В статье определяется свертка рядов Фабера, получено ее интегральное представление и приведен пример использования.

1. Пусть на комплексной плоскости Z дан ограниченный невырожденный континуум K с односвязным дополнением D . Функция $t = F(z)$ конформно и однолистно отображает D на область $|t| > 1$ при условиях $F(\infty) = \infty, F'(\infty) > 0, z = \psi(t)$ - обратная функция к $t = F(z)$, Γ_R - линия уровня функции Грина области D, то есть линия которая при отображении $t = F(z)$ переходит в окружность $|t| = R > 1$, G_R - внутренность, D_R - внешность линии уровня.

Ниже используются обозначения, определения и некоторые факты из книги [1]:

Функция (см.стр.54)

$$\Psi(t,z) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z}$$

является производящей функцией для многочленов Фабера $\{F_n(z)\}$ континуума K, то есть имеет место разложение

$$\Psi(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{t^{n-1}}, \qquad z \in K, |t| > 1 \qquad (1).$$

Пусть $f(z), g(z)$ - функции аналитические на K, тогда они аналитичны и в некоторых областях G_{R_f} и G_{R_g} соответственно, $(R_f, R_g > 1)$, и разлагаются (см.стр.76) в ряд Фабера

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n F_n(z), \qquad z \in G_{R_1} \qquad (2),$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n F_n(z), \qquad z \in G_{R_2} \qquad (3),$$

равномерно сходящиеся на G_{R_1}, G_{R_2} соответственно. Где,например

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=\rho_f} \frac{f(\psi(t))}{t^{n+1}} dt, \qquad 1 < \rho_1 < R_1, \qquad (4)$$

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|}}, \qquad (5)$$

g_n, R_2 определяются аналогично.

Свертку Адамара рядов Фабера этих функций введем следуя работе [2] стр.37:

$$h(f, g, F(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n F_n(z), \qquad z \in G_{R_3}, \tag{6}$$

где

$$R_3 = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n g_n|}}.$$

Ряд (6) равномерно сходится в G_{R_3}, так как функции $f(z), g(z)$ регулярны в G_{R_1} и G_{R_2}, соответственно, по теореме о разложении регулярной функции в ряд Фабера (см.[3] стр.135), $R_1, R_2 > 1$, следовательно, $R_3 > 1$ и, по той же теореме, ряд (6) равномерно сходится в G_{R_3}.

Пусть $z \in G_{R_1 R_2}$, тогда заменяя в ряде (6) f_n и g_n по формулам (3) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$h(f, g, F(z)) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{|t|=\rho_1} \oint\limits_{|w|=\rho_2} \frac{f(\psi(t))g(\psi(w))\psi'(tw)}{\psi(tw) - z} dtdw, \tag{7}$$

Интеграл (7) при фиксированном $z \in G_{R_1 R_2}$ не зависит от выбора ρ_1, ρ_2, если $1 < \rho_1 < R_1, 1 < \rho_2 < R_2$ и $|z| < \rho_1\rho_2$.

2. Рассмотрим теперь вместо континуума K, при сохранении прочих условий, ограниченную односвязную область G с правильной аналитической границей Γ и такую, что дополнение замкнутой области $\overline{G} = G \bigcup \Gamma$ есть односвязная область D. Тогда отображающая функция $F(z)$ продолжается аналитически и однолистно через Γ в некоторую область D_R, где $0 < R < 1$ и равенство (1) имеет место для $|t| > R, z \in G_R$

Пусть f, g аналитичны в G_{R_f}, G_{R_g}, соответственно, где $R < R_f, R_g \leq 1$. И в этом случае (см.[1] стр.76 или [3] стр.138) формулы (2)-(5) остаются справедливыми где $R < \rho_1 < R_1, R < \rho_2 < R_2$,и можно доказать,что ряд (6) по прежнему сходится в G_{R_3}, Интеграл (7) получим для $z \in G_{R_1 R_2}$, если контуры интегрирования заменить на $|t| = \rho_1, |w| = \rho_2$, соответственно, где $R < \rho_1\rho_2$ и $|z| < \rho_1\rho_2$.

Замечание Для вычисления сумм числовых и функциональных рядов целесообразно рассмотреть свертки с весом

$$h(f, g, F(z), r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n r_n F_n(z), \tag{7}$$

3. Примеры.

В этом пункте считаем, что функции, определенные (2) и (3) аналитичны в G или K, в зависимости, что рассматривается. Формулы $F_n(z)$ и $\psi(t)$ для соответствующих областей взяты из [1] (Стр.55-58).

1) Пусть G - круг $|z - z_0| < R$, тогда $\psi(t) = tR + z_0$, $F_n(z) = \frac{(z-z_0)^n}{R^n}$.

Из (6) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n F_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n g_n (z - z_0)^n}{R^n} =$$

$$\frac{-R}{4\pi^2} \oint\limits_{|t|=\rho} \oint\limits_{|w|=\rho} \frac{f(tR + z_0) g(wR + z_0)}{wtR - z + z_0} dt dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=\rho} \frac{f(tR + z_0)}{t} g\left(\frac{z + z_0(t-1)}{t}\right) dt.$$

В качестве числового примера рассмотрим круг $G = |z - 1| < 3$ и функции $f(z) = g(z) = \frac{z}{z+2}$, имеющие разложение

$$f(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n(z).$$

Найдем свертку Адамара при помощи интеграла (7)

$$h(f, f, \frac{z-1}{3}) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) = \frac{1}{6\pi i} \oint\limits_{|t|=\rho} \frac{(3t+1)(z+t-1)}{t(t+1)(z+3t-1)} dt =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{4}{4-z} - 1\right).$$

2) Пусть K - сегмент $[-R, R]$, либо эллипс с фокусами в точках ± 1 и полуосями

$$a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right),$$

тогда

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\left(Rt + \frac{1}{Rt}\right), \qquad F_n(z) = \frac{2}{R^n}T_n(z), n \geq 1, \qquad F_0(z) = T_0(z),$$

где $T_n(z)$ - суть многочлены Чебышева первого рода. Подставляя в (7) имеем

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n g_n}{R^n} T_n(z) =$$

$$-\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{|t|=\rho_1} \oint\limits_{|w|=\rho_2} \frac{f\left[\frac{1}{2}\left(Rt + \frac{1}{Rt}\right)\right] g\left[\frac{1}{2}\left(Rw + \frac{1}{Rw}\right)\right]\left(R^2t^2w^2 - 1\right)}{wt\left(R^2t^2w^2 - 2zRtw + 1\right)} dtdw.$$

3) Пусть D - внешность гипоциклоиды с $p+1$ точками возврата, где p - произвольное натуральное число, тогда

$$\psi(t) = t + \frac{1}{pt^p}; \qquad F_n(z) = z^n, \qquad n \leq p; \qquad F_{p+1}(z) = z^{p+1} - 1 - \frac{1}{p},$$

$$F_{n+1}(z) = zF_n(z) - \frac{1}{p}F_{n-p}(z), \qquad n > p.$$

И свертка Адамара примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n F_n(z) =$$

$$-\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{|t|=\rho_1} \oint\limits_{|w|=\rho_2} \frac{f\left(t + \frac{1}{t^p p}\right) g\left(w + \frac{1}{w^p p}\right)\left(w^{p+1}t^{p+1} - 1\right)}{tw\left(p(tw)^{p+1} - pz(tw)^p + 1\right)} dtdw.$$

Résumé

Adamar‘s convolution of Faber‘s series is introduced. It‘s integral presentatien and an example of it‘s use are given.

Литература

[1] Суетин П. К. *Ряды по многочленам Фабера*. М., 1984.

[2] Бибербах Л. *Аналитическое продолжение*. М., 1967.

[3] Смирнов В. И., Лебедев М. А. *Конструктивная теория функций комплексного переменного*. М., 1964.

[4] Какичев В. А. *О матричном свертывании степенных рядов* //Известия высших учебных заведений. Математика. -1990. №2. -с.53–62.

[5] Какичев В. А. *О свертках для интегральных преобразований* //Вусцi Академіi Навук Беларуской ССР. Серия физика-матэматичных навук. -1967. №2. -с.49–57.