при $m=r=0$ П.К.Рашевским в [4] и при $m,r\in Z_+$ Л.А.Хинкисом в [6].

Зафиксируем какое-нибудь целое число $d\ \geq m+r$. Если $f\in C_*^d$, то функция $(\operatorname{sh}t)^{2m}f(t)\in C_*^d$ и имеет при $t=0$ нуль кратности $\geq 2m$. Оператор A_r не понижает кратности нуля (при $t=0$), следовательно, функция $A_r\left((\operatorname{sh}t)^{2m}f(t)\right)\in C_*^{d-n}$ и имеет при $t=0$ нуль кратности $\geq 2m$.

Из записи (2.6) оператора Φ_α видно, что функция

$$\Phi_\alpha\left(A_r\left((\operatorname{sh}t)^{2m}f\right)\right)=\Psi_r\left((\operatorname{sh}t)^{2m}f\right)$$

нечетная и имеет при $t=0$ нуль кратности $\geq 2m+1$. Отсюда легко получить, что функция

$$\Psi_{m,r}(f)=\left(\operatorname{sh}^{-1}x\cdot\partial_x\right)^m\Psi_r\left((\operatorname{sh}t)^{2m}f\right)\in\mathcal{L}_*$$

и непрерывно зависит от $f\in C_*^d$. Если $f\in\mathcal{E}_0$, то функция $\Psi_{m,r}(f)\in\mathcal{E}_1$ и непрерывно зависит от $f\in\mathcal{E}_0$.

В дальнейшем будем считать, что коэффициент c в (2.14) выбран так, чтобы

$$\Psi_{m,r}(1)=x+o(x).$$

Если $\mathcal{H}$ – ИПП в C_*^d, то пусть $\mathcal{P}=[\Psi_{m,r}(\mathcal{H})]$ – замыкание образа $\mathcal{H}$ в $\mathcal{L}_*$. Будем говорить, что подпространство $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{L}_*$ соответствует подпространству $\mathcal{H}\subseteq C_*^d$.

Предложение 2.1. *Если $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ – ИПП в C_*^d, а $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – соответствующие им подпространства в $\mathcal{L}_*$, то из $\mathcal{H}_1\neq\mathcal{H}_2$ следует, что $\mathcal{P}_1\neq\mathcal{P}_2$.*

Доказательство. Через $'L_*^2$ обозначим множество всех измеримых четных функций $F(t)$ таких, что

$$'N_{2,k}(F)=\left(\int_0^\infty|F(t)|^2e^{kt}A(t)\,dt\right)^{1/2}<\infty\quad\forall k>0. \tag{2.23}$$

Пространство $'L_*^2$ снабжается семейством норм $'N_{2,k}$, $k>0$, и становится локально выпуклым пространством. Его можно рассматривать как сопряженное пространство к L_*^2 относительно двойственности

$$<F,f>=\int_0^\infty\bar F(t)\,f(t)\,A(t)\,dt.$$

Аналогично пространство $\mathcal{L}'_*$, сопряженное к $\mathcal{L}_*$, состоит из измеримых нечетных функций $H(x)$ таких, что

$$\int_0^\infty |H(x)|^2 e^{kx}\,dx < \infty \quad \forall k > 0.$$

При этом пусть

$$(H, h) = \int_0^\infty \bar{H}(x)h(x)\,dx \quad \forall h \in \mathcal{L}_*.$$

Пусть $\mathcal{H}$ – ИПП в C^d_*. Из (1.8) легко видеть, что ортогональное дополнение

$$\mathcal{H}^\perp = \{F \in {}'L^2_* : < F, f >= 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}\}$$

является инвариантным подпространством в ${}'L^2_*$ и, следовательно, инвариантно относительно обобщенных сверток с функциями из $\mathcal{D}_0$.

Пусть

$$\mathcal{H}^\perp_\infty = \{F * \varphi \quad \text{при} \quad f \in \mathcal{H}^\perp, \quad \varphi \in \mathcal{D}_0\}.$$

Линейное подпространство $\mathcal{H}^\perp_\infty$ состоит из гладких (класса C^∞) функций и плотно в $\mathcal{H}^\perp$. Почти дословно повторяя рассуждения леммы 1.1, при любом $k > 0$ получим оценку

$$|F * \varphi(s)| \le c\,e^{-ks/2} N'_{2,k}(F), \tag{2.24}$$

где число c зависит только от функции φ и числа k. Из (2.24) следует, что функция $g(s) = F*\varphi(s)$ убывает при $s \to \infty$ быстрее любой экспоненты. Так как $\Delta g(s) = F*(\Delta\varphi)$ (Δ – оператор Якоби), то и функции $\Delta g(s)$, $\quad \Delta^2 g(s), \ldots$ убывают быстрее любой экспоненты e^{ks}. Отсюда легко получить, что и любая производная функции $g(s)$ убывает быстрее любой экспоненты (можно воспользоваться соотношением

$$\frac{dg}{ds} = -\frac{1}{A(s)}\int_s^\infty A(u)\,(\Delta - \rho^2)g(u)\,du,$$

которое следует из (1.11)).

Пусть $\mathcal{H}_1 \ne \mathcal{H}_2$ – ИПП в C^d_*, $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – соответствующие им подпространства в $\mathcal{L}_*$. Из леммы 1.2 следует, что различны и замыкания $[\mathcal{H}_1]$ и $[\mathcal{H}_2]$ в L^2_*. Тогда из теоремы Хана—Банаха следует, что $\mathcal{H}_1^\perp \ne \mathcal{H}_2^\perp$. Так как $\mathcal{H}^\perp_{1\infty}$ плотно в $\mathcal{H}_1^\perp$, то найдется функция $F \in \mathcal{H}^\perp_{1\infty}$ такая, что $< F, f_0 >\ne 0$ для некоторой функции $f_0 \in \mathcal{H}_2$.

Далее будет показано, что для некоторой функции $H(x) \in \mathcal{L}'_*$ выполняется соотношение

$$< F(t), f(t) >= (H(x), h(x)) \quad \forall f \in C^d_*, \tag{2.25}$$

где $h(x) = \Psi_r(f)$. Функция H определяет линейный непрерывный функционал на $\mathcal{L}_*$ такой, что $(H, h) = 0$ для всех $h \in \mathcal{P}_1$ и $(H, h_0) \ne 0$ для $h_0 = \Psi_r(f_0) \in \mathcal{P}_2$. Следовательно, $\mathcal{P}_1 \ne \mathcal{P}_2$.

Для нахождения функции $H(x)$ заметим, что

$$(H, \Psi_{m,r}(f)) = (\Psi^*_{m,r}(H), f),$$

где $\Psi^*_{m,r}$ – сопряженный оператор. В явном виде

$$\Psi^*_{m,r}(H) = c\,A^*_r\,\Phi^*_\alpha D^m(H),$$

где

$$D(F) = (-\partial_x)\left(\operatorname{sh}^{-1} x\,F(x)\right),$$

$$(\Phi^*_\alpha(F))\,(t) = c_\alpha 2^{-\alpha-1/2}(\operatorname{sh}2t)^{2\alpha+1}\int_t^\infty F(x)(\operatorname{ch}2x - \operatorname{ch}2t)^{-\alpha-1/2}\,dx,$$

$$A^*_r(F) = (-1)^n(\operatorname{sh}2t)^{2r+1}\left(\operatorname{sh}^{-1}2t\cdot\partial_t\right)^n\left((\operatorname{sh}2t)^{-2\alpha-1}F(t)\right).$$

Тогда функция $H(x)$ определяется из уравнения

$$(\Psi^*_{m,r}(H))\,(t) = (\operatorname{sh}t)^{2m}(\operatorname{sh}2t)^{2r+1}h(t),$$

которое далее решается. Если обозначить

$$g(t) = \Phi^*_\alpha D^m(H), \quad p(x) = D^m(H),$$

то

$$g(t) = (-1)^m c^{-1}(\operatorname{sh}2t)^{2\alpha}\mathcal{J}^m\left((\operatorname{sh}2t)^{2m+1}h(t)\right),$$

где

$$\mathcal{J}(F(t)) = \operatorname{sh} 2t \int_t^\infty F(s)\, ds.$$

Для нахождения $p(x)$ заметим, что из

$$(\Phi_\alpha^* p)(t) = g(t)$$

следует, что

$$\int_t^\infty p(x)(\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2t)^{-\alpha-1/2} dx = c_\alpha^{-1} 2^{\alpha+1/2} (\operatorname{sh} 2t)^{-2\alpha-1} g(t).$$

Это интегральное уравнение Абеля относительно $p(x)$ (с точностью до замены переменной) и из него следует, что

$$p(x) = -\frac{2^{\alpha-1/2}\cos\pi\alpha}{\pi c_\alpha} \frac{d}{dx} \int_x^\infty g(t)(\operatorname{sh} 2t)^{-2\alpha} (\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 2x)^{\alpha-1/2}\, dx.$$

Окончательно $H(x) = (\mathcal{I}^m(p))(x)$, где

$$(\mathcal{I}(F))(x) = \operatorname{sh} x \int_x^\infty F(s)\, ds.$$

Все преобразования законны, так как функция $F(t)$ убывает вместе со всеми производными быстрее любой экспоненты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Пусть $\mathcal{H}$ – ИПП в C_*^d, а $\mathcal{P}$ – соответствующее ему подпространство в $\mathcal{L}_*$. Тогда $\mathcal{P}$ инвариантно относительно преобразований*

$$h(x) \mapsto \frac{1}{2}(h(x+y) + h(x-y)) \quad \forall y \in R. \tag{2.26}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(t) \in \mathcal{H}$, $h(x) = \Psi_r(f) \in \mathcal{P}$. Вместе с $f(t)$ в $\mathcal{H}$ содержатся функции $T^s f(t) = u(t,s)$ при любом $s \in R$.

Пусть

$$v(x,y) = \Psi_r^{(t\to x)} \Psi_r^{(s\to y)}[u(t,s)],$$

т.е. к $u(t,s)$ применяется преобразование Ψ_r по переменным t и s. Тогда $v(x,y) \in \mathcal{P}$ при любом $y \in R$.

Функция $v(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (см. лемму 2.3)

$$\partial_x^2 v(x,y) = \partial_y^2 v(x,y),$$

а так как $\Psi_r(1) = x + o(x)$, то и начальным условиям

$$v(x,0) = 0, \qquad \partial_y v(x,0) = h(x).$$

Тогда

$$v(x,y) = \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} h(t)\, dt.$$

Пусть $w(x,y) = \partial_y v(x,y)$. Тогда $w(x,y) = \frac{1}{2}[h(x+y) + h(x-y)] \in \mathcal{L}_*$. Заметим, что

$$\frac{1}{\alpha}(v(x,y+\alpha) - v(x,y)) = \int_0^1 w(x, t + t\alpha)\, dt \to w(x,y)$$

в пространстве $\mathcal{L}_*$ при $\alpha \to 0$. Так как $\frac{1}{\alpha}(v(x,y+\alpha) - v(x,y)) \in \mathcal{P}$ и $\mathcal{P}$ замкнуто в $\mathcal{L}_*$, то $w(x,y) \in \mathcal{P}$.

Поскольку функции вида $\Psi_r(f)$, $f \in \mathcal{H}$, образуют плотное подмножество в $\mathcal{H}$, то и все пространство $\mathcal{H}$ инвариантно относительно преобразований (2.26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\mathcal{H}$ – ИПП в C_*^d, $\mathcal{P}$ – соответствующее ему замкнутое подпространство в $\mathcal{L}_*$. Так как $\mathcal{P}$ инвариантно относительно обобщенных сдвигов (2.26), то из теоремы 2 следует, что $\mathcal{P}$ описывается набором комплексных чисел σ, удовлетворяющих условию (A). При этом $\mathcal{P}$ совпадает с замыканием линейной оболочки функций (1.20) или (1.21), где $\mu \in \sigma$, r – кратность числа μ в наборе σ.

Пусть $e(\mu,t)$ – четная собственная функция оператора Δ с собственным значением $(-\mu^2)$, нормированная условием $e(\mu,0) = 1$. Пусть $h(x) = \Psi_r(e(\mu,t))$. Тогда

$$\partial_x^2 h(x) = \Psi_r(\Delta e(\mu,t)) = -\mu^2 \Psi_r(e(\mu,t)) = -\mu^2 h(x)$$

и $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$. Следовательно,

$$\Psi_r(e(\mu,t)) = \frac{\sin\mu x}{\mu}. \tag{2.27}$$

Через $\mathcal{H}_1$ обозначим подпространство в C_*^d, совпадающее с замыканием линейной оболочки функций

$$e(\mu,t), \quad \partial_\mu e(\mu,t), \ldots \quad \partial_\mu^{r-1} e(\mu,t), \tag{2.28}$$

где $\mu \in \sigma$, r – кратность числа μ в σ; при $\mu = 0$ функции (2.28) нужно заменить на

$$e(\mu,t)\big|_{\mu=0}, \quad \partial_\mu^2 e(\mu,t)\big|_{\mu=0}, \ldots \quad \partial_\mu^{2r-2} e(\mu,t)\big|_{\mu=0}.$$

Тогда $\mathcal{H}_1$ – ИПП в C_*^d и из (2.27) следует, что подпространствам $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_1$ соответствует одно и то же подпространство $\mathcal{P}$ в $\mathcal{L}_*$. По предложению 2.1 тогда получаем, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$.

Литература

1. Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973.

2. Платонов С.С. Подпространства, инвариантные относительно обобщенных сдвигов, I// Мат. заметки. 1986. Т.39. Вып.4. С.576–585.

3. Платонов С.С. Подпространства, инвариантные относительно обобщенных сдвигов, II// Мат. заметки. 1990. Т.47. Вып.6. С.91–101.

4. Рашевский П.К. Описание инвариантных подпространств в некоторых функциональных пространствах // Труды ММО. 1979. Т.38. С.139–185.

5. Платонов С.С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на n–мерном пространстве Лобачевского // Мат. сборник. 1988. Т.137. №4. С.435–461.

6. Хинкис Л.А. К задаче об инвариантных подпространствах в пространстве функций на полупростой группе ранга 1. Ч. I, II. М., 1983. Деп. в ВИНИТИ 29.04.№4980–83ДЕП и 22.11.№7007–83ДЕП.

7. Trimeche K. Transformation intégrale de Weil et théoréme de Paley–Wiener associés a un opérateur differential singulier sur $(0,\infty)$ // J. Math. pures. et appl. 1981. V.60. P.51–98.

8. Trimeche K. Fonctions moyenne periodiques associeés a un opérateur différentiel singular sur $(0,\infty)$ et dévelopment en série de Fourier généralise // J. Math. pures. et appl. 1986. V.65. P.1–46.

9. Chebli H. Opérateurs de translation généraliseé et semi–groupes de convolution // Lect. Notes in Math. 1974. №404. P.35–59.

10. Платонов С.С. О взаимно однозначном соответствии между инвариантными подпространствами в некоторых пространствах // Труды ПГУ. Сер. Математика; Вып.1. Петрозаводск, 1993. С. 54–60.