Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 3, 1996

УДК 517.54

ОЦЕНКА ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛОКАЛЬНО ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

И.Р.Каюмов и В.В.Старков

В [1] введены и изучались универсальные линейно-инвариантные семейства U_α локально однолистных в $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций. Многие известные классы конформных отображений содержатся в U_α при конкретных значениях параметра $\alpha \geq 1$. Для $f(z) = z + \ldots \in U_\alpha$ обозначим $\log f'(z) = \sum_n a_n(f) z^n$. В работе исследованы свойства последовательности
$A_n = \sup_{f \in U_\alpha} |a_n(f)|$.

Ведение. Формулировка задач.

В [1] Поммеренке ввел понятие линейно-инвариантного семейства M. Это подмножество всех регулярных в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций, удовлетворяющих условиям:

1) $f(0) = 0, \qquad f'(z) = 1 + \cdots \neq 0, \qquad z \in \Delta,$

2) Для любых $f \in M, a \in \Delta, \theta \in R$, функция

$$f_\theta(z, a) = \frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))}{f'(\varphi(0))\varphi'(0)} \in M, \qquad \varphi(z) = \frac{a + z}{1 + \overline{a}z} e^{i\theta}.$$

Многие известные классы конформных отображений являются линейно-инвариантными семействами.

Порядком локально однолистной функции называется величина:

$$ord(f) = \sup_{a \in \Delta, \theta \in R} |\frac{f''_\theta(0, a)}{2}|.$$

[1]Эта статья представляет собой перевод опубликованной в "Proc. of. Nevanlinna Coll.,Joensuu(1995)"

Универсальным линейно-инвариантным семейством порядка α называется объединение всех локально однолистных функций $f(z) = z + d_2 z^2 + \ldots$ для которых $ord(f) \leq \alpha$. Поммеренке [1] показал, что

$$ord(f) = \sup_{z \in \Delta} |\frac{1-|z|^2}{2} \frac{f''(z)}{f'(z)} - \overline{z}| \geq 1,$$

причем U_1 — известный класс выпуклых однолистных в Δ функций.

Пусть $f \in U_\alpha, \quad \alpha < \infty$. Обозначим $\log f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n$. Положим $A_n = A_n(\alpha) = \sup_{f \in U_\alpha} |a_n(f)|$. Цель этой заметки — получение оценок логарифмических коэффициентов. При $\alpha = 1$ такая оценка хорошо известна: $|a_n| \leq 2/n$, причем знак равенства здесь достигается при любом натуральном n для функции $z/(1-z) \in U_1$. Поэтому далее считаем, что $\alpha > 1$. Отметим также очевидную точную оценку $|a_1| \leq 2\alpha$, так как $a_1 = 2d_2$, а $|d_2| \leq ord(f) \leq \alpha$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $n \geq 2$.

Теорема 1. *Предел* $\lim_{n\to\infty} A_n$ *существует.*

Доказательство. Обозначим через U_α^* следующий класс функций: $f(z) = z + d_2 z^2 + \cdots$,

$$|z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}| \leq \frac{2\alpha r^2}{1-r^2}, \qquad r = |z|.$$

Очевидно, что $U_\alpha^* \subset U_\alpha$. Для $f \in U_\alpha^*$ пусть $\log f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n$. Положим $A_n^*(\alpha) = \sup_{f \in U_\alpha^*} |a_n(f)|$.

Выведем одно важное свойство класса U_α^*. А именно: если f принадлежит U_α^*, то $g(z) = \int_0^z f'(s^\delta) ds$ также принадлежит U_α^* при $\delta > 1$ и при условии что $f'(z^\delta)$ — регулярна в $|z| < 1$. В самом деле

$$|z\frac{g''(z)}{g'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}| = |\delta z^\delta \frac{f''(z^\delta)}{f'(z^\delta)} - \frac{2r^2}{1-r^2}| \leq$$

$$\delta \frac{2\alpha r^{2\delta}}{1-r^{2\delta}} + |\frac{2\delta r^{2\delta}}{1-r^{2\delta}} - \frac{2r^2}{1-r^2}|.$$

Поскольку для любого $\delta > 1$ имеем $\frac{\delta r^{2\delta}}{1-r^{2\delta}} \leq \frac{r^2}{1-r^2}$, то окончательно получаем, что

$$|z\frac{g''(z)}{g'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}| \leq \frac{2\alpha r^2}{1-r^2},$$

то есть $g \in U_\alpha^*$.

Пусть f — дает максимум для $A_n^*(\alpha)$ в U_α^*. Положим

$$\log F'(z) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \log f'(ze^{\frac{2\pi m i}{n}})$$

Очевидно, что:

1)$F \in U_\alpha^*$,

2)$a_n(F) = a_n(f) = A_n^*(\alpha)$,

3)$F'(z^{\frac{n+1}{n}})$ регулярна в $|z| < 1$.

Поэтому, в силу предыдущих рассуждений получаем, что $g(z) = \int_0^z F'(s^{\frac{n+1}{n}})ds$ принадлежит U_α^*, далее $a_{n+1}(g) = a_n(f) = A_n^*(\alpha)$. Это значит, что $A_{n+1}^*(\alpha) \geq A_n^*(\alpha)$. Следовательно предел $\lim_{n\to\infty} A_n^*(\alpha)$ существует. Покажем, что $|A_n^*(\alpha) - A_n(\alpha)| \to 0$, $n \to \infty$; тем самым мы докажем теорему 1.

Заметим, что существует последовательность $\epsilon_n > 0$, $\epsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, такая что:

$$A_n^*(\alpha) \leq A_n(\alpha) \leq A_n^*(\alpha + \epsilon_n).$$

Левое неравенство очевидно. Докажем правое. Пусть h дает максимум модуля n-го коэффициента $|a_n|$ в классе U_α. Положим $\log H'(z) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \log h'(ze^{\frac{2\pi m i}{n}})$. Очевидно H также дает максимум модуля n-го коэффициента в классе U_α.

Для любого $r \in (0,1)$ рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{zH''(rz)}{H'(rz)} \frac{1-r^2}{2\alpha + 2r}.$$

Поскольку $|\Phi(z)| \leq 1$ и разложение в ряд Тейлора для $\Phi(z)$ начинается с z^n, то по Лемме Шварца имеем:

$$|\Phi(z)| \leq |z|^n,$$

то есть

$$|\frac{zH''(rz)}{H'(rz)}| \leq |z|^n \frac{2(\alpha + r)}{1 - r^2}.$$

Пусть теперь $|z| = r$. Тогда, в силу произвольности r, для любого $r > 0$ и $|z| \leq r$

$$|\frac{zH''(z)}{H'(z)}| \leq \frac{r^{\frac{n+1}{2}}(2\alpha + 2r^{\frac{1}{2}})}{1-r} \leq 2\frac{r^{\frac{n}{2}}(2\alpha r^{\frac{1}{2}} + 2r)}{1-r^2}.$$

Если $r \le 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, то $|\frac{zH''(z)}{H'(z)}| \le \frac{2\alpha r^2 - 2r^2}{1-r^2}$ для достаточно больших n.

Это значит, что для $|z| \le r$

$$|\frac{zH''(z)}{H'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}| \le \frac{2\alpha r^2}{1-r^2}.$$

Если $r \ge 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, то мы воспользуемся стандартным неравенством для функций из U_α:

$$|\frac{zH''(z)}{H'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}| \le \frac{2\alpha r}{1-r^2} \le \frac{2\alpha r^2}{(1-r^2)(1-\frac{1}{\sqrt{n}})}$$

Таким образом, в качестве ϵ_n можно положить $\frac{\alpha}{\sqrt{n}-1}$.

Осталось доказать, что $|A_n^*(\alpha+\epsilon_n) - A_n^*(\alpha)| \to 0$, $n \to \infty$.

В самом деле, предположим, что f_n дает максимум модуля n-го коэффициента в $U^*_{\alpha+\epsilon_n}$. Введем функцию $\frac{g_n''(z)}{g_n'(z)} = T_n \frac{f_n''(z)}{f_n'(z)}$, где T_n удовлетворяет линейному уравнению: $T_n(\alpha+\epsilon_n) + 1 - T_n = \alpha$. Тогда для g_n имеем:

$$|\frac{zg_n''(z)}{g_n'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}| = |\frac{zg_n''(z)}{g_n'(z)} - T_n\frac{2r^2}{1-r^2} + T_n\frac{2r^2}{1-r^2} - \frac{2r^2}{1-r^2}| \le$$

$$\frac{2T_n(\alpha+\epsilon_n) + 2(1-T_n)}{1-r^2} r^2 = 2\alpha\frac{r^2}{1-r^2}.$$

То есть $g_n \in U_\alpha^*$.

Это значит, что $A_n^*(\alpha) \ge T_n A_n^*(\alpha+\epsilon_n)$. Но так как $T_n \to 1$, $\epsilon_n \to 0$, то $|A_n^*(\alpha+\epsilon_n) - A_n^*(\alpha)| \to 0$, что и доказывает теорему 1. $\Box$

Заметим, что из результатов Авхадиева и Каюмова следует, что в классе S имеет место следующее соотношение: $\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_{n!}$

О соотношении соседних коэффициентов говорит следующее

Теорема 2. *Для любых натуральных $n > \frac{1}{\alpha-1}$ справедливо неравенство $A_{n+1} \ge A_n(1 - \frac{1}{n(\alpha-1)})$*

Доказательство. Пусть $f_0 \in U_\alpha$ – экстремальная функция в задаче о

$$\max_{f\in U_\alpha} |a_n(f)|,$$

n – фиксировано. Можно считать, что разложение в ряд Тейлора функции $\log f_0'(z)$ имеет вид

$$\log f_0'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} z^{kn}, a_n = A_n$$

(как и раньше). Рассмотрим функцию

$$f_\epsilon(z) = \int_0^z (f_0'(s))^{1/(1+\epsilon)} ds, \epsilon > 0.$$

$$ord(f_\epsilon) = \sup_{z\in\Delta} |\frac{1-|z|^2}{2} \frac{1}{1+\epsilon} \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} - \bar{z}| =$$

$$\sup_{z\in\Delta} |\frac{1}{1+\epsilon}(\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} - \bar{z}) - \bar{z}(1-\frac{1}{1+\epsilon})| \le \frac{\alpha+\epsilon}{1+\epsilon} < \alpha$$

при $\epsilon > 0$.

Обозначим $\beta = \frac{\alpha+\epsilon}{1+\epsilon}$. Рассмотрим регулярную в Δ функцию

$$g_\epsilon(z) = \int_0^z f_\epsilon'(s^\delta) ds, \quad \delta = \frac{n+1}{n}.$$

Покажем, что $g_\epsilon(z) \in U_\alpha$ при $\epsilon \ge \frac{1}{n(\alpha-1)-1}$, $n > \frac{1}{\alpha-1}$.

$$ord(g_\epsilon) = \sup_{z\in\Delta} |\frac{1-|z|^2}{2}\delta \frac{z^{\delta-1} f_\epsilon''(z^\delta)}{f_\epsilon'(z^\delta)} - \bar{z}| =$$

$$= \sup_{z\in\Delta} [\frac{1}{|z|} |\frac{1-|z|^2}{1-|z|^{2\delta}} \delta (\frac{1-|z|^{2\delta}}{2} \frac{z^\delta f_\epsilon''(z^\delta)}{f_\epsilon'(z^\delta)} - |z|^{2\delta}) + \delta |z|^{2\delta} \frac{1-|z|^2}{1-|z|^{2\delta}} - |z|^2|] =$$

$$\le \sup_{r\in[0,1)} [\frac{1}{r}(\delta \frac{1-r^2}{1-r^{2\delta}} r^\delta \beta + |\delta \frac{r^{2\delta}(1-r^2)}{1-r^{2\delta}} - r^2|)].$$

Но при $\delta \ge 1$ функции

$$\frac{\delta r^{2\delta}}{1-r^{2\delta}}, \quad \frac{\delta r^\delta}{1-r^{2\delta}}, \quad \frac{r^\delta}{1+r^\delta}.$$

убывают по δ. Следовательно

$$ord(g_\epsilon) \le \sup_{r\in[0,1)} [\delta \frac{(1-r^2) r^{\delta-1}}{1-r^{2\delta}} (\beta - r^\delta) + r] =$$

$$\sup_{r\in[0,1)}[\delta\frac{(1-r^2)r^{\delta-1}}{1-r^{2\delta}}(\beta-1)+\delta\frac{(1-r^2)r^{\delta-1}}{1+r^\delta}+r].$$

Поэтому

$$ord(g_\epsilon)\le\sup_{r\in[0,1)}[\beta-1+\delta\frac{(1-r^2)r^{\delta-1}}{1+r^\delta}+r]=$$

$$\le\beta-1+\sup_{r\in[0,1)}[\delta(1-r)+r]=\beta-1+\delta\le\alpha.$$

Таким образом, $g_\epsilon\in U_\alpha$,

$$\log g'_\epsilon(z)=\frac{1}{1+\epsilon}\log f'_0(z^{\frac{n+1}{n}})=\frac{1}{1+\epsilon}(A_nz^{n+1}+a_{2n}z^{2n+2}+\ldots).$$

Следовательно $A_{n+1}\ge\frac{A_n}{1+\epsilon}$. $\square$

После этих качественных результатов о логарифмических коэффициентах из U_α мы переходим к получению численных оценок.

Теорема 3. *Имеют место следующие оценки:*

$$\frac{(\alpha-1)(1+\frac{1}{n})}{(1-\frac{2}{n+1})^{\frac{n-1}{2}}}\le A_n(\alpha)\le\frac{2(\alpha-\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{n})^2)}{(2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})^{n-1}}<e(\alpha-\frac{1}{4\alpha}),$$

$$e(\alpha-1)\le\lim_{n\to\infty}A_n(\alpha)\le e(\alpha-\frac{1}{\alpha}).$$

Доказательство. Поскольку класс функций $LU_\alpha=\{\log f'(z)$ $: f\in U_\alpha\}$ выпуклый, то функция
$F(z)=\int_0^z[\prod_{m=0}^{n-1}f'(se^{\frac{2\pi mi}{n}})]^{\frac{1}{n}}ds\in U_\alpha$, если $f\in U_\alpha$ и

$$\log F'(z)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\log f'(ze^{\frac{2\pi mi}{n}})=\sum_{k=1}^{\infty}a_{kn}z^{kn}.$$

Поэтому достаточно оценить коэффициент при z^n функции $F(z)$. Так как $ord(f)\le\alpha$, то

$$|\frac{1-|z|^2}{2}\frac{zF''(z)}{F'(z)}-|z|^2|\le\alpha|z|,\qquad z\in\Delta;$$

и по принципу максимума получаем для всех $r \in (0,1)$, $z \in \Delta$

$$|\frac{1-r^2}{2\alpha}\frac{zF''(rz)}{F'(rz)} - \frac{r}{\alpha}| \le 1.$$

При фиксированном $r \in (0,1)$ обозначим регулярную в Δ функцию

$$\varphi(z) = \frac{1-r^2}{2\alpha}\frac{zF''(rz)}{F'(rz)} - \frac{r}{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n; \qquad c_n = \frac{1-r^2}{2\alpha} n a_n r^{n-1}.$$

Поскольку $|\varphi(z)| \le 1$, $z \in \Delta$ то $|c_n| \le 1 - |c_0|^2$ (см., например [2, стр. 323]). Следовательно для a_n имеем следующую оценку:

$$\frac{1-r^2}{2\alpha} n|a_n| r^{n-1} \le 1 - \frac{r^2}{\alpha^2}.$$

Отсюда получаем:

$$|a_n| \le \frac{(1-\frac{r^2}{\alpha^2})2\alpha}{n(1-r^2)r^{n-1}}. \tag{1}$$

Подставив $r = 1 - \frac{1}{n}$ в правую часть (1) , получим

$$|a_n| \le \frac{2(\alpha - \frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{n})^2)}{(2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})^{n-1}}. \tag{2}$$

Но в (2) числитель убывает по $n \in [2, \infty)$, а знаменатель возрастает, поскольку все коэффициенты в разложении функции $\log(2-t) + (\frac{1}{t} - 1)\log(1-t)$, $\qquad t \in (0,1)$ – неотрицательны. Следовательно

$$|a_n| \le \frac{2(\alpha - \frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{n})^2)}{(2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})^{n-1}} < e(\alpha - \frac{1}{4\alpha}),$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n(\alpha) \le e(\alpha - \frac{1}{\alpha}).$$

Обозначим $f_n(z) = \int_0^z e^{a_n s^n} ds$, a_n фиксировано,

$$\alpha = ord(f_n) = \sup_{z\in\Delta} |\frac{1-|z|^2}{2} n a_n z^{n-1} - \overline{z}| =$$

$$\sup_{r\in[0,1]}|\frac{1-r^2}{2}n|a_n|r^{n-1}+r| \leq \sup_{r\in[0,1]}|\frac{1-r^2}{2}n|a_n|r^{n-1}+1| =$$

$$1+\frac{n}{n+1}|a_n|(1-\frac{2}{n+1})^{\frac{2}{n+1}}.$$

Отсюда получаем оценку

$$\frac{(\alpha-1)(1+\frac{1}{n})}{(1-\frac{2}{n+1})^{\frac{n-1}{2}}} \leq |a_n| \leq A_n, \qquad e(\alpha-1) \leq \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Теорема 3 доказана. □

В [1, теорема 2.4] Х. Поммеренке показал, что для $\lambda \in R$ и $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} d_n z^n \in U_\alpha$ справедливо неравенство

$$|(\frac{2}{3}-\lambda)\alpha^2+\frac{1}{3}| \leq |d_3-\lambda d_2^2| \leq |\frac{2}{3}-\lambda|\alpha^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Теорема 3 позволяет уточнить правую часть (3).

Следствие. *Если $f(z) \in U_\alpha$, $\alpha \in (1,\infty)$ то для любого $\lambda \in C$*

$$|d_3-\lambda d_2^2| \leq |\frac{2}{3}-\lambda|\alpha^2+\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\frac{1}{3\alpha}).$$

Действительно, обозначим как и раньше через a_n коэффициенты в разложении функции $\log f'(z)$. Тогда

$$d_2 = \frac{a_1}{2}, \qquad d_3 = \frac{1}{3}(a_2+\frac{{a_1}^2}{2})$$

Так как $ord(f) \leq \alpha$, то $|d_2| \leq \alpha$ и $|a_1| \leq 2\alpha$; по (1)

$$|a_n| \leq \frac{(1-\frac{r^2}{\alpha^2})2\alpha}{n(1-r^2)r^{n-1}}.$$

Полагая $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$, получаем следующее усиление неравенства Поммеренке:

$$|d_3-\lambda {d_2}^2| = |\frac{a_2}{3}+{a_1}^2(\frac{1}{6}-\frac{\lambda}{4})| \leq |\frac{2}{3}-\lambda|\alpha^2+\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\frac{1}{3\alpha}).$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 96–01–00110).

Список литературы

[1] Pommerenke Ch.*Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.I,*// Math. Ann.,— 1964,— Hf.155,— C.108–154.

[2] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*,—М.: Наука, 1966,— 627с.