Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 3, 1996

УДК 517

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Мосягин

В статье доказаны теоремы существования и единственности решений нелокальной задачи Коши для полулинейных и нелинейных дифференциальных уравнений в локально выпуклом пространстве.

1. Пусть (E, τ) – секвенциально полное хаусдорфово локально выпуклое линейное топологическое пространство, $\Gamma = \{p\}$ – система полунорм на E, определяющая топологию τ [1].

Пусть $L(E)$ – совокупность всех линейных непрерывных операторов из E в E. Говорят, что в E определена равностепенно непрерывная полугруппа операторов класса (C_0), если задано однопараметрическое семейство операторов $\{T(t)\}$ $(t \geq 0; T(t) \in L(E))$, для которых выполнены условия:

1) $T(t)\,T(s) = T(t+s)$, $T(0) = I$;
2) $T(t)x \to T(t_0)x$ при $t \to t_0$ для всех $t_0 \geq 0$ и $x \in E$;
3) семейство $\{T(t)\}$ равностепенно непрерывно, то есть для всякой полунормы $p \in \Gamma$ существует полунорма $q \in \Gamma$ такая, что $p(T(t)x) \leq q(x)$ для всех значений $t \geq 0$ и всех элементов $x \in E$.

Равностепенно непрерывные полугруппы $\{T(t)\}$ класса (C_0) рассмотрены в [1]. Равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0) назовем правильной [2], если $p(T(t)x) \leq p(x)$ для всех $t \geq 0$, $x \in E$ и $p \in \Gamma$.

Для полулинейного дифференциального уравнения в пространстве E рассмотрим нелокальную задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t, x(t)), \qquad t \in \mathcal{I} \setminus \{0\}, \tag{1}$$

$$x(0) + g(x) = x_0, \tag{2}$$

где $\mathcal{I} = [0, h]$, $h > 0$, A – инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной полугруппы $\{T(t)\}$ класса (C_0) в E, $f : [0, h] \times E \to E$, $g : C(\mathcal{I}, E) \to E$ (f, g – известные функции, удовлетворяющие некоторым условиям; $C(\mathcal{I}, E)$ – множество всех непрерывных функций на $\mathcal{I}$ со значениями в E).

В случае, когда условие (2) имеет вид $x(0) = x_0$ задача Коши для уравнения (1) в локально выпуклом пространстве E изучена в работе [2]. Нелокальная задача Коши (1)–(2) в банаховом пространстве исследована в статьях [4, 5]. В данной заметке некоторые результаты работ [4, 5] мы переносим на локально выпуклые пространства.

Функцию $x \in C(\mathcal{I}, E)$ и удовлетворяющую интегральному уравнению

$$x(t) = T(t)x_0 - T(t)g(x) + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))\, ds, \quad t \in \mathcal{I} \tag{3}$$

назовем обобщенным решением задачи (1)–(2). Рассматривая далее $\tilde{E} = C(\mathcal{I}, E)$ как линейное пространство, определим на $\tilde{E}$ систему полунорм $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{p}\}$, где

$$\tilde{p}(x) = \sup_{t \in \mathcal{I}} p(x(t)), \qquad p \in \Gamma, x \in \tilde{E}.$$

Пара $(\tilde{E}, \tilde{\Gamma})$ – секвенциально полнле хаусдорфово локально выпуклое пространство.

Используя теорию равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0) и теорему о неподвижной точке [3], докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть A – инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной правильной полугруппы класса (C_0). Пусть при каждом $x \in E$ оператор $f(t, x)$ непрерывен по t на $[0, h]$. Пусть f и g удовлетворяют условию Липшица: $\forall p \in \Gamma$*

$$p\,(f(t, x_1) - f(t, x_2)) \le \alpha_p\, p(x_1 - x_2), \quad \alpha_p > 0, t \in \mathcal{I}, \quad x_1, x_2 \in E; \tag{4}$$

$$p\,(g(v_1) - g(v_2)) \le \beta_p \tilde{p}(v_1 - v_2), \quad \beta_p > 0,\, v_1, v_2 \in \tilde{E}. \tag{5}$$

Пусть, кроме того, $\forall p \in \Gamma$

$$\lambda_p = (h\alpha_p + \beta_p) < 1. \tag{6}$$

Тогда задача (1)–(2) имеет единственное обобщенное решение на $\mathcal{I}$.

Доказательство. В пространстве $\tilde{E}$ рассмотрим оператор

$$Bx(t) = T(t)x_0 - T(t)\,g(x) + \int_0^t T(t-s)\,f(s, x(s))\,ds,$$

определенный правой частью уравнения (3). Оператор B действует из $\tilde{E}$ в $\tilde{E}$. Пусть $x_1, x_2 \in \tilde{E}$. Для любого $t \in [0, h]$ и любой полунормы $p \in \Gamma$, используя неравенства (4)–(5), имеем

$$\begin{gathered}
p\,(Bx_1(t) - Bx_2(t)) \le p\,(T(t)(g(x_1) - g(x_2))) + \\
+p\left(\int_0^t T(t-s)\;(f(s, x_1(s) - f(s, x_2(s)))\;ds\right) \le \\
\le \beta_p \tilde{p}(x_1 - x_2) + h\alpha_p \tilde{p}(x_1 - x_2) = \\
= (h\alpha_p + \beta p)\,\tilde{p}(x_1 - x_2).
\end{gathered}$$

Следовательно $\tilde{p}(Bx_1 - Bx_2) \le (h\alpha_p + \beta_p)\,\tilde{p}(x_1 - x_2)$ $\forall \tilde{p} \in \tilde{\Gamma}$. Так как по условию (6) $\lambda_p < 1$ $\forall p \in \Gamma$, то B – оператор сжатия в $\tilde{E}$. Следовательно, оператор B имеет единственную неподвижную точку $x = x(t)$ в $\tilde{E}$. Функция $x(t)$ является обобщенным решением задачи (1)–(2). Теорема доказана.

Существование обычного решения нелинейной задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in \mathcal{I} \setminus \{0\}; \quad x(0) + g(x) = x_0 \tag{7}$$

устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть операторы* f, g *удовлетворяют условиям теоремы 1 и пусть выполнены неравенства (5). Тогда задача (7) имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Résumé

The aim of this paper is to prove theorems of the existence and uniquenness solutions of a nonlocal Cauchy problem for semilinear and nonlinear differential equations in locally convex space.

Литература

[1] Иосида К. *Функциональный анализ* М. Мир, 1967. 624 с.

[2] Поволоцкий А.И., Мосягин В.В. *О дифференциальных уравнениях в локально выпуклых пространствах* // Ученые зап. ЛГПИ им. А.И.Герцена. 1971. Т.404. С.406–414.

[3] Миллионщиков В.М. *К теории дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах* // Матем. сб. 1962. Т.57(99), N4. С.385–406.

[4] Byszewski L. *Theorems about the existence and uniquiness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem* // J. Math. Anal. Appl. 1991. V.162. P.494–505.

[5] Byszewski L. *Existence and uniqueness of solutions of semilinear evolution nonlocal Cauchy problem* // Zesz. Nauk. Politechniki Rzeszowskiej 121, Mat. Fiz., z.18 (1993), P.109–112.