**Труды Петрозаводского государственного университета**
Серия "Математика" Выпуск 3, 1996

УДК 517.54

# О ФУНКЦИЯХ БЛОХА И ОДНОЛИСТНОСТИ ИНТЕГРАЛОВ ОТ $(F')^\lambda$

Я.Годуля и В.В.Старков

В этой заметке мы оцениваем постоянную $C_\alpha$, связанную с классом Блоха $\mathcal{B}$ и универсальным линейно-инвариантным семейством $U_\alpha$. Мы оцениваем также радиус наибольшего круга такого, что для каждого его элемента $\lambda$ интеграл от $(h')^\lambda$ — однолистная функция для всех $h \in U_\alpha$.

## Ведение. Формулировка задач.

Класс регулярных в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$,удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \sup_{z\in\Delta}(1 - |z|^2)|f'(z)| < \infty,$$

называется классом Блоха и обозначается $\mathcal{B}$. Для $M \geq 0$ обозначим

$$\mathcal{B}_M = \{f : f \in \mathcal{B}, \|f\|_{\mathcal{B}} \leq M\}.$$

$S$, как обычно, обозначает класс регулярных и однолистных в $\Delta$ функций $f(z) = z + \dots$. В [1] дано понятие линейно-инвариантного семейства функций, как множества M регулярных и локально однолистных в $\Delta$ функций $f(z) = z + \dots$, удовлетворяющих условию:

для любого конформного автоморфизма

$$\phi_a(z) = e^{i\theta}\frac{a + z}{1 + \bar{a}z}$$

Эта статья представляет собой перевод опубликованной в "Proc. of. Nevanlinna Coll.,Joensuu(1995)"

($a \in \Delta, \theta \in \mathrm{R}$ круга $\Delta$ и любой функции $h \in \mathrm{M}$ семейству M принадлежит также функция

$$F_\phi(z) = \frac{h(\phi(z)) - h(\phi(0))}{h'(\phi(0))\phi'(0)} = z + \ldots.$$

При этом число

$$\operatorname{ord} h = \sup \frac{|F''_\phi(0)|}{2}$$

(супремум берется по всем конформным автоморфизмам $\phi$ круга $\Delta$) называется порядком функции $h$. Существует много примеров линейно-инвариантных семейств (см.[1]), в частности, $S$ – линейно-инвариантное семейство порядка 2.

Универсальное линейно-инвариантное семейство $\mathcal{U}_\alpha$ состоит из всех регулярных и локально однолистных в $\Delta$ функций $h(z) = z + \ldots$, для которых $\operatorname{ord} h \leq \alpha$. Ch.Pommerence показал в [1], что $\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$ при $\alpha < 1$, $\mathcal{U}_1$ – известный класс выпуклых в $\Delta$ функций, $S \subset \mathcal{U}_2$.

В [2] Ch.Pommerenke показал, что для любой $f \in \mathcal{B}$ существуют $c \in \mathbb{C}$ и $g \in S$ такие, что

$$f(z) - f(0) = c \log g'(z). \tag{1}$$

Задача 1. В [3] поставлена задача (см. задачу 1) нахождения наилучшего значения констант $c$ для функций Блоха в (1).

Для комплексных $\lambda$ определим оператор

$$H_\lambda[h](z) = \int_0^z (h'(\zeta))^\lambda d\zeta, \quad h \in \mathcal{U}_\alpha. \tag{2}$$

Пусть

$$\Lambda_\alpha = \{\lambda \in \mathrm{C} : H_\lambda[h] \in S \text{ для всех } \ h \in \mathcal{U}_\alpha\},$$

$\lambda_\alpha$ – радиус наибольшего круга с центром в 0, который содержится в $\Lambda_\alpha$. J.Pfaltzgraff [4] показал, что $\lambda_\alpha \geq \frac{1}{2\alpha}$. Отсюда, в частности, при $\alpha = 2$ получаем однолистность интегралов (2) для всех $h \in S$ при $|\lambda| \leq \frac{1}{4}$.

Задача 2. Описать множество $\Lambda_\alpha$; найти или оценить $\lambda_\alpha$.

W.C.Royster [5] привел пример функций

$$F_\nu(z) = \exp[\nu \log(1-z)], \tag{3}$$

которые однолистны в $\Delta$ только при выполнении условия

$$|\nu+1|\le 1 \qquad \text{или} \qquad |\nu-1|\le 1, \qquad \nu\ne 0 \qquad\qquad (4).$$

Он показал, что для $|\lambda|>\frac{1}{3}, \lambda\ne 1$, существует $\nu$, удовлетвлряющее (4), для которого $H_\lambda[F_\nu]$ не однолистна в $\Delta$. Таким образом, даже для функций $h\in S$ вопрос об однолистности интеграла (2) остается открытым в кольце $\frac{1}{4}<\lambda\le\frac{1}{3}$.

## Обсуждение задач.

Для фиксированной функции $f\in\mathcal{B}$

$$\sup\{|c| : f(z)-f(0)=c\log g'(z), g\in S\}=\infty,$$

т.к. для $g\in S$

$$c\log g'(z)=\lambda c\log(g'(z))^{\frac{1}{\lambda}}=\lambda c\log G'(z);$$

причем, как следует из ранее цитированного результата J.Pfaltzgraff'a [4], $G\in S$ при $\lambda\ge 4$. Поэтому имеет смысл говорить только об оценке констант

$$c_f=\min\{|c| : f(z)-f(0)=c\log g'(z), g\in S\}, \quad f\in\mathcal{B}$$

.

Пример функции $\tilde f(z)\equiv 0\in\mathcal{B}$ и функции $g(z)=z\in S$ показывает, что $c_{\tilde f}=0$, следовательно $\inf_{f\in\mathcal{B}} c_f=\inf_{f\in\mathcal{B}_M} c_f=0$. Поэтому имеет смысл оценивать $\sup_{f\in\mathcal{B}} c_f$. Но $\sup_{f\in\mathcal{B}} c_f=\infty$, т.к. если $f\in\mathcal{B}$ и $c_f\ne 0$ (такие функции в $\mathcal{B}$ есть), то для любого $k\in\mathbb{C}$ функция $kf(z)\in\mathcal{B}$ и $c_{kf}=kc_f$, впрочем, $\sup_{f\in\mathcal{B}} c_f=\infty$ следует сразу из ниже приведенного неравенства (6). Поэтому естественно оценивать $C(M)=\sup_{f\in\mathcal{B}_M} c_f$. Очевидно, $C(M)=MC(1)$. Из критерия однолистности J.Becker'a [6] и установленной J.Becker'ом и Ch.Pommerenke [7] точности константы 1 в этом критерии легко получить: $C(1)=1$.

Задача 1 естественным образом модифицируется в свете следующей простой связи между классом $\mathcal{B}$ и семействами $\mathcal{U}_\alpha$, установленной в [8], [9]:

$f\in\mathcal{B}\Longleftrightarrow \quad \exists\, h\in\cup_{\alpha<\infty}\mathcal{U}_\alpha : f(z)-f(0)=\log h'(z),$

Причем, если в последнем равенстве $h \in \mathcal{U}_\alpha$, то

$$2(\alpha-1) \le \|f(z)-f(0)\|_{\mathcal{B}} \le 2(\alpha+1). \tag{5}$$

Задача 1$'$.[10] Найти

$$C_\alpha = \max\{c_f : f(z)-f(0) = \log h'(z), h \in \mathcal{U}_\alpha\}.$$

В [10] получена следующая оценка $C_\alpha$:

$$2\alpha \ge C_\alpha \ge \begin{cases} \alpha-1, & \text{если} \quad \alpha \in [1,2] \\ \frac{\alpha+1}{3}, & \text{если} \quad \alpha \in [2,\infty). \end{cases} \tag{6}$$

В [11] Л.А.Аксентьев и И.Р.Нежметдинов полностью описали множество $\Lambda_1$, доказав, что

$$\Lambda_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \frac{1}{2}\} \cup \{\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}\lambda \le \frac{3}{2},\ \mathrm{Im}\lambda = 0\}.$$

таким образом, при $\alpha = 1$ задача 2 решена, в частности $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Интерес к задаче 1$'$ вызван не только ее связью с задачей 1, но и с задачей 2. Действительно, если $h \in \mathcal{U}_\alpha$, то существуют $f \in \mathcal{B}$ и $\gamma \in S$ такие, что

$$\log h'(z) = f(z) - f(0) = c \log g'(z).$$

для некоторого $c \in \mathbb{C}$. Следовательно

$$(h'(z))^{\frac{1}{c}} = g'(z);$$

Если при этом $h(z)$ фиксирована и $f(z)$ связана с $h(z)$ указанным выше способом, то

$$\frac{1}{c_f} = \sup\{|\lambda| : H_\lambda[h] \in S\}.$$

Если $|\lambda| > \frac{1}{C_\alpha}$, то существует $h_0 \in \mathcal{U}_\alpha$ и $f_0 = \log h_0'$ такая, что $|\lambda| > \frac{1}{c_{f_0}}$. Следовательно, $H_\lambda[h_0] \notin S$, поэтому

$$\lambda_\alpha \le \frac{1}{C_\alpha}. \tag{7}$$

Кроме того, из выше сказанного следует, что множество $\Lambda_\alpha$ содержится в круге $\{\lambda : |\lambda| \le \frac{1}{C_\alpha}\}$. Заметим, что для $h \in \mathcal{U}_\alpha$ и $\mu \in [0,1]$

интеграл $H_\mu[h] \in \mathcal{U}_\alpha$ (см.[1]). Следовательно, множество $\Lambda_\alpha$ звездообразно относительно 0.

Нельзя надеяться на то, что $\lambda_\alpha = \frac{1}{C_\alpha}$. По крайней мере в случае $\alpha = 1$ из приведенного приведенного выше результата из [11] следует, что $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{c_f} \geq \frac{3}{2}$ для всех $h \in \mathcal{U}_1$, $\log h' = f$; поэтому $C_1 \leq \frac{2}{3}$. Но пример функции $\xi(z) = \frac{z}{1-z} \in \mathcal{U}_1$, $\log \xi' = \phi$ показывает (см. [11, теорема 4]), что $c_\phi = \frac{2}{3}$, следовательно $C_1 = \frac{2}{3}$.

На пути оценки констант $C_\alpha$ и $\lambda_\alpha$ нами получена

Theorem 1. *Для всех $\alpha \geq 1$*

$$1)\ 2\alpha \geq C_\alpha \geq \begin{cases} \frac{\alpha+1}{3}, & \textit{если} \quad \alpha \leq \frac{7}{5} \\ 2(\alpha-1), & \textit{если} \quad \alpha \geq \frac{7}{5}. \end{cases}$$

$$2)\ \frac{1}{2\alpha} \leq \lambda_\alpha \leq \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}, & \textit{если} \quad 1 < \alpha < 3 \\ \frac{1}{C_\alpha} \leq \frac{1}{2(\alpha-1)}, & \textit{если} \quad \alpha \geq 3. \end{cases}$$

Доказательство. $1^0$. Оценка $C_\alpha \leq 2\alpha$ получена нами в [10], но здесь мы доказываем это непосредственно, основываясь на критерии однолистности L.V.Ahlfors'а [12].

Пусть $h \in \mathcal{U}_\alpha$, $\log h' = f \in \mathcal{B}$; покажем,что $c_f \leq 2\alpha$. Если $c_f > 0$, то обозначим $\tilde{c} = c_f - \varepsilon > 0$, $\varepsilon > 0$, достаточно мало. Из определения $c_f$ следует, что

$$G(z) = \int_0^z (h'(\zeta))^{\frac{1}{\tilde{c}}}\, d\zeta \notin S.$$

Ch.Pommerenke [1] показал, что для $h \in \mathcal{U}_\alpha$

$$\left|\frac{1-|z|^2}{2}\frac{h''(z)}{h'(z)} - \bar{z}\right| \leq \alpha \qquad \forall z \in \Delta$$

. Следовательно,

$$\left|\frac{1-|z|^2}{2}\frac{zG''(z)}{G'(z)} - \frac{z}{\tilde{c}}|z|^2\right| \leq \frac{2\alpha}{\tilde{c}}|z|.$$

Из критерия однолистности L.V.Ahlfors'а [12] следует, что $\frac{2\alpha}{\tilde{c}} > 1$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $c_f \leq 2\alpha$ и $C_\alpha \leq 2\alpha$.

Покажем, что $2(\alpha - 1) \leq C_\alpha$. Поскольку $C(1) = 1$, то $c_f \leq 1$ для любой $f \in \mathcal{B}_\infty$ и существует $f_0 \in \mathcal{B}_\infty$ такая, что $f_0(0) = 0$ and $c_{f_0} = 1$. Для $k \geq 0$ обозначим $kf_0(z) = \log h'_k(z)$, $h'_k \in \bigcup_{\alpha<\infty} \mathcal{U}_\alpha$; $\psi(k) = \operatorname{ord} h_k$.

Покажем. что $\psi(k)$ непрерывна. Действительно, если непрерывность $\psi(k)$ нарушается в $k_0 \geq 0$, то существуют 2 последовательности положительных чисел: $k_n \to k_0$, $k'_n \to k_0$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \psi(k_n) = L > L' = \lim_{n\to\infty} \psi(k'_n).$$

Ch.Pommerenke [1] показал, что

$$\operatorname{ord} h = \sup_{z\in\Delta} |\frac{1-|z|^2}{2}\frac{h''(z)}{h'(z)} - \bar{z}|.$$

Поэтому $\psi(k) = \sup_{z\in\Delta} P(z,k)$, где $P(z,k) = |\frac{1-|z|^2}{2} k f'_0(z) - \bar{z}|$. Следовательно, существуют последовательности $z_n, z'_n \in \Delta$ и бесконечно малые $\varepsilon_n$ и $\varepsilon'_n$ такие, что $\psi(k_n) = P(z_n,k_n)+\varepsilon_n$, $\psi(k'_n) = P(z'_n,k'_n)+\varepsilon'_n$. Тогда $\lim_{n\to\infty} P(z_n,k_n) = L$, $\lim_{n\to\infty} P(z'_n,k'_n) = L'$. Рассмотрим разность

$$P(z_n,k'_n) - P(z_n,k_n) = |k_n \frac{1-|z_n|^2}{2} f'_0(z_n) - \bar{z_n} +$$

$$(k'_n - k_n)\frac{1-|z_n|^2}{2} f'_0(z_n)| - |k_n \frac{1-|z_n|^2}{2} f'_0(z_n) - \bar{z_n}|.$$

Если $f_0(z) = \log H'(z)$, $\operatorname{ord} H = \alpha_0$, то

$$|(k'_n - k_n)\frac{1-|z_n|^2}{2} f'_0(z_n)| \leq |k'_n - k_n|(\alpha_0 + 1) \to 0,$$

если $n \to \infty$. Следовательно, $P(z_n,k'_n) - P(z_n,k_n) \to 0$ и $P(z_n,k'_n) \to L$, при $n \to \infty$. С другой стороны $\phi(k'_n) \geq P(z_n,k'_n)$; переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $L' \geq L$. Противоречие доказывает непрерывность функции $\psi(k)$ на $[0,\infty)$. Заметим, что $\psi(0) = 1$, т.к. $h_0(z) = z \in U_1$; $\lim_{k\to\infty} \psi(k) \geq \lim_{k\to\infty}(\frac{k}{2} - 1) = \infty$. Поэтому функция $\psi(k)$ принимает все значения от 1 до $\infty$. И, если фиксировано $\alpha > 1$, то существует $k > 0$, такое, что $\psi(k) = \operatorname{ord} h_k = \alpha$. При этом $||kf_0||_{\mathcal{B}} = kc_{f_0} = c_{kf_o} \leq C_\alpha$. С другой стороны, по неравенству (5) имеем $2(\alpha - 1) \leq ||kf_0||_{\mathcal{B}}$, т.е. $2(\alpha-1) \leq C_\alpha$. Отсюда же получаем верхнюю оценку $\lambda_\alpha$ для $\alpha \geq 3$.

Нижняя оценка $C_\alpha$ для $1 \leq \alpha \leq \frac{7}{5}$ будет получена ниже с использованием результата W.C.Royster'a [5].

$2^0$. Для получения верхней оценки $\lambda_\alpha$ для $\alpha \in (1,3]$ используем однолистные функции (3), успешно применявшиеся W.C.Royster'ом в случае $h \in S$. Обозначим $g_\nu(z) = \frac{F_\nu(z)}{F'_\nu(0)}$, для каждого $\nu$ будем брать $\gamma \in \mathbb{C}$ такие, что $\gamma(1-\nu) > 2$. Рассмотрим функции

$$h_{\gamma,\nu}(z) = \int_0^z (g'_\nu(\zeta))^\gamma \, d\zeta.$$

Обозначим $\sigma = \frac{|\gamma(1-\nu)|}{2} > 1.$. Выясним, при каких значениях $\gamma$ таких,что $\gamma(1-\nu) > 2$, выполнено равенство

$$\alpha = \operatorname{ord} h_{\gamma,\nu} = \sup_{z\in\Delta} |\frac{1-|z|^2}{2}\gamma\frac{F''_\nu(z)}{F'_\nu(z)} - \bar{z}| = \sup_{z\in\Delta} |\sigma\frac{1-|z|^2}{1-|z|} - \bar{z}| =$$

$$\sup\{|\frac{e^{i\phi}(\sigma(1-r^2)+r^2)-r}{1-re^{i\phi}}| : \phi \in [0,2\pi], r \in [0,1)\}.$$

Фиксируем $r \in [0,1)$ обозначим $a = \sigma(1-r^2)+r^2 > 0$. Функция $\frac{\zeta a - r}{1 - r\zeta}$ переводит окружность $|\zeta| = 1$ в симметричную относительно вещественной оси окружность, пересекающую эту ось в точках $(1+r)\sigma - r$ и $-\frac{\sigma(1-r^2)+r^2+r}{1+r}$. Поэтому

$$\max_{|\zeta|=1} |\frac{\zeta a - r}{1 - r\zeta}| = \max\{\frac{a-r}{1-r}, \frac{a+r}{1+r}\} = (1+r)\sigma - r$$

, следовательно

$$\operatorname{ord} h_{\gamma,\nu} = \sup_{r\in[0,1)} [(1+r)\sigma - r] = 2\sigma - 1 = |\gamma(1-\nu)| - 1 = \alpha.$$

Таким образом, $|\gamma| = \frac{\alpha+1}{|1-\nu|}$. Заметим, что при этом условие $|\gamma(1-\nu)| > 2$ выполнено для всех $\alpha > 1$ (если $\gamma(1-\nu) \in [0,2]$. то,аналогично тому, как это сделано выше, легко показать, что $\operatorname{ord} h_{\gamma,\nu} = 1$. ) Поскольку однолистность функций (3) означает выполнение условия (4), то $|1-\nu| \le 3$. Поэтому $|\gamma| \ge \frac{\alpha+1}{3}$ для всех $\nu$, удовлетворяющих (4); и если при фиксированном $\nu$ взять такие $\gamma = \gamma_0$, что $|\gamma_0| = \frac{\alpha+1}{3}$, $\gamma_0(1-\nu) > 0$, то $h_{\gamma_0,\nu} \in \mathcal{U}_\alpha$, хотя, может быть, уже $\operatorname{ord} h_{\gamma_0,\nu} < \alpha$. Рассмотрим

$$H_{\mu,\nu}(z) = \int_0^z (h'_{\gamma_0,\nu}(\zeta))^\mu \, d\zeta = \int_0^z (g'_\nu(\zeta))^{\gamma_0\mu} \, d\zeta.$$

Как показал W.C.Royster [5], для любого $\mu \in \mathbb{C}$, такого, что $|\gamma_0\mu| > \frac{1}{3}$, $\mu \ne \frac{1}{3\gamma_0}$, существует $\nu$, удовлетворяющее (4), такое, что $H_{\mu,\nu} \notin S$.

Таким образом, если $R > \frac{1}{3|\gamma_0|} = \frac{1}{\alpha+1}$, то существуют $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| = R$ и $h \in \mathcal{U}_\alpha$ такие, что $\int_0^z (h'(\zeta))^\mu \, d\zeta \notin S$. Следовательно, $\lambda_\alpha \le \frac{1}{\alpha+1}$.

Для доказательства нижней оценки $C_\alpha$ при $\alpha \le \frac{7}{5}$ опять воспользуемся конструкцией W.C.Royster'а, фиксировав какое-нибудь значение $\nu \ne 1$, $\nu \ne 0$, не обязательно удовлетворяющее условию (4). Тогда функция $h_{\rho,\nu}(z) = \int_0^z (g'_\nu(\zeta))^\rho \, d\zeta \notin S$ только для $\rho \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих одному из неравенств $|(\nu-1)\rho + 2| > 1$ или $|\rho(\nu-1)| > 1$. Поэтому, если $|\rho(1-\nu)| > 3$, т.е. $|\rho| > \frac{3}{|1-\nu|}$, то $h_{\rho,\nu}(z) \notin S$. По фиксированному $\nu$ подберем $\gamma \in \mathbb{C}$ такое, чтобы $|\gamma| = \frac{\alpha+1}{|1-\nu|}$, $\gamma(1-\nu) > 0$. Тогда $\operatorname{ord} h_{\gamma,\nu} = \alpha$ (при выводе этого факта мы не пользовались тем, что $\nu$ удовлетворяет (4). Функции

$$\tilde{H}_{\mu,\nu}(z) = \int_0^z (h'_{\gamma,\nu}(\zeta))^\mu \, d\zeta = \int_0^z (g'_\nu(\zeta))^{\gamma\mu} \, d\zeta$$

не однолистны для всех $\rho = \gamma\mu \in \mathbb{C}$ таких, что $|\mu| > \frac{3}{|\gamma(1-\nu)|} = \frac{3}{\alpha+1}$. Следовательно, если $\tilde{f} = \log h'_{\gamma,\nu}$, то $\frac{1}{c_{\tilde{f}}} = \max\{|\mu| : \tilde{G}_{\mu,\nu} \in S\} \le \frac{3}{\alpha+1}$. Следовательно $C_\alpha \ge c_{\tilde{f}} \ge \frac{\alpha+1}{3}$. И при $\alpha \le \frac{7}{5}$ эта оценка $C_\alpha$ лучше, чем $2(\alpha-1)$.

Теорема доказана. □

Corolary*Для любого* $\alpha > 1$ *существуют* $h \in \mathcal{U}_\alpha$ *и* $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \min\left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)$ *такие, что* $H_\lambda[h] \notin S$.

При $\alpha = 1$ теорема дает известное значение $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, нижняя оценка $C_1$ дает точное ее значение.

Естественно возникает гипотеза, что $\lambda_\alpha = \frac{1}{2\alpha}$.

## Resume

In this note we estimate a constant $C_\alpha$, connected with the Bloch class $\mathcal{B}$ and the universal linear invariant families $U_\alpha$. Moreover, we estimate the radius of the biggest disc such that for all its elements $\lambda$ the integral of $(h')^\lambda$ is univalent for all $h \in U_\alpha$.

## Литература

[1] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.I,//* Math. Ann.,- 1964,- Hf.155.- P.108–154.

[2] Pommerenke Ch. *On Bloch functions//* J. London Math. Soc. - 1970. - V.2(2). - P.241–267.

[3] Anderson J., Clunie J., Pommerenke Ch. *On Bloch functions and normal functions//* J. Reine Angew. Math. -1974. -V.270. - P.12–37.

[4] Pfaltzgraff J. *Univalence of the integral of* $f'(z)^\lambda$*//* Bull. London Math. Soc. - 1975. - V.7. - P.254–256.

[5] Royster W.C. *On univalence of certain integral//* Michigan Math. J. - 1965. - V.24(4). - P.386–387.

[6] Becker J. *Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien//* Math. Ann. - 1973. - V.202(4). - P.321–335.

[7] Becker J., Pommerenke Ch. *Schlichtheitskriterien und Jordangebite//* J. für reine und angew. Math. - 1984. - V.354. - P.74–94.

[8] Campbell D.M., Cima J.A., Pfaltzgraff J.A. *Linear space and linear-invariant families of locally univalent functions//* Manuscripta Math. - 1971. - V.4. - P.1–30.

[9] Godula J., Starkov V. *Applications of ideas of M bius invariance to abtain equivalent definitions of Bloch functions//* Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect.A. -1995. - V.49. - P.41–58.

[10] Godula J., Starkov V. *Estimates of constants connected with linearly invariant families of functions//* Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect.A. - 1994. - V.48. - P.41–51.

[11] Аксентьев Л.А., Нежметдинов И.Р. *Достаточные условия однолистности некоторых интегральных представлений//* Тр. семинара по краев. задачам. Казан ун-т. - 1982. -вып. 18. - Р. 3–11.

[12] Ahlfors L.V. *Sufficient conditions for quasi-conformal extension* Discontinuous groups and Riemann surfaces (Proc. Conf., College Park, Md., 1973). Ann. of Math. Studies V.79. 1974. 23–29.