Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 3, 1996

УДК 519

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМЕ С НЕОРДИНАРНЫМ ПОТОКОМ И ДИСЦИПЛИНОЙ РАЗДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССОРА

О. Ю. Богоявленская

В работе рассматривается однолинейная система массового обслуживания (СМО) с потерями требований, дисциплиной "разделение процессора" и неординарным входящим потоком. Построена система уравнений равновесия, доказана теорема о виде ее решения на основе которого найдено стационарное распределение длины очереди.

§ 1. Введение

В работе рассматривается однолинейная система массового обслуживания (СМО) с потерями требований и дисциплиной "разделение процессора"— $M|G|1|m$ в обозначениях Кендалла. Предполагается, что распределение длительностей обслуживания имеет специальный вид, отражающий неординарную структуру входящего потока. Подробное описание рассматриваемой СМО для более простого случая — ограниченного размера группы требований — приведено в [1].

Системам массового обсуживания с неординарным входящим потоком посвящено большое количество работ. Из них можно указать [2], где рассмотрены различные случаи неординарных потоков как с фиксированным так и с произвольным размером группы, а также работу [3], в которой проведен анализ для случая рекурентного неординарного потока.

Вопросам дисциплины обслуживания "разделение процессора" посвящена одна из глав [2]. В этой связи можно также указать работу

[5], в которой рассмотрены времена пребывания заявок в системах $M|M|1$ и $M|M|1|K$ с дисциплиной "разделение процессора" в условиях большой нагрузки.

Следует также отметить многочисленные работы, посвященные СМО $M|G|1|m$ и ее обобщениям с дисциплиной $FIFO$ (первый пришел — первый обслужен). Большинство из них подробно представлено в [4].

Нами был использован метод фаз Эрланга [2, 6] для построения разрывного марковского процесса, описывающего поведение исследуемой СМО. Доказана теорема о виде решения системы уравнений равновесия, на основе которой найдено стационарное распределение длины очереди (числа занятых мест в накопителе СМО).

§ 2. Описание системы

На одноканальную систему массового обслуживания поступает случайный неординарный поток групп требований, которые помещаются в накопитель — каждая *группа* занимает *одну* позицию накопителя. Прибывшая группа может занять любую из свободных позиций накопителя с равной вероятностью. Обслуживание групп требований производится по дисциплине "разделение процессора". Это означает, что обслуживание всех стоящих в очереди групп происходит одновременно, а интенсивность их обслуживания падает пропорционально количеству обслуживаемых групп. Требования в группе обслуживаются по одному в порядке поступления. Если к моменту поступления группы в накопителе нет свободных мест — она теряется.

Такая схема обслуживания, позволяет существенно упростить модель, рассматривая каждую группу требований как одну "длинную" заявку, поступившую на обслуживание. Предполагается, что интервалы между поступлениями групп требований, а также длительности обслуживания отдельных требований в группе подчинены показательному закону распределения.

§ 3. Система уравнений равновесия

Одна из наиболее важных характеристик рассматриваемой СМО — количество занятых мест в накопителе. Однако, случайный процесс числа занятых в очереди мест $\{n(t)\}_{t\geq 0}$ в общем случае не будет процессом Маркова, так как распределение длительностей обслуживания групп (складывающееся из длительностей обслуживания отдельных требований в группе) является сверткой показательных распределений и значит, не обладает свойством "отсутствия памяти". Для того чтобы иметь возможность применить аппарат процессов Маркова, рассмотрим случайный вектор состояния $N(t) = (n_1(t), \dots, n_m(t))$, где m — объем накопителя, а $n_i(t)$ $(i = 1 \dots m)$ — число требований, нуждающихся в обслуживании, размещенных в i-ой позиции накопителя в момент времени t.

Так как в силу сделанных предположений длительности обслуживания отдельных требований распределены по показательному закону, случайный процесс $\zeta = \{N(t)\}_{t \geq 0}$ является марковским процессом со счетным числом состояний, определенных на пространстве $Q = \mathbb{N} \underbrace{\times \dots \times}_{m} \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

Определим функцию вероятности нахождения системы в состоянии $k_1, \dots, k_m$ в момент времени t как $p(t, k_1, \dots, k_m) = P\{n_1(t) = k_1, \dots, n_m(t) = k_m\}$. Марковский процесс ζ имеет счетное число состояний, которые являются взаимо сообщающимися. Построим, согласно [6], систему уравнений Эрланга (или систему уравнений равновесия — СУР) для стационарных вероятностей

$$p_{k_1,\dots,k_m} = \lim_{t \to \infty} p(t, k_1, \dots, k_m)$$

процесса ζ.

Пусть число заявок в группе — случайная величина ξ, имеющая распределение $P\{\xi = i\} = \varphi_i$ $i = 1, 2 \dots$. Очевидно, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi_i = 1$. Будем считать, что $E(\xi) < \infty$.

Введем необходимые обозначения: $I = \{1 \dots m\}$ — множество номеров всех позиций накопителя, $J_K = \{i \in I : k_i \neq 0\}$ — множество номеров занятых позиций накопителя в состоянии $K = \{k_1, \dots, k_m\}$, а также функцию $B(k_1, \dots, k_m)$, значение которой равно числу занятых позиций накопителя в состоянии K.

В состояние $(k_1, \dots, k_i, \dots, k_m)$ можно перейти либо из состояний $(k_1, \dots, k_{i-1}, 0, k_{i+1}, \dots, k_m)$ $\forall i \in J_K$ после прибытия новой группы требований в i-ю позицию накопителя, либо из состояний $(k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_m)$ $\forall i \in I$ после завершения обслуживания отдельного требования, третья возможность — находясь в состоянии $(k_1, \dots, k_m)$, остаться в нем.

Система уравнений равновесия будет содержать три группы уравнений:

для нулевого состояния

$$-\lambda p_{0\dots 0} + \mu \sum_{i=1}^{m} p_{0\dots 1_i \dots 0} = 0, \tag{1}$$

где $p_{0\dots 1_i \dots 0}$ состояние в котором i-я позиция накопителя содержит одно требование, а остальные свободны.

Для случая $0 < B(k_1, \dots, k_m) < m$

$$\sum_{i \in J_K} \lambda \varphi_{k_i} \frac{p_{k_1,\dots,k_{i-1},0,k_{i+1},\dots,k_m}}{m - B(k_1, \dots, k_{i-1}, 0, k_{i+1}, \dots, k_m)} - (\lambda + \mu) p_{k_1,\dots,k_m} + \\ + \sum_{i \in I} \mu \frac{p_{k_1,\dots,k_i+1,\dots,k_m}}{B(k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_m)} = 0 \tag{2}$$

и

$$\sum_{i \in J_K} \lambda \varphi_{k_i} \frac{p_{k_1,\dots,k_{i-1},0,k_{i+1},\dots,k_m}}{m - B(k_1, \dots, k_{i-1}, 0, k_{i+1}, \dots, k_m)} - \mu p_{k_1,\dots,k_m} + \\ + \sum_{i \in I} \mu \frac{p_{k_1,\dots,k_i+1,\dots,k_m}}{B(k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_m)} = 0 \tag{3}$$

если $B(k_1, \dots, k_m) = m$.

Заметим, что множитель $\dfrac{1}{m - B(k_1, \dots, k_{i-1}, 0, k_{i+1}, \dots, k_m)}$ отражает тот факт, что вновь поступившее требование имеет равный доступ ко всем позициям, свободным к моменту его поступления.

К системе уравнений (1)—(3) добавляется условие нормировки:

$$\sum_{Q} p_{k_1,\dots,k_m} = 1 \tag{4}$$

§ 4. Решение системы уравнений равновесия

Теорема 1. *Решение системы (1)—(3) имеет вид*

$$p_{k_1,\dots,k_m} = p_0 \frac{n!(m-n)!}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \prod_{j \in J_K} F_{k_j}, \tag{5}$$

где $F_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \varphi_i$, $p_0 \equiv p_{0\dots0}$ *— состояние, в котором накопитель не содержит ни одного требования, а* $n = B(k_1, \dots, k_m)$

Доказательство. Покажем, что выражения (5) обращают систему (1)—(3) в тождество.

Перепишем систему (1)—(3) в более удобном для доказательства виде, одновременно подставив в нее вероятности (5).

Начнем рассмотрение со случая $0 < n < m$.

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{m-n+1} \left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \tfrac{(n-1)!(m-n+1)!}{m!} \sum_{i \in J_K} \lambda \varphi_{k_i} \prod_{j \in J_K \setminus i} F_{k_j} - \\
-(\lambda+\mu) \left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \tfrac{(n)!(m-n)!}{m!} \prod_{j \in J_K} F_{k_j} + \\
\tfrac{\mu}{n+1} \left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} \tfrac{(n+1)!(m-n-1)!}{m!} \sum_{i \in I \setminus J_K} \prod_{j \in J \cup i} F_{k_j} + \\
+\tfrac{\mu}{n} \left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \tfrac{(n)!(m-n)!}{m!} \sum_{i \in J_K} F_{k_i+1} \prod_{j \in J_K \setminus i} F_{k_j} = 0
\end{gathered} \tag{6}$$

Следует отметить, что в выражении (6) отражены две различные ситуации, которые могут складываться в системе после уходаиз нее требования. Первая — завершение обслуживания последнего требования в группе после ухода которого освобождается позиция накопителя, вторая — уход требования после которого число занятых позиций накопителя остается неизменным.

Заметим, что $F_1 = 1$, поэтому если в векторе состояния значения нулевых координат положить равными единице, множитель $\prod\limits_{J_K} F_{k_j}$ не изменится. Заметим также, что мощность множества $\mid I \setminus J \mid = m - n$. Учитывая сказанное, мы можем привести подобные члены уравнения, разделив его тем самым на две части:

$$\frac{\lambda^n}{\mu^{n-1}}\left(\frac{(n-1)!(m-n)!}{m!}\sum_{i\in J_K}\varphi_{k_i}\prod_{j\in J_K\setminus i}F_{k_j}-\frac{(n)!(m-n)!}{m!}\prod_{j\in J_K}F_{k_j}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-1)!(m-n)!}{m!}\sum_{i\in J_K}F_{k_i+1}\prod_{j\in J_K\setminus i}F_{k_j}\right)+$$
$$\frac{\lambda^{n+1}}{\mu^n}\prod_{J_K}F_{k_j}\left(\frac{m-n}{n+1}\frac{(n+1)!(m-n-1)!}{m!}-\frac{n!(m-n)!}{m!}\right)\equiv 0, \tag{7}$$

так как $F_{k+1}+\varphi_k=F_k$.

В случае $n=0$, очевидно, что $p_{0,\ldots,1,\ldots,0}=p_0\frac{\lambda}{m\mu}$ удовлетворяет уравнению (6). В случае же $m=n$ прибытие новых групп требований в систему невозможно, поэтому последенее слагаемое в левой части (7) будет равно нулю и, следовательно, вероятности (5) будут удовлетворять уравнению (3). □

Следствие 1 *Распределение стационарной длины очереди $\{p_n\}$ в рассмотренной СМО определяется как*

$$p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}E(\xi)\right)^n p_0,\ n=1,\ldots,m \tag{8}$$

Доказательство. Вероятность p_n может быть представлена с помощью вероятностей (5) как

$$p_n=p_0\sum_{K\in Q:B(k_1,\ldots,k_m)=n}p_{k_1,\ldots,k_m}, \tag{9}$$

следовательно

$$p_n=p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\sum_{|J_K|=n}\frac{n!(m-n)!}{m!}\prod_{J_K}F_{k_j} \tag{10}$$

Теперь заметим, что значения вероятностей $p_{k_1,\ldots,k_m}$ в результате перестановок элементов k_i изменяться не будут. Поэтому, упорядочим элементы вектора по возрастанию: $k_i\le k_{i+1}$. После упорядочения, первые $m-n$ элементов вектора будут равны нулю. Обозначим s_1 — количество первых одинаковых ненулевых элементов вектора K, s_2 —

число следующих одинаковых ненулевых элементов и т. д. Очевидно, что s_i могут принимать значения $0\,ldots, n$, общее число элементов s_i зависит от вектора , но не может превышать n и $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i = n$ (если k — число групп равных элементов вектора K меньше n, то положим $s_i = 0$ $i = k \ldots n$). Обозначим b_i величину элементов группы s_i. Тогда, сложив одинаковые произведения, получим:

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \sum_{s_1+\ldots+s_n=n} \frac{n!(m-n)!}{m!} \cdot \frac{m!}{s_1!\ldots s_n!(m-n)!} F_{b_1}^{s_1} \ldots F_{b_n}^{s_n}. \tag{11}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} p_n = p_0 \left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \sum_{s_1+\ldots+s_n=n} \tfrac{n!}{s_1!\ldots s_n!} F_{b_1}^{s_1} \ldots F_{b_n}^{s_n} = \\ = p_0 \left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} F_j\right)^n = \\ = p_0 \left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} j\varphi_j\right)^n = p_0 \left(\tfrac{\lambda}{\mu} E(\xi)\right)^n \end{aligned} \tag{12}$$

□

§ 5. Заключение

Распределение $\{p_n\}$, позволяет вычислить некоторые из характеристик рассматриваемой СМО, важные для приложений. Вероятность простоя прибора определяется из условия нормировки как

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu} E(\xi)\right)^n}.$$

Вероятность потерь группы требований

$$p_m = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} E(\xi)\right)^m}{\sum\limits_{n=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu} E(\xi)\right)^n}.$$

Заметим также, что величина $\frac{E(\xi)}{\mu}$ является математическим ожиданием длительности обслуживания группы и, следовательно, полученное распределение сответствует распределению для системы $M|G|1|\infty$, приведенному в [7].

Автор выражает глубокую признательность профессору В. В. Калашникову и доценту Е. В. Морозову за полезное обсуждение, а также доценту Б. М. Широкову за помощь в подготовке этой статьи.

Resume

In this paper a queue with one service device, requirements loss, bulk arrival and processor sharing discipline is considered. We have constructed discontinuous marcovian process to describe behavior of analyzed queue using Erlangian phase method. The theorem has been proved about form of analitical solution of equilibrium equations and stable distribution of queue length has been obtained on that base.

Список литературы

[1] О.Ю.Богоявленская. *Система массового обслуживания групп требований с дисциплиной «разделение процессора»*.(в печати)

[2] L.Kleinrock. *Queueing Systems*. John Wiley & Sons, New-York. 1974

[3] А.А.Шахбазов, Э.Г.Самандаров. *Об обслуживании неординарного потока* Кибернетику на службу коммунизму. Т.2. М.: Энергия. 1964.

[4] Б.В.Гнеденко, И.Н.Коваленко.*Введение в теорию массового обслуживания* М.: Наука. 1987.

[5] Tan Xiaoming, Knessl Charles.*Sojourn Time Distribution in Some Processor Shared Queues*// Eur. J. Appl. Math. 1993. 4. No4. P. 437–448.

[6] Г.П.Башарин, П.П.Бочаров, Я.А.Коган.*Анализ очередей в вычислительных сетях*. Теория и методы расчета, М.: Наука. 1989.

[7] С.Ф.Яшков. *Анализ очередей в ЭВМ* М.: Радио и связь. 1989.

Поступила в марте 1996 года.