Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 3, 1996

УДК 517.54

О РАДИУСЕ ЗВЕЗДООБРАЗНОСТИ В КЛАССАХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ , СВЯЗАННЫХ С ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫМИ СЕМЕЙСТВАМИ

Н. Г. Павлова

По аналогии с задачей нахождения радиуса звездообразности семейства функций $F_c^{(M)}$, введенного Г. Димковым [1], в этой статье рассматривается задача нахождения радиуса звездообразности класса функций $\mathcal{F}_\alpha(c)$, которая является детализацией задачи из [1].

Пусть S — класс функций $f(z) = z + \ldots$ регулярных и однолистных в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. Обозначим $S^* = S^*(0)$ класс звездообразных функций, т.е. функций $f(z) \in S$, однолистно отображающих Δ на области, звездообразные относительно 0. Через $S^*(\beta)$ обозначим подкласс класса S^* функций, звездообразных порядка β, то есть

$$S^*(\beta) = \left\{ f(z) \in S^* : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta, |z| < 1 \right\}, \beta \in [0,1).$$

Обозначим $K = K(0)$ класс выпуклых в Δ функций, т.е. функций $f(z) \in S$, отображающих Δ на выпуклые области.Через $K(\beta)$ обозначим функции, выпуклые порядка β, т.е

$$K(\beta) = \left\{ f(z) \in K : \mathrm{Re}(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}) > \beta, |z| < 1 \right\}, \beta \in [0,1).$$

В [1] рассматривался класс функций, представимых в виде

$$F(z) = z \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{f_j(z)}{z}\right)^{a_j}, f_j(z) \in S^*(\beta_j), \tag{1}$$

© Н. Г. Павлова, 1996

a_j- комплексные постоянные. Очевидно,

$$g(z)=\int_0^z \frac{f(s)}{s}ds\in K(\beta)\Longleftrightarrow f\in S^*(\beta)\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow h(z)=\int_0^z (g'(s))^{\frac{1}{1-\beta}}\in K\Longleftrightarrow p(z)=zh'(z)\in S^*.$$

Таким образом, $f(z)\in S^*(\beta)\Longleftrightarrow \exists p(z)\in S^*:\frac{f(z)}{z}=\left(\frac{p(z)}{z}\right)^{1-\beta}$. Следовательно, функции вида (1) могут быть записаны в виде

$$F(z)=z\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{f_j(z)}{z}\right)^{a_j}=z\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{p_j(z)}{z}\right)^{a_j(1-\beta_j)},f_j\in S^*(\beta_j),p_j\in S^*.$$

Пусть A – некоторый класс регулярных и локально однолистных в Δ функций $f(z)=z+\ldots$. Радиусом звездообразности R^* класса A называется верхняя граница радиусов кругов $\Delta_r=\{z:|z|<r\}$ таких, что $f(\Delta_r)$ – звездообразная область для любой функции $f(z)\in A$. Для фиксированного $M>0$ в [1] был введен класс $F^{(M)}$ функций F указанного выше вида (1), для которых

$$\sum_{j=1}^{n}(1-\beta_j)|a_j|\le M,$$

и подкласс $F_c^{(M)}\subset F^{(M)}$ для фиксированного

$$c\in[-M,M]:F_c^{(M)}=\{F(z)\in F^{(M)}:\sum_{j=1}^{n}(1-\beta_j)\operatorname{Re}a_j=c\}.$$

В [1] доказана

Теорема А. *Радиус звездообразности класса $F_c^{(M)}$ равен*

$$r_c^*=\frac{1}{M+\sqrt{M^2-2c+1}};$$

Радиус звездообразности класса $F^{(M)}$ равен

$$R^*=\frac{1}{2M+1}.$$

Пусть L – множество всех дробно-линейных автоморфизмов $\Phi(z)$ круга Δ. Класс функций $f(z) = z + \dots$ регулярных и локально однолистных в Δ называется линейно-инвариантным семейством [2] если для любой функции $\Phi(z) \in \mathrm{L}$ функция

$$\Lambda_\Phi[f](z) = \frac{f(\Phi(z)) - f(\Phi(0))}{f'(\Phi(0))\Phi'(0)} = z + \dots$$

также принадлежит этому классу.

Пусть M – линейно-инвариантное семейство; порядком M называется число

$$\mathrm{ord}\,\mathrm{M} = \sup_{f \in \mathrm{M}} \left\{ \frac{|f''(0)|}{2} \right\}.$$

Универсальным линейно-инвариантным семейством U_α, $1 \le \alpha < \infty$, в [2] называется объединение всех линейно-инвариантных семейств M, порядок которых не превосходит α. Многие известные классы функций являются линейно-инвариантными семействами. Например, $U_1 = K$, S – линейно-инвариантное семейство порядка 2.

В [3] (см. также [4]) введено линейно-инвариантное семейство U'_α порядка $\alpha \ge 1$. Это множество функций, представимых в виде

$$f(z) = \int_0^z exp[-2\int_0^{2\pi} log(1 - se^{-it})d\mu(t)]ds,$$

где $\mu(t)$- комплекснозначная функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, удовлетворяющая условию

$$|\int_0^{2\pi} d\mu(t) - 1| + \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \le \alpha.$$

Множество таких функций $\mu(t)$ обозначим I_α. Как показано в [3],

$$f \in U'_\alpha \Longleftrightarrow f' = \lim_{n\to\infty} f'_n,$$

где

$$f'_n(z) = \prod_{j=1}^n (h'_j)^{b_j},\ h_j \in K,\ |\sum_{j=1}^n b_j - 1| + \sum_{j=1}^n |b_j| \le \alpha. \qquad (2)$$

Для фиксированного $c \in \mathbb{C}$ обозначим через

$$I_\alpha^c = \{\mu \in I_\alpha : \int_0^{2\pi} d\mu(t) = c = const.\};$$

Через $U'_\alpha(c)$ обозначим класс функций $f(z) \in U'_\alpha$, которым в их интегральном представлении соответствуют функции $\mu(t) \in I_\alpha^c$. Пусть $M = \alpha - |c-1|$. Рассмотрим класс функций

$$\mathcal{F}_\alpha(c) = \{F(z) = zf'(z) : f \in U'_\alpha(c)\}.$$

Обозначим $r^*(\alpha, c)$ радиус звездообразности класса $\mathcal{F}_\alpha(c)$. В случае, если функции f_n имеют вид (2), $F(z) = zf'_n(z) \in \mathcal{F}_\alpha(c)$ (т.е. $\sum_{j=1}^n b_j = c$) и $b_j = a_j(1-\alpha_j), j = 1, \dots, n$, задача нахождения радиуса звездообразности множества таких функций является детализацией задачи Г.Димкова из теоремы А при $M = \alpha - |c-1|$.

Имеет место следующий аналог теоремы А для семейств $\mathcal{F}_\alpha(c)$.

Теорема 1. *Радиус звездообразности класса $\mathcal{F}_\alpha(c)$ равен*

$$r^*(\alpha, c) = \frac{1}{M + \sqrt{M^2 - 2\operatorname{Re} c + 1}},$$

где $M = \alpha - |c-1|$.

Доказательство. При $\alpha = 1$ класс $\mathcal{F}_1(c) \subset S^*$, поэтому $r^*(1, c) = 1$ и далее будем считать $\alpha > 1$. Пусть $F(z) = zf'(z) \in \mathcal{F}_\alpha(c)$. Звездообразность области $F(\Delta_r)$ означает, что для всех $z \in \Delta_r$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\} \geq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 0, f \in U'_\alpha(c).$$

При фиксированном $z = re^{i\theta} \in \Delta$ рассмотрим экстремальную задачу нахождения

$$\min_{f \in U'_\alpha(c)} \operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = \min_{f \in U'_\alpha(c)} \operatorname{Re}\left\{z(log f'(z))'\right\}. \tag{3}$$

Так как $U'_\alpha(c)$ инвариантен относительно преобразования вращения $e^{i\theta}f(ze^{-i\theta})$, то (3) эквивалентна экстремальной задаче

$$\min_{f \in U'_\alpha(c)} \operatorname{Re}\left\{\frac{rf''(r)}{f'(r)}\right\}. \tag{4}$$

Далее понадобятся следующие результаты, полученные в [3] ([4]). Пусть G_α– класс функций

$$\varphi(z)=\int_0^{2\pi} g(z,t)d\mu(t), \quad \mu(t)\in I_\alpha,$$

$g(z,t)$–какая-либо функция, регулярная в Δ по z, 2π-периодическая и непрерывно дифференцируемая по t; $I_\alpha(n)$ – подкласс I_α кусочно-постоянных функций, имеющих не более n разрывов на $[0,2\pi)$; пусть

$$G_\alpha(n,\mu_0)=\left\{\varphi\in G_\alpha:\varphi(z)=\int_0^{2\pi} g(z,t)d\mu(t),\mu(t)\in I_\alpha(n),\right.$$
$$\left.\int_0^{2\pi} d\mu(t)=\int_0^{2\pi} d\mu_0(t)\right\}.$$

Пусть F – дифферецируемый по Фреше функционал, L_φ – его дифференциал в точке φ. В [3] показано, что, если

$$\varphi_n(z)=\int_0^{2\pi} g(z,t)d\mu_n(t)-$$

экстремальная функция в задаче

$$\min_{\varphi\in G_\alpha(n,\mu_0)} \operatorname{Re}\left\{F(\varphi)\right\}, \quad \alpha\in[1,\infty), \tag{5}$$

t_j – точки разрыва μ_n и $\theta_j=argd\mu_n(t_j),\ j=1,\dots,k$,то t_j и θ_j удовлетворяют системе

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta_j}(L_{\varphi_n}[g(z,t_m)]-L_{\varphi_n}[g(z,t_j)])\right\}=0\\ \operatorname{Re}\left\{e^{i\theta_j}L_{\varphi_n}[g'_t(z,t_j)]\right\}=0\end{array}\right. \tag{6}$$

для всех j,m, если для всех $j=1,\dots,k\theta_j=\theta=const$. Если же существует по крайней мере 2 различных θ_j, то все $t_j\theta_j$ удовлетворяют системе

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Im}\left\{(e^{i\theta_j}-e^{i\theta_m})(L_{\varphi_n}[g(z,t_j)]-L_{\varphi_n}[g(z,t_m)])\right\}=0\\ \operatorname{Re}\left\{e^{i\theta_j}L_{\varphi_n}[g'_t(z,t_j)]\right\}=0\end{array}\right. \tag{7}$$

Причем, если для нескольких точек разрыва $\mu_n(t)$ $argd\mu_n(t_j)$ в этих точках совпадают, то совпадают и значения $L_{\varphi_n}[g(z,t_j)]$ в этих точках. В [3] также показано, что из системы (7) следует

$$\left\{\begin{array}{l}|L_{\varphi_n}[g(z,t_j)]-c_n|^2=|L_{\varphi_n}[g(z,t_m)]-c_n|^2\\ \operatorname{Re}\left(|L_{\varphi_n}[g_t(z,t)]-c_n|^2\right)'_t|_{t=t_j}=0\end{array}\right. \tag{7'}$$

для некоторого комплексного c_n.

Экстремальные задачи (5) являются промежуточными при рассмотрении экстремальной задачи

$$\min_{\varphi\in G_\alpha} \mathrm{Re}\{F(\varphi)\}, \quad \alpha \in [1,\infty). \tag{8}$$

Из последовательности экстремальных в (5) функций φ_n можно выбрать подпоследовательность равномерно внутри Δ сходящуюся к функции $\varphi_0 \in G_\alpha$, экстремальной в (8). Пусть F – диференцируемый по Фреше функционал на нормированном пространстве регулярных в Δ функций, L_f – его дифференциал в точке f; пусть $f_0(z)$ – экстремальная функция в задаче

$$\min_{f\in U'_\alpha} \mathrm{Re}\left\{F[(logf')^{(n)}]\right\}, \alpha \in [1,\infty),\ n=0,1,2,\dots$$

и существует целое неотрицательное $k \geq 1-n$ такое, что $L_{(logf'_0)^{(n)}}(z^k)\neq 0$. Тогда, как показано в [3], $f_0=\alpha$. Здесь под f – степенью функции $f\in U'_\alpha$ – понимается наименьшее из чисел α_*, таких , что $f\in U'_{\alpha_*}$. Этот результат применим в нашем случае при $n=1$. Следовательно, для экстремальной функции f_0 в (4) $f_0=\alpha$.

С учетом интегрального представления для $f\in U'_\alpha(c)$ задача (4) может быть переписана в виде:

$$\min_{\mu\in I^c_\alpha} \mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi} \frac{2r}{e^{it}-r} d\mu(t)\right\}. \tag{9}$$

Пусть μ_0 — функция, соответствующая $f_0(z)$ в ее интегральном представлении.

$$\int_0^{2\pi} d\mu_0(t) = c \tag{10}$$

(9)— задача типа (8) с $g(z,t)=\frac{2z}{e^{it}-z}$, $F(\varphi(z))=\varphi(|z|)$. Следовательно, переходя к рассмотрению экстремальной задачи (5) с этими $g(z,t)$ и F, т.е к экстремальной задаче

$$\min\left[\mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi} \frac{2r}{e^{it}-r} d\mu(t)\right\} : \mu(t)\in I_\alpha(n), \int_0^{2\pi} d\mu(t) = c\right] \tag{11}$$

надо учитывать, что в условиях $(6),(7),(7')F=L_{\varphi_n}$ для всех n. Заметим, что условия $(6),(7),(7')$ получены с помощью вариационных формул в I_α (см. [3],[4]), которые остаются справедливыми и в I^c_α. Таким образом, при решении задачи (9) можно основываться на $(6),(7),(7')$.

Пусть μ_n — экстремальная функция в (11); $\alpha_n = f_n, f_n \in U'_\alpha(c)$ и ей в интегральном предстевлении соответствует функция μ_n; $M_n = \alpha_n - |c-1|$. Ясно, что

$$\int_0^{2\pi} |d\mu_n(t)| = \alpha_n - |c-1| \longrightarrow_{n\to\infty} \alpha - |c-1|,$$

так как, если для всех $n \in \mathbb{N}$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha_n < \alpha - \varepsilon$, то и $\varphi_n(z) = \int_0^{2\pi} \frac{2z}{e^{it}-z} d\mu_n(t) \in G_{\alpha-\epsilon}$; следовательно, существует $\varphi^{(0)}(z) = \int_0^{2\pi} \frac{2z}{e^{it}-z} d\mu^{(0)}(t)$, экстремальная в задаче (9), $\varphi^{(0)} \in G_{\alpha-\varepsilon}$. Это противоречит тому, что $f_0 = \alpha$ для всех экстремальных функций в (4).

а) Пусть реализуется случай, приводящий к системе (6). Тогда

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left\{e^{i\theta_0}\left(\frac{2r}{e^{it_k}-r} - \frac{2r}{e^{it_j}-r}\right)\right\} = 0 \\ \operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i(\theta_0+t_k)}}{(e^{it_k}-r)^2}\right\} = 0 \quad (\theta_0 = arg d\mu_n(t_j)\ \forall j). \end{cases}$$

Уравнение $\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i(\theta_0+t)}}{(e^{it}-r)^2}\right\} = 0$ приводится к алгебраическому уравнению второй степени относительно e^{it}. Следовательно, функция $\mu_n(t)$ имеет не более двух точек разрыва. Применение же первого условия системы (6) и теоремы Ролля приводит к тому, что функция $\mu_n(t)$ имеет одну точку разрыва t_1. Тогда

$$\operatorname{Re}\varphi_n(z) = \operatorname{Re}\left[\frac{2rc}{e^{it_1}-r}\right] = \min_{t\in[0,2\pi]} \operatorname{Re}\left[\frac{2rc}{e^{it}-r}\right] =$$

$$= 2r|c| \min_{t\in[0,2\pi]} \operatorname{Re}\left[\frac{e^{i\theta}}{e^{it}-r}\right] = \frac{rcos\theta - 1}{1-r^2},$$

здесь $c = |c|e^{i\theta}$. Итак, в рассматриваемом случае минимум в (11) равен

$$\frac{2r^2|c|\cos\theta - 2r|c|}{1-r^2}.$$

б) Перейдем к рассмотрению системы (7′). Из первого ее условия следует, что $L_{\varphi_n}[g(z,t_k)] = \frac{2r}{e^{it_k}-r}$ расположены на окружности с центром c_n, причем второе условие системы (7′) – условие касания кривой $\frac{2r}{e^{it}-r}$ окружности, на которой лежат точки $\frac{2r}{e^{it_k}-r}$, $k \geq 2$. Поэтому окружность, на которой лежат точки $\frac{2r}{e^{it_k}-r}$ есть окружность

$$\left\{\frac{2r}{e^{it}-r},\ t\in[0,2\pi)\right\} \tag{12}$$

Эта окружность имеет для всех n центр $c_n=\frac{2r^2}{1-r^2}$ и радиус $s_n=\frac{2r}{1-r^2}$. Обозначим $a_k=|a_k|e^{i\theta_k}=d\mu_n(t_k)$ для всех точек разрыва t_k функции μ_n. Тогда из равенства

$$(L_1-c_n)e^{i\theta_1}=\ldots=(L_k-c_n)e^{i\theta_k}=\pm s_n \tag{13}$$

(см. [3], (2.14)), где $L_k=L_{\varphi_n}[g(z,t_k)]$, следует для всех к

$$\left(L_k-\frac{2r^2}{1-r^2}\right)a_k=\pm\frac{2r}{1-r^2}|a_k|,$$

$$\sum_k L_ka_k=\left(\sum_k a_k\right)\frac{2r^2}{1-r^2}\pm\frac{2r}{1-r^2}\sum_k|a_k|=\frac{c2r^2}{1-r^2}\pm\frac{2rM_n}{1-r^2}.$$

Тогда в рассматриваемом случае для экстремальной в задаче (11) функции $\mu_n(t)$

$$\operatorname{Re}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{2r}{e^{it}-r}d\mu_n(t)\right\}=\operatorname{Re}\left\{\sum_k L_ka_k\right\}=\frac{2\operatorname{Re}cr^2\pm2M_nr}{1-r^2}.$$

Поэтому ясно, что в последней формуле, а значит и в (13) перед $s_n=\frac{2r}{1-r^2}$ надо взять знак $-$. Из второго условия системы (7) следует

$$e^{i\theta_k}=\pm i\frac{|L'_k|}{L'_k},\quad L'_k=L_{\varphi_n}[g'_t(z,t_k)]. \tag{14}$$

Выбор перед s_n знака $-$ в (13) означает выбор знака $+$ в (14), т.е.

$$e^{i\theta_k}=-\frac{\left(e^{it_k}-r\right)^2}{\left|e^{it_k}-r\right|^2e^{it_k}}.$$

При этом минимум в (11) в рассматриваемом случае будет равен

$$\frac{2\operatorname{Re}cr^2-2M_nr}{1-r^2}.$$

И, ясно, что $M_n = M$, т.к. в качестве $\mu_n(t)$ можно взять любую $n-$ступенчатую функцию с разрывами в точках $t_1, \ldots, t_n$, такую, что

$$\int_0^{2\pi} d\mu_n(t) = c, \ \int_0^{2\pi} |d\mu_n(t)| = \alpha - |c-1| = M,$$

$$d\mu_n(t) = \frac{-\left(e^{it}-r\right)^2}{|e^{it}-r|^2 e^{it}} |d\mu_n(t)|.$$

Очевидно, все такие функции будут экстремальными в (11) в рассматриваемом случае.

Таким образом, в случае б) в (11) для всех n минимум равен $\frac{2\operatorname{Re} cr^2 - 2Mr}{1-r^2}$ и достигается на функциях

$$\varphi_n(z) = \int_0^{2\pi} \frac{-2z\left(e^{it}-r\right)^2}{|e^{it}-r^2|^2 e^{it}\left(e^{it}-z\right)} d\beta_n(t),$$

где $\beta_n(t)$ – любая вещественная неубывающая на $[0, 2\pi]$ $n-$ступенча -тая функция с полной вариацией М, такая, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{-\left(e^{it}-r\right)^2}{|e^{it}-r^2|^2 e^{it}} d\beta_n(t) = c.$$

Следовательно, система (6) не приводит к экстремуму в (11), т.к.

$$\frac{2r^2 \operatorname{Re} c - 2Mr}{1-r^2} \leq \frac{2r^2|c|\cos\theta - 2r|c|}{1-r^2}$$

После перехода к пределу при $n \to \infty$ и применения принципа выбора Э.Хелли и теоремы Э.Хелли о предельном переходе в интеграле Стилтьеса получим, что минимум в задачах (9) и (4) также равен

$$\frac{2\operatorname{Re} cr^2 - 2Mr}{1-r^2}$$

и достигается в (4) на функциях $f_0(z) \in U'_\alpha(c)$ таких, что

$$f_0'(z) = exp\left[2\int_0^{2\pi} log\left(1 - ze^{-it}\right) \frac{\left(e^{it}-r\right)^2}{|e^{it}-r|^2 e^{it}} d\beta(t)\right], \qquad (15)$$

где $\beta(t)$– вещественная, неубывающая на $[0, 2\pi]$ функция с полной вариацией M, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} \frac{-\left(e^{it}-r\right)^2}{\left|e^{it}-r^2\right|^2 e^{it}} d\beta(t) = c.$$

Тогда минимум в задаче (2) равен $1 + \frac{2\operatorname{Re} cr^2 - 2Mr}{1-r^2}$; он неотрицателен при

$$r \geq r^*(\alpha, c) = \frac{M - \sqrt{M^2 - 2\operatorname{Re} c + 1}}{2\operatorname{Re} c - 1} = \frac{1}{M + \sqrt{M^2 - 2\operatorname{Re} c + 1}}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 ясно, что если функция f_0 такая, как в (15), то $\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf_0''(z)}{f_0'(z)}\right\} > 0$ в $\Delta_{r^*(\alpha,c)}$, но при $r > r^*(\alpha, c)$ существует $z \in \Delta_r : \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf_0''(z)}{f_0'(z)}\right\} < 0$.

Найдем радиус звездообразности $R^*(\alpha)$ класса

$$\mathcal{F}_\alpha = \left\{F(z) : F(z) = zf'(z),\ f \in U'_\alpha\right\}.$$

Теорема 2. *Радиус звездообразности класса $\mathcal{F}_\alpha$ равен*

$$R^*_\alpha = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}.$$

Доказательство. Радиус звездообразности $R^*(\alpha) = \min_c r^*(\alpha, c)$. Как показано в (5), для $\alpha > 1$ и $\mu \in I_\alpha$ множество значений функционала $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = c$ – эллипс

$$E = \left\{c \in \mathbb{C} : \frac{(\operatorname{Re} c - \frac{1}{2})^2}{\frac{\alpha^2}{4}} + \frac{(\operatorname{Im} c)^2}{\frac{\alpha^2-1}{4}} \leq 1\right\}.$$

Этот эллипс имеет фокусы в точках 0 и 1 и большую полуось $\frac{\alpha}{2}$. Ясно, что мы найдем $\min_c r^*(\alpha, c)$, если найдем

$$\max_{c \in E}\left[\alpha - |c-1| + \sqrt{(\alpha - |c-1|)^2 - 2\operatorname{Re} c + 1}\right]. \tag{16}$$

Мы получим в (16) максимум при минимальных $|c-1|$ и $\operatorname{Re} c$. Зафиксируем $\operatorname{Re} c$, тогда $|c-1|$ будет минимальным, если с вещественно, т.е. максимум в (16) достаточно рассматривать для вещественных с. Поэтому он равен $\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}$, а

$$R^*(\alpha)=\frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Теорема доказана.

□

Замечание 2. Из доказательств теорем 2 и 3 ясно, что если функция $f_0(z)$ такая, как в (15) с $c=1$, то $\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf_0''(z)}{f_0'(z)}\right\}>0$ в $\Delta_{R^*(\alpha)}$, но при $R>R^*(\alpha)$ существует $z\in\Delta_R:\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf_0''(z)}{f_0'(z)}\right\}<0$. Поскольку $U'_\alpha\subset U_\alpha$ для всех $\alpha\geq1$, то естественно рассмотреть расширение

$$\mathcal{F}^0_\alpha=F(z):\ F(z)=zf'(z),\ f\in U_\alpha$$

класса $\mathcal{F}_\alpha$ и в этом классе тоже найти радиус звездообразности $R^*_0(\alpha)$. Очевидно, что $R^*_0(\alpha)\leq R^*(\alpha)$.

Теорема 3. *Радиус звездообразности класса $\mathcal{F}^0_\alpha$ равен*

$$R^*_0(\alpha)=\frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Доказательство. Пусть $F(z)=zf'(z)\in\mathcal{F}^0_\alpha,\ f\in U_\alpha$. Радиусом выпуклости R^c класса A локально однолистных функций $f(z)=z+\dots$ называется верхняя граница радиусов кругов Δ_r таких, что $f(\Delta_r)$– выпуклая область для любой функции $f\in A$. Условие звездообразности области $F(\Delta_r)$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\}\geq0\Longleftrightarrow\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\geq0-$$

условие выпуклости $f(\Delta_r)$. Поэтому радиус звездообразности класса $\mathcal{F}^0_\alpha$ равен радиусу выпуклости U_α, т.е. (см. [2]) равен $\frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}$.

Теорема доказана. □

Замечание 3. Таким образом, получили, что радиус звездообразности класса $\mathcal{F}_\alpha$ совпадает с радиусом звездообразности класса $\mathcal{F}^0_\alpha$: $R^*(\alpha)=R^*_0(\alpha)$.

Найдем радиус выпуклости порядка $\beta \in (0,1)$ класса U_α.Это – верхняя граница чисел $r \in (0,1)$, для которых

$$\min_{|z|=r} \operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \geq \beta,\ \forall f \in U_\alpha.$$

Теорема 4. *Радиус выпуклости порядка β класса U_α равен*

$$R^c_\beta(\alpha) = \frac{1-\beta}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-(1-\beta)^2}}.$$

Доказательство. Пусть $f(z) \in U_\alpha$. Тогда (см. [2])

$$\sup_{z\in\Delta}\left|-\overline{z}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq \alpha.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq \frac{r^2-2\alpha r+1}{1-r^2} \geq \beta \Longleftrightarrow$$

$$r \leq \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}{1+\beta}.$$

Неравенство точное; равенство достигается для функции

$$R(z) = \left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right]\frac{1}{2\alpha}.$$

Следовательно,

$$R^c_\beta(\alpha) = \frac{1-\beta}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-(1-\beta^2)}}.$$

Теорема доказана.

□

Литература

[1] Dimkov G. *On products of starlike functions* // Polonici mathematici, N55,—1991,— C.75–79.

[2] Pommerenke Ch.*Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.I,*// Math. Ann.,— 1964,— Hf.155,— C.108–154.

[3] Старков В.В. *О некоторых линейно–инвариантных семействах функций, имеющих интегральное представление.*// Деп. ВИНИТИ N 3341,—1981,—С.1–46.

[4] Старков В.В. *О некоторых линейно-инвариантных семействах функций, имеющих интегральное представление.*// Известия вузов (математика),— 1983,— N 5,—С. 82–85.

[5] Bartnik D. *On some class of functions generated by complex functions of bounded variation.*// Ann., Univ. Mariae Curie–Sklodowska,—1995,—C.1–13.