Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 3, 1996

УДК 519

ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

В. Б. Ефлов

В работе рассмотрены некоторые математические теоремы позволяющие упростить анализ задач распространения акустических пучков в векторном представлении для сред характеристики которых удовлетворяют некотором достаточно слабым ограничениям.

Ранее при анализе задач теории переноса было показано (см. например [1]), как исходя из соображений инвариантности индикатрисс рассеяния относительно вращений, можно получить теорему взаимности для функции Грина скалярного уравнения переноса. Для уравнения переноса в оптически-неоднородной среде теорема была доказана в [2]. Частичное доказательство, приводимой ниже теоремы, в более ограниченной форме, присутствовало в работе [3], где было рассмотрено векторное уравнение переноса для поляризованного излучения.

Как будет показано ниже аналогичную теорему можно доказать и для многомерного векторного уравнения переноса для вектор-параметра, описывающего акустическое поле.

Далее для доказательства теоремы мы рассмотрим стационарное уравнение переноса, так как нестационарный случай легко сводится к стационарному (см. например [1, 3]).

Перейдем к доказательству теоремы взаимности.

Рассмотрим единственное решение уравнения переноса для вектор-параметра $\vec{V}^{(1)} \equiv (V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, V_3^{(1)}, V_4^{(1)}, V_5^{(1)}, V_6^{(1)})$, сохраняя далее индексную форму для векторного представления компонент полей $V_j^{(1)}$ и компонент функции источников $Q_j^{(1)}$, которые предполагаются фиксированными. Индексы изменяются в интервале $1 \leq j \leq 6$, в соответствии с размерностью вектор-параметра и соответственно функций в уравнении для переноса акустического поля. Далее, где это не будет вызывать разночтений, будем говорить об уравнении переноса, подразумевая систему уравнений для отдельных компонент вектор-параметра.

Запишем уравнение переноса для данного $V_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n})$ единственного решения при соответствующих граничных условиях:

$$\vec{n}\,\nabla_{\vec{r}}V_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) + \epsilon_{ij}V_j^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) =$$

$$\frac{\sigma}{4\pi}\int d_{\vec{n}'}\Omega D_{ij}(\theta)V_j^{(1)}(\vec{r},\vec{n}') + Q_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}), \tag{1}$$

$$V_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) = V_{i,bound}^{(1)}, \quad \vec{n}\vec{z}_0 < 0$$

где $\vec{z}_0$ вектор нормали к поверхности на которой заданы граничные условия. Рассмотрим также другое единственное решение $\tilde{V}_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n})$ для уравнение переноса полученного из исходного заменой переменных:

$$\vec{n} \to -\vec{n}, \quad \vec{n}' \to -\vec{n}', \quad D_{ij}(\theta) \to D_{ij}(-\theta)$$

$$\vec{n}\,\nabla_{\vec{r}}\tilde{V}_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) + \epsilon_{ij}\tilde{V}_j^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) =$$

$$\frac{\sigma}{4\pi}\int d_{\vec{n}'}\Omega D_{ij}(-\theta)\tilde{V}_j^{(1)}(\vec{r},\vec{n}') + Q_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}), \tag{2}$$

при заданных граничных условиях

$$\tilde{V}_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) = V_{i,bound}^{(1)}, \quad \vec{n}\vec{z}_0 < 0.$$

Потребуем, чтобы фазовая матрица $D_{ij}(\theta)$ была инвариантна относительно обращения времени

$$D_{ij}(\theta) = D_{ij}(-\theta). \tag{3}$$

Пусть теперь $V_i^{(2)}(\vec{r},\vec{n})$ другое единственное решение уравнения переноса с другой функцией источников и другими граничными условиями:

$$-\vec{n}\,\nabla_{\vec{r}}V_i^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}) + \epsilon_{ij}V_j^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}) =$$

$$\frac{\sigma}{4\pi}\int d_{\vec{n}'}\Omega D_{ij}(-\theta)V_j^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}') + Q_i^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}), \tag{4}$$

$$V_i^{(2)}(\vec{r},\vec{n}) = V_{i,bound}^{(2)}, \quad \vec{n}\vec{z}_0 > 0.$$

Определим $\tilde{V}_i^{(2)}(\vec{r},\vec{n})$ аналогично $\tilde{V}_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n})$ и рассмотрим уравнение которому эта функция удовлетворяет:

$$-\vec{n}\,\nabla_{\vec{r}}\tilde{V}_i^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}) + \epsilon_{ij}\tilde{V}_j^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}) =$$

$$\frac{\sigma}{4\pi}\int d_{\vec{n}'}\Omega D_{ij}(\theta)\tilde{V}_j^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}') + Q_i^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}), \tag{5}$$

при заданных граничных условиях

$$\tilde{V}_i^{(2)}(\vec{r},\vec{n}) = V_{i,bound}^{(2)}, \quad \vec{n}\vec{z}_0 > 0$$

Умножим каждое из уравнений (1) на $\tilde{V}_i^{(2)}(\vec{r},\vec{n})$, а уравнения (5), полученное заменой переменных, на $V_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n})$ и вычтем произведения одно из другого при соответствующих индексах. Полученные равенства проинтегрируем по всем телесным углам и по всему пространству. Получим следующую систему выражений:

$$\int dS \int\limits_{\Omega} d\Omega_{\vec{n}'}\vec{n}\vec{z}_0\,\tilde{V}_i^{(2)}(\vec{r},-\vec{n})V_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) = \int\limits_{A} d^3r \iint\limits_{\Omega} d\Omega_{\vec{n}'}d\Omega_{\vec{n}} \times$$

$$\times\left\{\tilde{V}_i^{(2)}(\vec{r},-\vec{n})D_{ij}(\theta)V_j^{(1)}(\vec{r},\vec{n}') - V_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n})D_{ij}(\theta)\tilde{V}_j^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}')\right\} +$$

$$+\int\limits_{A} d^3r \int\limits_{\Omega} d\Omega_{\vec{n}'} \times$$

$$\times\left\{\tilde{V}_i^{(2)}(\vec{r},-\vec{n})Q_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) - V_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n})Q_i^{(2)}(\vec{r},-\vec{n})\right\} \tag{6}$$

Если матрица $D_{ij}(\theta)$ нормальна, то есть:

$$\hat{D}(\theta)\hat{D}^{\dagger}(\theta) = \hat{D}^{\dagger}(\theta)\hat{D}(\theta) \tag{7}$$

где $\hat{D}^{\dagger}$ – эрмитово сопряженная матрица, и обе матрицы $\hat{D}^{\dagger}$ $\hat{D}$ инвариантны относительно обращения времени. В левой части интеграл преобразован от объемного интеграла к поверхностному с использованием теоремы Гаусса. Очевидно, что в диагональном представлении $\hat{D}$, которое существует в силу нормальности матрицы и исходя из граничных условий первый интеграл в (6) равен нулю в диагональном представлении и следовательно в любом другом представлении получаемом из данного линейным преобразованием с единичным детерминантом матрицы преобразования.

В силу этого для вектор-параметра – решения векторного уравнения переноса можно записать следующее интегральное тождество:

$$\int_A d^3r \iint_\Omega d\Omega_{\vec{n}'} d\Omega_{\vec{n}} \times$$

$$\times \left\{ \tilde{V}_i^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}) D_{ij}(\theta) V_j^{(1)}(\vec{r},\vec{n}') - V_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) D_{ij}(\theta) \tilde{V}_j^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}') \right\} =$$

$$= \int_A d^3r \int_\Omega d\Omega_{\vec{n}'} \left\{ V_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) Q_i^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}) - \tilde{V}_i^{(2)}(\vec{r},-\vec{n}) Q_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) \right\} \quad (8)$$

Рассмотрим это тождество при следующих функциях источников:

$$Q_i^{(1)}(\vec{r},\vec{n}) = \delta(\vec{r}-\vec{r_1})\delta(\vec{n}\cdot\vec{n}_1)$$

$$Q_i^{(2)}(\vec{r},\vec{n}) = \delta(\vec{r}-\vec{r_2})\delta(\vec{n}\cdot\vec{n}_2) \quad (9)$$

Решения уравнения переноса для вектор-параметра при данном виде функций источников и определенных выше граничных условиях назовем функциями Грина соответствующих уравнений. Проинтегрируем (8) для функций источников (9). В результате получим следующее тожество:

$$\vec{G}(\vec{r}_2,\vec{n}_2;\vec{r}_1,-\vec{n}_1) = \vec{G}(\vec{r}_1,\vec{n}_1;\vec{r}_2,-\vec{n}_2) \quad (10)$$

которое и является формальным выражением теоремы взаимности для векторного уравнения переноса при фазовой матрице $\hat{D}$ удовлетворяющей условию нормальности (7). Функции $\vec{G}(\vec{r}_2,\vec{n}_2;\vec{r}_1,-\vec{n}_1)$ и $\vec{G}(\vec{r}_1,\vec{n}_1;\vec{r}_2,-\vec{n}_2)$ – соответствующие источникам (9) решения – функции Грина векторного уравнения переноса для акустического поля, первая пара аргументов соответствует точке наблюдения, вторая – точке в которой расположен источник (9) свой для каждой из функций Грина.

Физическая интерпретация теоремы взаимности может быть следующей – если источник поместить в точку приема и наоборот, и изменить направление источника излучения, испускаемого источником, на противоположное, то акустическое поле, находящееся в том же состоянии, в котором находилось поле источника (соответственно поле рассматриваемое в точке приема) и первоначально распространяющееся из точки $\vec{r_1}$ в направлении $-\vec{n_1}$ и определяемое в точке $\vec{r_2}$, принимающееся по направлению $\vec{n_2}$ совпадает с полем распространяющимся из точки $\vec{r_2}$ в направлении $-\vec{n_1}$ и определяемое в точке $\vec{r_1}$ в направлении $\vec{n_1}$.

Для сред с матрицей рассеяния фазовая матрица которых не удовлетворяет условию нормальности (7), принцип взаимности (его формальная запись) имеет интегральный вид и не допускает наглядной интерпретации.

Как отмечается в работах по экспериментальному измерению матриц рассеяния и следует из расчетов матриц рассеяния (компонент рассеянного поля) на изолированных включениях, в большинстве реалистичных сред матрицы рассеяния мало отличаются от нормальных. В этом случае для матрицы рассеяния можно предложить следующую модификацию теоремы взаимности. Представим матрицу рассеяния $\hat{S}$ в следующей форме:

$$\hat{S}(\theta) = \hat{S}_n(\theta) + \hat{S}_{an}(\theta) \tag{11}$$

где $\hat{S}_n$ – нормальная матрица, а матрица $\hat{S}_{an}$ определяется из некоторых минимальных критериев (минимальна по некоторой норме [1]).

В этом случае теорема взаимности может быть записана в следующей форме:

$$\vec{G}(\vec{r}_2,\vec{n}_2;\vec{r}_1,-\vec{n}_1) - \vec{G}(\vec{r}_1,\vec{n}_1;\vec{r}_2,-\vec{n}_2) =$$

$$= \int\limits_A d^3r \int\limits_\Omega d\Omega_{\vec{n}'} \times$$

$$\times\vec{G}(\vec{r}_2,\vec{n}_2;\vec{r}_1,-\vec{n}_1)\cdot \hat{D_{an}} \cdot \vec{G}(\vec{r}_1,\vec{n}_1;\vec{r}_2,-\vec{n}_2) -$$

$$\vec{G}(\vec{r}_1,\vec{n}_1;\vec{r}_2,-\vec{n}_2)\cdot \hat{D_{an}} \cdot \vec{G}(\vec{r}_2,\vec{n}_2;\vec{r}_1,-\vec{n}_1) \tag{12}$$

где $\hat{D_{an}}$ – фазовая матрица соответствующая матрице рассеяния $\hat{S_{an}}$.

[1]например компоненты матриц в равенстве выбираются так чтобы была минимальна квадратичная норма матрицы $\hat{S}_a n$, то есть $\sum_{i,j} S^2_{an,ij} = \min$

Данный вид теоремы взаимности удобен для конкретных расчетов с матрицами рассеяния близкими к нормальным.

Рассмотрим далее простое соотношение подобия, связывающее решения уравнения переноса для вектор-параметра при различных характеристиках среды.

Пусть матрица экстинкции диагональна, тогда исходя из соображений размерности и используя явный вид уравнения переноса, можно показать, что решения (функции Грина) векторного уравнения переноса для различных ϵ и σ удовлетворяют следующему соотношению подобия:

$$G_i(\vec{r}_1, \vec{n}, t_1, \alpha_1, \sigma_1) =$$

$$\left(\frac{\sigma_1^3}{\sigma_2^3}\right) \exp(\alpha_2 v t_2 - \alpha_1 v t_1) G_i(\vec{r}_2, \vec{n}, t_2, \alpha_2, \sigma_2), \tag{13}$$

где $\alpha_1 = \epsilon_1 - \sigma_1$, $\alpha_1 = \epsilon_1 - \sigma_1$, $\vec{r}_1 = \vec{r}_2(\sigma_2/\sigma_1)$, $t_1 = t_2(\sigma_2/\sigma_1)$.

Аналогичные соотношения подобия для решений скалярного уравнения переноса приведено в работе [4], а для векторного уравнения переноса излучения в [3]. Практическое значение полученных соотношений подобия состоит в возможности расчета лишь одного решения при некоторых фиксированных значениях ϵ и σ, и в дальнейшем пересчете значения при других значениях коэффициентов, характеризующих среду.

Resume

This paper is focused on the scattering matrix properties to to simplify the analysis of acoustic beams propagation. We prove reciprocal theorem for the vector transfer equation to calculate dual Green's function.

Литература

[1] Кейз К., Цвайфель П. *Линейная теория переноса*. М.: Мир, 1972. 384с.

[2] Ефлов В. Б. *Перенос узких поляризованных пучков света в средах с анизотропным рассеянием*/ Автореф. дисс. на соис. ... степени к.ф.-м.н. М.:МГУ, 1987. 14с.

[3] Ефлов В. Б. *Аналитические методы решения задач векторной теории переноса.*/ Петрозаводский гос. ун-т., Петрозаводск, 1994. 39с., библиогр. 14 назв., рис.4 Деп. в ВИНИТИ 20.09 1994г.,N 2220–B94

[4] Гольдин Ю. А., Пелевин В. Н., Шифрин К. С. *Световое поле от импульсного источника в морской воде*// Оптика океана и атмосферы. М.: Наука, 1981. с.56–95.