Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 3, 1996

УДК 515.12

О ВНУТРЕННЕЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ АБСОЛЮТНЫХ РЕТРАКТОВ

Е. В. Моисеев

Понятие миксера было введено Ван Миллом и Ван дэ Вэлом [1] с целью получения внутренней характеризации абсолютных ретрактов. Ими было получено условие достаточное, но не необходимое для того, чтобы пространство с миксером являлось абсолютным ретрактом. Таким образом, в случае компактов вопрос о том является ли пространство с миксером AR — пространством остаųтся открытым, в случае произвольных метрических пространств ответ отрицательный (см.[2]).

В данной работе получено условие необходимое и достаточное для того, чтобы пространство с миксером являлось абсолютным ретрактом.

Определение 1 *Пусть X —топологическое пространство. Будем говорить, что в окрестности U точки $x \in X$ существует структура итерированного миксера (и.м.),если существует семейство непрерывных отображений μ_n, $n = 0, 1, \ldots$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $\mu_0 = \mathrm{id} : U \to U, \quad A_0 = U,$
2) $\mu_{n+1} : A_{n+1} = A_n \times A_n \times A_n \to X$, *при этом*

$$\mu_{n+1}(x, x, y) = \mu_{n+1}(x, y, x) = \mu_{n+1}(y, x, x) = \mu_n(x)$$

   для любых $x, y \in A_n$.
3) *Для любой окрестности V любой точки $y \in V \subset U$, существует окрестность $V' \subset V$ такая, что $\mu_n(V' \times \ldots V') \subset V$ для любого $n \in N$.*

Если $U = X$ то будем говорить, что структура итерированного миксера задана на пространстве X.

Если и.м. структура задана на некоторой окрестности каждой точки пространства X и эти структуры согласованы, т.е. значения отображений μ_n не зависят от выбора окрестности,то будем говорить,что на пространстве X задана структура локального итерированного миксера (л.и.м.).

Теорема 1. *Пусть X —метризуемое пространство, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *X — локально линейно связное пространство с л.и.м.*
2) *$X \in ANR(\mathfrak{M})$.*

Теорема 2. *Пусть X — метризуемое пространство, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *X — линейно и локально линейно связное пространство с и.м.*
2) *$X \in AR(\mathfrak{M})$.*

Доказательство импликаций 2⇒1 теорем 1 и 2.

Пусть X — метрическое пространство, тогда X вкладывается изометрически в некоторое линейное нормированное пространство (см.[3]) таким образом, что X замкнуто в своей выпуклой оболочке $C(X)$. Если X является $ANR(\mathfrak{M})$ — пространством, то существует ретракция $r : U \to X$ некоторой окрестности U экземпляра X. В случае $AR(\mathfrak{M})$ — пространства имеет место равенство $U = C(X)$.

Отображения μ_n определяем по индукции.Для $n = 0 \mu_0 = \mathrm{id} : X \to X$. Пусть определено отображение μ_n тогда

$$\mu_{n+1}(x, y, z) = r\big(\tfrac{\|\mu_n(x)-\mu_n(y)\|}{\Sigma}\mu_n(z)+$$

$$+\tfrac{\|\mu_n(y)-\mu_n(z)\|}{\Sigma}\mu_n(x) + \tfrac{\|\mu_n(x)-\mu_n(z)\|}{\Sigma}\mu_n(y)\big),$$

где

$$\Sigma = \|\mu_n(x) - \mu_n(y)\| + \|\mu_n(y) - \mu_n(z)\| + \|\mu_n(z) - \mu_n(x)\|$$

Доказательство импликаций $1 \Rightarrow 2$ теорем 1 и 2.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы Лефшеца ([3],стр.127). Основным моментом этого доказательства является непрерывное продолжение отображения в пространство X на n-мерные остовы политопа. На 0-м шаге это продолжение строится с использованием локальной линейной связности пространства X. На n-ом шаге продолжение использует существование на X миксера μ_n. Первое и второе условие в определение итерированного миксера гарантируют то, что поднятие отображения на остов высшей размерности действительно является продолжением, а третье условие влечет непрерывность этого отображения.

Résumé

The notion of the mixer was introdused by J. van Mill and M. van de Vel (see [1]). They tried to yield the internal characterization of compact AR's by means of a mixer. It is the moot point till now. The notion of iterated mixer considered in this paper, and it is showed that there is an internal characterization of AR-spaces by means of iterated mixer.

Литература

[1] J.van Mill, M.van de Vel. *On an internal property of Absolute Retracts//* Topology Proc.4 1979. P.193–200.

[2] R.Cauty. *Un espase metrique lineaire qui n'est pas un retracte absolu.* Fund.Math. 146. 1994. P.85–99.

[3] К.Борсук. *Теория ретрактов.*Москва: Мир. 1971.