Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 3, 1996

УДК 517

О КЛАССАХ НИКОЛЬСКОГО — БЕСОВА НА КОМПАКТНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ РАНГА 1

С. С. Платонов

Пусть M — произвольное компактное риманово симметрическое пространство ранга 1. В работе изучаются функциональные пространства $B^r_{p,q}(M)$ типа классических пространств Никольского — Бесова. Дается новое определение классов $B^r_{p,q}(M)$ на M через модуль непрерывности k-го порядка на M, который вводится при помощи разностей вдоль геодезических на многообразии M. Получено эквивалентное описание пространств $B^r_{p,q}(M)$ через наилучшие приближения функций сферическими полиномами, т. е. линейными комбинациями собственных функций оператора Лапласа — Бельтрами на M.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

В последние годы активно изучаются различные вопросы теории приближений функций и теории функциональных пространств на n-мерной сфере (см. [1–3] и приводимую там литературу). Естественным более широким классом пространств, на которых можно ставить аналогичные задачи, является множество всех компактных симметрических пространств ранга 1 (КРОСПов, по терминологии из книги [4]). Для этих пространств уже получены некоторые результаты (см. [5–11]), но остается еще много задач. В настоящей работе на произвольном КРОСПе M вводятся функциональные пространства

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 95–01–01391.

$B^r_{p,q}(M)$ типа классических пространств Никольского — Бесова. Естественное определение пространств Никольского — Бесова зависит от модуля непрерывности, а так как на КРОСПах существуют различные определения модулей непрерывности, то возможны и различные определения этих пространств. В настоящей работе применяется модуль непрерывности из работы [9], в котором используется переход от многообразия M к многообразию единичных касательных векторов пространства M. Основными результатами работы является получение эквивалентного описания пространств $B^r_{p,q}(M)$ через наилучшие приближения функций сферическими полиномами на M и построение различных нормировок в этих пространствах. Из полученного описания, в частности, следует, что введенные классы $B^r_{p,q}(M)$ совпадают с классами Никольского – Бесова, введенными в [10] при помощи других модулей непрерывности.

Хорошо известна полная классификация всех КРОСПов . Их всего четыре серии (индекс n всюду означает размерность многообразия): сферы S^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, вещественные, комплексные и кватернионные проективные пространства ($P^n(\mathrm{R})$ $(n = 2, 3, 4. \ldots)$, $P^n(\mathrm{C})$ $(n = 4, 6, 8, \ldots)$, $P^n(\mathrm{H})$ $(n = 8, 12, 16, \ldots)$) и одно особое пространство — эллиптическая плоскость Кэли $P^{16}(Cay)$. КРОСП M всегда является римановым многообразием. Пусть Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на M. Спектр оператора Δ является дискретным, действительным и неположительным. Упорядочим его по убыванию $(0 = \lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots)$ и обозначим через $\mathcal{H}_k$ собственное подпространство (всегда конечномерное) оператора Δ, отвечающее собственному значению λ_k. Пусть $\mathcal{P}_m(M) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \ldots + \mathcal{H}_m$. Функции из $\mathcal{P}_m(M)$ будем называть сферическими полиномами на M степени m (при $M = S^n$ они совпадают с обычными сферическими полиномами).

Для любого множества X с мерой $d\mu$ через $L_p(X, d\mu)$ будем обозначать, как обычно, банахово пространство (БП), состоящее из измеримых комплекснозначных функций $f(x)$ на X с конечной нормой

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(X)} = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Если X — компактное топологическое пространство, то пусть $L_\infty(X) = C(X)$ — пространство непрерывных на M функций с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C = \max_{x \in X} |f(x)|.$$

В частности, если M — КРОСП, то возникают банаховы пространства $L_p(M) = L_p(M, dx)$ и $L_\infty(M) = C(M)$, где dx — элемент римановой меры на M.

Наилучшим приближением функции $f(x) \in L_p(M)$ сферическими полиномами степени m в метрике L_p называется число

$$E_m(f)_p = \inf_{\Phi \in \mathcal{P}_m} \|f - \Phi\|_p.$$

Для $x \in M$ пусть $T_x M$ — множество касательных векторов к многообразию M в точке x, $S(x)$ — множество единичных касательных векторов (единичная сфера) в точке x. Обозначим через U группу всех изометрий КРОСПа M.

Пусть B — многообразие единичных касательных векторов к многообразию M. Точки многообразия B имеют вид (x, ξ), где $x \in M$, $\xi \in S(x)$. Группа U естественным образом действует на B, если положить $u\,(x, \xi) = (ux,\, u_*\xi)$, где u_* — индуцированное отображение касательных векторов. Это действие транзитивно (т. е. M изотропно, см. [12, гл.I, §4] и [13, гл.IX, §5]), поэтому на B существует единственная, с точностью до умножения на число, U-инвариантная мера $dv(x, \xi)$ (см., например, [12, гл.I, теор.1.9]). Пусть $L_p(B) = L_p(B, dv)$, $1 \le p < \infty$, и $L_\infty(B) = C(B)$. Естественным образом $L_p(M)$ вкладывается в $L_p(B)$, если для $f(x) \in L_p(M)$ положить $f(x, \xi) = f(x)$. Нормируем меру dv на B так, чтобы выполнялось условие

$$\int_M dx = \int_B dv. \tag{1.1}$$

При введенной нормировке для любой функции $f(x) \in C(M)$

$$\int_M f(x)\,dx = \int_B f(x)\,dv. \tag{1.2}$$

Так как $C(M)$ всюду плотно в $L_p(M)$, то отсюда легко получить, что

$$\|f\|_{L_p(M)} = \|f\|_{L_p(B)} \quad \forall \in L_p(M). \tag{1.3}$$

Следовательно, вложение $L_p(M) \subseteq L_p(B)$ изометрическое. В дальнейшем через $\|f\|_p$ будет обозначаться норма в пространстве $L_p(M)$ или $L_p(B)$ в зависимости от того, в каком из этих пространств содержится функция f.

Для $(x,\xi)\in B$ пусть $\gamma(x,\xi;t)$ — геодезическая на M (t — параметр), удовлетворяющая условиям $\gamma(x,\xi;0)=x$ и $\frac{d}{dt}\gamma(x,\xi;t)\big|_{t=0}=\xi$. Для любой функции $F(x,\xi)\in L_p(B)$ пусть

$$F^t(x,\xi)=F(\gamma(x,\xi;t),\frac{d}{dt}\gamma(x,\xi;t)). \tag{1.4}$$

Нетрудно показать (см. [9]), что отображение

$$F\mapsto F^t,\quad t\in \mathrm{R},$$

задает однопараметрическую группу унитарных операторов в $L_p(B)$, т. е.

$$(F^t)^s=F^{t+s}\quad \forall t,s\in\mathrm{R}; \tag{1.5}$$
$$\|F^t\|_p=\|F\|_p\quad \forall F\in L_p(B). \tag{1.6}$$

Определим k-ю разность функции F с шагом t формулой

$$\tilde\Delta_t^k F(x,\xi)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\mathrm{C}_k^j\,F^{jt}(x,\xi),$$

где C_k^j — биномиальные коэффициенты. Модуль непрерывности порядка k функции $F\in L_p(B)$ определим формулой

$$\omega_k(F,\delta)_p=\sup_{0<t\le\delta}\|\tilde\Delta_t^kF\|_p.$$

В частности, можно брать и $\omega_k(f,\delta)$ при $f\in L_p(M)$.

Будем говорить, что функция $F\in L_p(B)$ дифференцируема в $L_p(B)$, если для некоторой функции $G(x,\xi)\in L_p(B)$

$$\|\frac{1}{t}(F^t-F)-G\|_p\to 0\quad\text{при}\quad t\to 0.$$

Функция G называется производной от F и обозначается, как обычно, $G=F'$. Функция F дифференцируема r-раз в $L_p(B)$, если $F\in L_p(B)$ и существуют производные $F',F'',\dots F^{(r)}\in L_p(B)$, где $F^{(k)}=\big(F^{(k-1)}\big)'$. В частности, можно брать r-ю производную $f^{(r)}$ для функции $f(x)\in L_p(M)$, отметим только, что $f^{(r)}$ — это уже функция на B.

Известно (см. [13, гл. IX,§5]), что на любом КРОСПе M все геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину $2L$. Риманова метрика на M определена с точностью до умножения на положительное число. Для удобства нормируем риманову метрику так, чтобы $L = \pi$.

Определение 1. *Пусть $r > 0$; $1 \le p, q \le \infty$; числа k и l — целые неотрицательные, удовлетворяющие условию $k > r - l > 0$. Совокупность функций $f \in L_p(M)$, для которых конечно выражение*

$$b^r_{p,q}(f) := \left(\int_0^\pi \frac{\left(\omega_k(f^{(l)}, \delta)_p\right)^q}{\delta^{1+(r-l)q}} \, d\delta \right)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty, \tag{1.7}$$

$$b^r_{p,\infty}(f) = h^r_p(f) := \sup_{0<\delta\le\pi} \delta^{-(r-l)} \omega_k(f^{(l)}, \delta)_p, \quad q = \infty, \tag{1.8}$$

назовем пространством Никольского — Бесова $B^r_{p,q}(M) = B^r_{p,q}$. В частном случае при $q = \infty$ пространство $B^r_{p,\infty}$ будем также обозначать $H^r_p(M) = H^r_p$.

Легко видеть, что норма

$$\|f\|_{B^r_{p,q}} := \|f\|_p + b^r_{p,q}(f) \tag{1.9}$$

превращает $B^r_{p,q}$ в банахово пространство.

Главным результатом работы является следующая теорема, дающая описание пространства $B^r_{p,q}$ через наилучшие приближения.

Теорема 1. *Для того чтобы функция f из $L_p(M)$ принадлежала пространству $B^r_{p,q}$, необходимо и достаточно, чтобы была конечна величина*

$$\tilde{b}^r_{p,q}(f) = \bigl(\sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq} \, E^q_{a^j}(f)_p\bigr)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty, \tag{1.10}$$

$$\tilde{b}^r_{p,\infty}(f) = \sup_{j=0,1,2,\ldots} a^{jr} \, E_{a^j}(f), \quad q = \infty, \tag{1.11}$$

где a — произвольное целое число большее 1 (можно считать, например, что $a = 2$). При этом выражение

$$\|f\|_p + \tilde{b}^q_{p,q}(f)$$

является нормой в $B^r_{p,q}$, эквивалентной норме (1.9).

Доказательство теоремы 1 будет следовать из результатов §3–4 о различных эквивалентных нормировках в пространствах H_p^r и $B_{p,q}^r$. В §2 доказываются вспомогательные результаты.

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что определение пространства $B_{p,q}^r$ не зависит от выбора чисел k и l, удовлетворяющих условию $k > r - l > 0$, и при различных k, l нормы (1.9) эквивалентны.

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что пространства $B_{p,q}^r(M)$ совпадают с пространствами Никольского — Бесова из работы [10] с точностью до эквивалентности норм.

Замечание 3. Для случая $M = S^n$ приведенное определение пространств $B_{p,q}^r$ и формулировка теоремы 1 (без доказательства) фактически даны П. И. Лизоркиным в [14], так как легко видеть (с учетом формулы (2.3) настоящей работы), что введенный в [14] модуль непрерывности ${}^p\omega_k(f,\delta)_p$ с точностью до множителя совпадает с модулем непрерывности $\omega_k(f,\delta)_p$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Оценка сверху наилучшего приближения функции через ее модуль непрерывности дается следующей теоремой Джексоновского типа.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x) \in L_p(M)$ и d-раз дифференцируема в $L_p(B)$. Тогда*

$$E_m(f)_p \leq \frac{c}{m^d}\omega_k\big(f^{(d)}, \frac{\pi}{m}\big)_p, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от f и m.

◁ См. [9, теор. 2]. ▷

Лемма 1. (свойства модуля непрерывности)

Для любой функции $F \in L_p(B)$ справедливы неравенства

$$\omega_k(F,\delta)_p \leq \omega_k(F,\lambda)_p \quad \text{при} \quad \delta \leq \lambda, \tag{2.1}$$

$$\omega_k(F,l\delta)_p \leq (l+1)^k\,\omega_k(F,\delta)_p, \tag{2.2}$$

где $l > 0$ — произвольное число.
◁ См. [9, лемма 2]. ▷

Для доказательства обратных теорем теории приближений используются неравенства типа Бернштейна, которые и будут получены далее (см. леммы 3, 5, 6).

Лемма 2. *Пусть $\Phi(x) \in \mathcal{P}_m$. Для любых $(x,\xi) \in B$ функция $\varphi(t) = \Phi(\gamma(x,\xi;t))$ является тригонометрическим полиномом степени m.*

$\triangleleft$ Следует из леммы 3.1 в [11]. $\triangleright$

Как и раньше, пусть $S(x)$ — единичная сфера в касательном пространстве T_xM. Пусть $d\sigma_x(\xi)$ — элемент объема сферы $S(x)$, а σ — полный объем этой сферы.

Из свойств инвариантных мер на однородных многообразиях (см. [12, гл.I, §1, предл. 1.13]) следует, что для любой функции $F(x,\xi) \in L_1(B)$ справедлива формула

$$\int\limits_M \Big(\int\limits_{S(x)} F(x,\xi)\, d\sigma_x(\xi)\Big)\, dx = A \int\limits_B F(x,\xi)\, dv(x,\xi), \tag{2.3}$$

где $A > 0$ — некоторая постоянная. Если в (2.3) подставить $F \equiv 1$ и воспользоваться условием нормировки (1.1), то получим, что $A = \sigma$.

Для $(x,\xi) \in B$, $t \in \mathrm{R}$ и $k \in \mathrm{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ положим

$${}_t\partial_\xi^k f(x) = \frac{d^k}{ds^k} f(\gamma(x,\xi;s))\Big|_{s=t}. \tag{2.4}$$

Заметим, что функция $F(x,\xi) = {}_0\partial_\xi^k f(x)$ совпадает с k-й производной $f^{(k)}(x,\xi)$ от функции $f(x)$ в пространстве $L_p(B)$. Кроме того,

$${}_t\partial_\xi^k f(x) = f^{(k)}\big(\gamma(x,\xi;t); \frac{d}{dt}\gamma(x,\xi;t)\big). \tag{2.5}$$

Лемма 3. *Пусть $\Phi(x) \in \mathcal{P}_m$. Тогда для любых $k, l \in Z_+$ выполняется неравенство*

$$|{}_t\partial_\xi^{k+l}\Phi(x)| \le m^k\, \|\Phi^{(l)}(x,\xi)\|_\infty. \tag{2.6}$$

$\triangleleft$ По лемме 2 $\Phi(\gamma(x,\xi;t))$ — тригонометрический полином степени m, поэтому можно воспользоваться классическим неравенством Бернштейна

$$|\frac{d^{k+l}}{dt^{k+l}}\Phi(\gamma(x,\xi;t))| \le m^k \max_{0\le s\le 2\pi} |\frac{d^l}{ds^l}\Phi(\gamma(x,\xi;s))|.$$

С учетом (2.5) заметим, что

$$|\frac{d^l}{ds^l}\Phi(\gamma(x,\xi;s))| \le \|\Phi^{(l)}\|_\infty,$$

откуда и следует (2.6). ▷

Для любой функции $F(x,\xi)$ на B определим "усредненную"функцию $F_0(x,\xi)$ формулой

$$F_0(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\big(\gamma(x,\xi;t), \frac{d}{dt}\gamma(x,\xi;t)\big)\,dt. \tag{2.7}$$

Введем обозначение

$$I(F) := \int_B F(x,\xi)\,dv(x,\xi). \tag{2.8}$$

Лемма 4. *Если $F(x,\xi)$ — непрерывная функция на B, то*

$$I(F) = I(F_0). \tag{2.9}$$

◁ См. [11, лемма 3.3]. ▷

Лемма 5. *Пусть $\Phi(x) \in \mathcal{P}_m$. Тогда для любых $t \in R$, $k,l \in Z_+$, $1 \le p \le \infty$ справедливо неравенство*

$$\|{}_t\partial_\xi^{k+l}\Phi(x)\|_p \le m^k\,\|\Phi^{(l)}\|_p. \tag{2.10}$$

◁ При $p=\infty$ неравенство сразу следует из леммы 3. Пусть $p<\infty$, тогда

$$\|{}_t\partial_\xi^{k+l}\Phi(x)\|_p^p = \int_B |{}_t\partial_\xi^{k+l}\Phi(x)|^p\,dv(x,\xi).$$

Пусть

$$F(x,\xi) := |{}_t\partial_\xi^{k+l}\Phi(x)|^p = \big|\frac{d^{k+l}}{dt^{k+l}}\Phi(\gamma(x,\xi;t))\big|^p.$$

Очевидно, что

$$F\big(\gamma(x,\xi;s), \frac{d}{ds}\gamma(x,\xi;s)\big) = \big|\frac{d^{k+l}}{dt^{k+l}}\Phi(\gamma(x,\xi;t+s))\big|^p.$$

Пользуясь 2π-периодичностью функции $\Phi(\gamma(x,\xi;t))$ по t, получим

$$F_0(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\big(\gamma(x,\xi;s), \frac{d}{ds}\gamma(x,\xi;s)\big)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{d^{k+l}}{dt^{k+l}} \Phi(\gamma(x,\xi;t)) \right|^p dt.$$

Так как $\varphi(t) = \Phi(\gamma(x,\xi;t))$ — тригонометрический полином степени m, то из обычного неравенства Бернштейна в метрике L_p^* (см. [15, §2.5]) следует, что

$$F_0(x,\xi) \le \frac{m^{pk}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{d^l}{dt^l} \Phi(\gamma(x,\xi;t)) \right|^p dt.$$

Применяя лемму 4, получим

$$\begin{aligned} I(F) = I(F_0) &\le \frac{m^{pk}}{2\pi} I\left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{d^l}{dt^l} \Phi(\gamma(x,\xi;t)) \right|^p dt \right) = \\ &= \frac{m^{pk}}{2\pi} \int_0^{2\pi} I\left(\left| \frac{d^l}{dt^l} \Phi(\gamma(x,\xi;t)) \right|^p \right) dt = \\ &= \frac{m^{pk}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\Phi^{(l)}(x,\xi)\|_p^p \, dt = m^{pk} \|\Phi^{(l)}\|_p^p, \end{aligned}$$

откуда и следует (2.10). ▷

Следствие. *При* $\Phi \in \mathcal{P}_m$, $k \in Z_+$

$$\|\Phi^{(k)}\|_p \le m^k \|\Phi\|_p. \tag{2.11}$$

◁ Достаточно в неравенстве (2.10) взять $t = 0$, $l = 0$. ▷

Лемма 6. *Если* $\Phi(x) \in \mathcal{P}_m$, *то для любых* $1 \le p \le \infty$, $t > 0$, $k, l \in Z_+$ *справедливо неравенство*

$$\|\tilde{\Delta}_t^k \Phi^{(l)}(x,\xi)\|_p \le (mt)^k \, \|\Phi^{(l)}(x,\xi)\|_p. \tag{2.12}$$

◁ Для любой достаточно гладкой функции $F(x,\xi)$ на B разность $\tilde{\Delta}_t^k F(x,\xi)$ можно представить в виде

$$\tilde{\Delta}_t^k F(x,\xi) = \int_0^t \dots \int_0^t \frac{d^k}{d\tau^k} \Phi(\gamma(x,\xi;\tau)) \Big|_{\tau = t_1 + \ldots + t_k} dt_t \ldots dt_k.$$

В частности, с учетом (2.5)

$$\tilde{\Delta}_t^k \Phi^{(l)}(x,\xi) = \int_0^t \dots \int_0^t \frac{d^k}{d\tau^k} \Phi^{(l)}(\gamma(x,\xi;\tau)) \Big|_{\tau = t_1 + \ldots + t_k} dt_t \ldots dt_k =$$

$$= \int_0^t \dots \int_0^t {}_{t_1+\ldots+t_k}\partial_\xi^{k+l}\Phi(x)\,dt_1\dots dt_k.$$

Пользуясь леммой 5, получаем, что

$$\big\|\tilde\Delta_t^k\Phi^{(l)}(x,\xi)\big\|_p = \int_0^t \dots \int_0^t \big\|{}_{t_1+\ldots+t_k}\partial_\xi^{k+l}\Phi(x)\big\|_p\,dt_1\dots dt_k \le$$
$$\le t^k m^k \|\Phi^{(l)}\|_p. \quad \triangleright$$

§ 3. Эквивалентные нормировки пространств H_p^r

Пусть $r > 0$, $1 \le p \le \infty$, k и l — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $k > r-l > 0$. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит пространству ${}^jH_p^r$, $j = 1,2,3,4,5$, если $f \in L_p(M)$ и конечна полунорма ${}^jh_p^r(f)$, где

$${}^1h_p^r(f) = h_p^r(f) := \sup_{0<\delta\le\pi} \delta^{-(r-l)}\,\omega_k(f^{(l)},\delta)_p$$

(π здесь можно заменить любым положительным числом);

$$\begin{aligned}
{}^2h_p^r(f) &:= \sup_{\delta>0} \delta^{-(r-l)}\omega_k(f^{(l)},\delta)_p;\\
{}^3h_p^r(f) &:= \sup_{m\in\mathbb{Z}_+} m^r\,E_m(f)_p;\\
{}^4h_p^r(f) &:= \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} a^{sr}\,E_{a^s}(f)_p \qquad (a>0, \quad \text{целое});\\
{}^5h_p^r(f) &:= \inf\big(\sup_{s\in\mathbb{Z}_+} a^{sr}\|Q_{a^s}\|_p\big),
\end{aligned}$$

где нижняя грань берется по всем представлениям f в виде суммы сходящегося в $L_p(M)$ ряда по сферическим полиномам

$$f(x) = \sum_{s=0}^\infty Q_{a^s}(x), \qquad Q_{a^s}(x) \in \mathcal{P}_{a^s}.$$

Пространства ${}^jH_p^r$ являются банаховыми пространствами относительно норм

$$\|f\|_{{}^jH_p^r} := \|f\|_p + {}^jh_p^r(f). \tag{3.1}$$

Теорема 3. *Пространства ${}^jH^r_p$, $j = 1, \dots 5$, совпадают и их нормы (3.1) эквивалентны (т. е. банаховы пространства ${}^jH^r_p$ эквивалентны).*

Теорема 3 будет доказана ниже. Из эквивалентности БП ${}^1H^r_p$ и ${}^4H^r_p$ следует теорема 1 для случая $q = \infty$, так как $H^r_p = B^r_{p,\infty}$. Общая схема доказательства теоремы 3 соответствует схеме доказательств аналогичных теорем в [15] для евклидова пространства.

Будем далее для краткости писать ${}^jH = {}^jH^r_p$, $E_N(f) = E_N(f)_p$, $\|f\| = \|f\|_p$ и т. д. Через c, $c_1\, c_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные в оценках, вообще говоря, разные в разных местах, зависящие от несущественных параметров, таких как $p, q, r, l, k, \dots$. Выражение $E_1 \hookrightarrow E_2$ будет обозначать, что БП E_1 вложено в БП E_2.

Доказательство теоремы 3.

1^0. Эквивалентность пространств ${}^3H$ и ${}^4H$ устанавливается совсем просто. С одной стороны, ${}^4h(f) \le {}^3h(f)$. С другой стороны, для $m \in \mathrm{Z}_+$ подберем число $s \in \mathrm{Z}_+$ так, чтобы $a^s < m \le a^{s+1}$. Тогда

$$m^r\, E_m(f) \le a^r a^{sr} E_{a^s}(f) \le a^r\, {}^4h(f).$$

Следовательно, ${}^3h(f) \le c\, {}^4h(f)$, где $c = a^r$.

2^0. Вложение ${}^2H \hookrightarrow {}^1H$ очевидно. Докажем, что ${}^1H \hookrightarrow {}^4H$.

Пусть $f \in {}^1H$, тогда при $0 < \delta \le \pi$

$$\omega_k(f^{(l)}, \delta) \le {}^1h(f)\, \delta^{r-l}. \tag{3.2}$$

Из теоремы 2 следует, что

$$E_m(f) \le c\, m^{-l} \omega_k(f^{(l)}, \frac{\pi}{m}). \tag{3.3}$$

Тогда из (3.2) и (3.3)

$$E_{a^s}(f) \le \frac{c}{a^{sl}} \omega_k\big(f^{(l)}, \frac{\pi}{a^s}\big) \le \frac{c}{a^{sl}} {}^1h(f) \frac{\pi^{l-r}}{a^{s(l-r)}} = c_1 \frac{{}^1h(f)}{a^{sr}}.$$

Следовательно,

$${}^4h(f) \le c_1 {}^1h(f),$$

откуда следует вложение ${}^1H \hookrightarrow {}^4H$.

3^0. Докажем, что ${}^4H \hookrightarrow {}^5H$. Пусть $f \in {}^4H$. Обозначим через g_{a^s} сферический полином степени a^s такой, что

$$\|f - g_{a^s}\| \le 2\, E_{a^s}(f),$$

и положим

$$Q_{a^0} = g_{a^0}, \quad Q_{a^s} = g_{a^s} - g_{a^{s-1}} \text{ при } s \ge 1.$$

Тогда в метрике $L_p(M)$

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s},$$

так как $E_{a^s}(f) \to 0$ при $s \to \infty$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} &\|Q_{a^0}\| \le \|f\| + 2\, E_{a^0}(f) \le 3\|f\|, \\ &\|Q_{a^s}\| \le \|g_{a^s} - f\| + \|f - g_{a^{s-1}}\| \le 4\, E_{a^{s-1}}(f), \quad s \ge 1. \end{aligned}$$

Считая, что $E_{a^s}(f) = 0$ при $s = -1$, получим, что при любом $s \in \mathrm{Z}_+$

$$a^{sr}\|Q_{a^s}\| \le 3\|f\| + 4a^{sr} E_{a^{s-1}}(f). \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует неравенство

$${}^5h(f) \le c(\|f\| + {}^4h(f)),$$

а из него следует вложение ${}^4H \hookrightarrow {}^5H$.

4^0. Докажем теперь вложение ${}^5H \hookrightarrow {}^2H$. Пусть $f \in {}^5H$, $\varepsilon > 0$, тогда f можно представить в виде суммы сходящегося в L_p ряда

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s},$$

где $Q_{a^s} \in \mathcal{P}_{a^s}$ и

$$a^{sr}\|Q_{a^s}\| \le {}^5h(f) + \varepsilon. \tag{3.5}$$

Из неравенства (2.11) следует, что

$$\|Q_{a^s}^{(l)}\| \le (a^s)^l a^{-sr} \left({}^5h(f) + \varepsilon\right) = a^{-s(r-l)} \left({}^5h(f) + \varepsilon\right). \tag{3.6}$$

Так как $r - l > 0$, то из (3.6) видно, что ряд $\sum Q^{(l)}_{a^s}$ сходится в $L_p(B)$, следовательно,

$$f^{(l)} = \sum_{s=0}^{\infty} Q^{(l)}_{a^s} \in L_p(B).$$

Далее

$$\tilde{\Delta}^k_t f^{(l)} = \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{\Delta}^k_t Q^{(l)}_{a^s}.$$

При $t \geq 1$, пользуясь (3.6) и очевидным неравенством

$$\|\tilde{\Delta}^k_t F\| \leq 2^k \|F\|, \tag{3.7}$$

получаем

$$\frac{\|\tilde{\Delta}^k_t f^{(l)}\|}{t^{r-l}} \leq 2^k ({}^5h(f) + \varepsilon) \sum_{s=0}^{\infty} a^{-s(r-l)} \leq c_1 \left({}^5h(f) + \varepsilon\right). \tag{3.8}$$

Пусть $0 < t < 1$. Подберем $N \in \mathrm{Z}_+$ так, чтобы

$$a^{-(N+1)} < t \leq a^{-N}.$$

Тогда

$$\|\tilde{\Delta}^k_t f^{(l)}\| \leq \sum_{s=0}^{N} \|\tilde{\Delta}^k_t Q^{(l)}_{a^s}\| + \sum_{s=N+1}^{\infty} \|\tilde{\Delta}^k_t Q^{(l)}_{a^s}\| = I_1 + I_2. \tag{3.9}$$

Оценим отдельно слагаемые I_1 и I_2 в (3.9). При оценке I_1 воспользуемся леммой 6:

$$I_1 \leq \sum_{s=0}^{N} t^k a^{sk} \|Q^{(l)}_{a^s}\| \leq t^k \sum_{s=0}^{N} a^{sk} a^{-s(r-l)} \left({}^5h(f) + \varepsilon\right) =$$

$$= t^k \left({}^5h(f) + \varepsilon\right) \sum_{s=0}^{N} a^{s(l+k-r)} \leq t^k \left({}^5h(f) + \varepsilon\right) \frac{a^{(N+1)(l+k-r)}}{a^{l+k-r} - 1} \leq$$

$$\leq c_2 t^k \left({}^5h(f) + \varepsilon\right) t^{-(l+k-r)} = c_2 t^{r-l} \left({}^5h(f) + \varepsilon\right). \tag{3.10}$$

Для оценки I_2 воспользуемся (3.7)

$$I_2 \leq 2^k \sum_{s=N+1}^{\infty} \|Q^{(l)}_{a^s}\| \leq 2^k \left({}^5h(f) + \varepsilon\right) \sum_{s=N+1}^{\infty} a^{-s(r-l)} \leq$$

$$\leq c_3 \left({}^5h(f)+\varepsilon\right) a^{-(N+1)(r-l)} \leq c_3\, t^{r-l} \left({}^5h(f)+\varepsilon\right). \tag{3.11}$$

Из оценок (3.8), (3.10), (3.11) получаем, что

$$t^{-(r-l)} \|\tilde{\Delta}_t^k f^{(l)}\| \leq c_4 \left({}^5h(f)+\varepsilon\right). \tag{3.12}$$

Так как t и ε произвольные, то из (3.12) следует, что

$${}^2h(f) \leq c_4\, {}^5h(f),$$

откуда следует вложение ${}^5H \hookrightarrow {}^2H$.

Окончательно получена цепочка вложений

$${}^2H \hookrightarrow {}^1H \hookrightarrow {}^4H \hookrightarrow {}^5H \hookrightarrow {}^2H,$$

что и завершает доказательство теоремы 3.

§ 4. Эквивалентные нормировки пространств $B^r_{p,q}$

Пусть $r > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, $k, l \in \mathrm{Z}_+$, $k > r - l > 0$. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит пространству ${}^jB^r_{p,q}$, $j = 1, 2, 3, 4$, если $f \in L_p(M)$ и конечна полунорма ${}^j b^r_{p,q}(f)$, где

$${}^1b^r_{p,q}(f) := b^r_{p,q}(f) = \left(\int_0^\pi \frac{(\omega_k(f^{(l)},\delta))^q}{\delta^{1+(r-l)q}}\, d\delta\right)^{1/q}$$

(π здесь можно заменить любым положительным числом);

$${}^2b^r_{p,q}(f) := \left(\int_0^\infty \frac{(\omega_k(f^{(l)},\delta))^q}{\delta^{1+(r-l)q}}\, d\delta\right)^{1/q};$$

$${}^3b^r_{p,q}(f) := \left(\sum_{s=0}^\infty a^{srq}\, E^q_{a^s}(f)_p\right)^{1/q} \qquad (a > 1,\ \text{целое });$$

$${}^4b^r_{p,q}(f) := \inf \left(\sum_{s=0}^\infty a^{srq} \|Q_{a^s}\|_p^q\right)^{1/q},$$

где нижняя грань берется по всем представлениям f в виде сходящегося в $L_p(M)$ ряда из сферических полиномов

$$f(x) = \sum_{s=0}^\infty Q_{a^s}(x), \qquad Q_{a^s} \in \mathcal{P}_{a^s}.$$

Пространства ${}^jB^r_{p,q}$ являются банаховыми пространствами относительно норм

$$\|f\|_{{}^jB^r_{p,q}} := \|f\|_p + {}^jb^r_{p,q}(f). \tag{4.1}$$

Теорема 4. *Пространства ${}^jB^r_{p,q}$, $j = 1, 2, 3, 4$, совпадают и их нормы (4.1) эквивалентны (т. е. БП ${}^jB^r_{p,q}$ эквивалентны).*

Отметим, что из эквивалентности пространств ${}^1B^r_{p,q}$ и ${}^3B^r_{p,q}$ следует теорема 1 для случая $q < \infty$. Как и в §3, будем использовать краткие обозначения ${}^jB = {}^jB^r_{p,q}$, $\|f\| = \|f\|_p$ и т. д.

Доказательство теоремы 4.

1^0. Вложение ${}^2B \hookrightarrow {}^1B$ очевидно. Докажем, что ${}^1B \hookrightarrow {}^3B$. Пусть $f \in {}^1B$. Тогда

$$\left({}^1b(f)\right)^q = \int_0^\pi \frac{(\omega_k(f^{(l)}, \delta))^q}{\delta^{1+(r-l)q}}\, d\delta = \sum_{s=1}^\infty \int\limits_{\pi/a^s}^{\pi/s^{s-1}} \frac{(\omega_k(f^{(l)}, \delta))^q}{\delta^{1+(r-l)q}}\, d\delta. \tag{4.2}$$

Пользуясь монотонностью модуля непрерывности (см. лемму 1) и теоремой 2 получим

$$\int\limits_{\pi/a^s}^{\pi/s^{s-1}} \frac{(\omega_k(f^{(l)}, \delta))^q}{\delta^{1+(r-l)q}}\, d\delta \ge \frac{\left(\omega_k(f^{(l)}, \frac{\pi}{/as})\right)^q}{(\pi/a^{s-1})^{1+(r-l)q}}\, \frac{\pi}{a^{s-1}}(a-1) \ge$$

$$\ge c_1\, a^{rqs} E^q_{a^s}(f), \tag{4.3}$$

где $c_1 > 0$ — не зависящая от f и s постоянная.

Из (4.2) и (4.3) следует, что

$$\sum_{s=1}^\infty a^{sqr}\, E^q_{a^s}(f) \le c_2\, \left({}^1b(f)\right)^q. \tag{4.4}$$

Еще нужно оценить сверху $E_{a^0}(f)$. Из теоремы 2 следует

$$E_{a^0}(f) \le c\,\omega_k(f^{(l)}, \pi). \tag{4.5}$$

Пользуясь свойствами модуля непрерывности из леммы 1, заметим, что

$$\left({}^1b(f)\right)^q \geq \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{(\omega_k(f^{(l)},\delta))^q}{\delta^{1+(r-l)q}}\,d\delta \geq c_3\,\omega_k(f^{(l)},\frac{\pi}{2}) \geq c_4\,\omega_k(f^{(l)},\pi), \qquad (4.6)$$

а из (4.5) и (4.6) получим оценку

$$E^q_{a^0}(f) \leq c_5\,\left({}^1b(f)\right)^q. \qquad (4.7)$$

Окончательно, складывая неравенства (4.4) и (4.7), получаем оценку

$$\left({}^3b(f)\right)^q \leq c_6\,\left({}^1b(f)\right)^q,$$

из которой следует вложение ${}^1B \hookrightarrow {}^3B$.

2^0. Докажем, что ${}^3B \hookrightarrow {}^4B$. Пусть $f \in {}^3B$. Используя обозначения и неравенства из пункта 3^0 доказательства теоремы 3, получим

$$\|Q_{a^0}(f)\|^q \leq (3\|f\|)^q,$$

$$a^{srq}\|Q_{a^s}(f)\|^q \leq 4^q\,a^{srq}\,E^q_{a^{s-1}}(f), \quad s \geq 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} {}^4b(f) &\leq \left(3^q\,E^q_{a^0}(f) + \sum_{s=1}^{\infty} 4^q\,a^{sqr}\,E^q_{a^{s-1}}(f)\right)^{1/q} \leq \\ &\leq c_1\,\left(\|f\| + \big(\sum_{s=0}^{\infty} a^{srq}\,E^q_{a^s}(f)\big)^{1/q}\right) = c_1\,\|f\|_{{}^3B}, \end{aligned}$$

откуда и следует вложение ${}^3B \hookrightarrow {}^4B$.

3^0. Докажем вложение ${}^4B \hookrightarrow {}^2B$. Пусть $f \in {}^4B$, $\varepsilon > 0$, тогда f можно представить в виде суммы (s во всех суммах пробегает Z_+)

$$f = \sum q_{a^s}, \qquad Q_{a^s} \in \mathcal{P}_{a^s},$$

причем

$$\left(\sum a^{sqr}\,\|Q_{a^s}\|^q\right)^{1/q} \leq {}^4b(f) + \varepsilon. \qquad (4.8)$$

Проверим, что ряд $\sum Q_{a^s}^{(l)}$ сходится в $L_p(B)$. Для этого заметим, что

$$\|Q_{a^s}^{(l)}\| \le a^{sl}\,\|Q_{a^s}\| = a^{-s(r-l)}a^{sr}\,\|Q_{a^s}\|$$

(использовано (2.11)). Воспользовавшись неравенством Гельдера, получим

$$\sum \|Q_{a^s}^{(l)}\| \le \sum a^{-s(r-l)}a^{sr}\,\|Q_{a^s}\| \le$$
$$\le c_1 \left(\sum a^{sqr}\,\|Q_{a^s}\|^q\right)^{1/q} \le c_1 \left({}^4b(f)+\varepsilon\right). \qquad (4.9)$$

Следовательно, ряд $\sum Q_{a^s}^{(l)}$ сходится в $L_p(B)$ и

$$f^{(l)} = \sum Q_{a^s}^{(l)} \in L_p(B). \qquad (4.10)$$

Отметим также, что из (4.10) и (4.9) следует, что

$$\|f^{(l)}\| \le c_1 \left({}^4b(f)+\varepsilon\right). \qquad (4.11)$$

Используя (4.11) и очевидное неравенство

$$\omega_k(f^{(l)},\delta) \le 2^k\,\|f^{(l)}\|,$$

получим, что

$$\int_1^\infty \frac{(\omega_k(f^{(l)},\delta))^q}{\delta^{1+(r-l)q}}\,d\delta \le 2^{kq}\,\|f^{(l)}\|^q \int_1^\infty \frac{d\delta}{\delta^{1+(r-l)q}} \le$$
$$\le c_2 \left({}^4b(f)+\varepsilon\right). \qquad (4.12)$$

Для любого натурального N

$$\tilde\Delta_t^k f^{(l)} = \sum_{s=0}^{N} \tilde\Delta_t^k Q_{a^s}^{(l)} + \sum_{s=N+1}^{\infty} \tilde\Delta_t^k Q_{a^s}^{(l)},$$

$$\|\tilde\Delta_t^k f^{(l)}\| \le t^k \sum_{s=0}^{N} a^{s(k+l)}\,\|Q_{a^s}\| + 2^k \sum_{s=N+1}^{\infty} a^{sl}\,\|Q_{a^s}\|.$$

Тогда

$$\omega_k(f^{(l)},a^{-N}) = \sup_{0<t\le a^{-N}} \|\tilde\Delta_t^k f^{(l)}\| \le$$

$$\le a^{-Nk}\sum_{s=0}^{N} a^{s(k+l)}\|Q_{a^s}\| + 2^k \sum_{s=N+1}^{\infty} a^{sl}\,\|Q_{a^s}\|.$$

Имеем, делая замену $\delta = a^{-u}$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \delta^{-1-(r-l)q}\,\omega_k^q\left(f^{(l)},\delta\right)\,d\delta = \\
&= \ln a \int_0^{\infty} a^{q(r-l)u}\,\omega_k^q\left(f^{(l)},a^{-u}\right)\,du = \\
&= \ln a \sum_{N=0}^{\infty}\int\limits_N^{N+1} a^{q(r-l)u}\,\omega_k^q\left(f^{(l)},a^{-u}\right)\,du \le \\
&\le \ln a \sum_{N=0}^{\infty}\omega_k^q\left(f^{(l)},a^{-N}\right)\,a^{q(r-l)N} \le \\
&\le c_3\,\mathcal{I}_1 + c_4\,\mathcal{I}_2,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

где

$$\mathrm{I}_1 = \textstyle\sum_{N=0}^{\infty} a^{q(r-l-k)N}\left(\sum_{s=0}^{N} a^{s(k+l)}\|Q_{a^s}\|\right)^q,$$
$$\mathrm{I}_2 = \textstyle\sum_{N=0}^{\infty} a^{q(r-l)}\left(\sum_{s=N+1}^{\infty}\|Q_{a^s}\|\right)^q.$$

Для выражений $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ в книге [15] (см. пункт 5.6, формулы (17) — (19)) получены оценки

$$\mathrm{I}_1 \le c_5 \textstyle\sum_{s=0}^{\infty} a^{rqs}\|Q_{a^s}\|^q, \tag{4.14}$$
$$\mathrm{I}_2 \le c_6 \textstyle\sum_{s=0}^{\infty} a^{rqs}\|Q_{a^s}\|^q. \tag{4.15}$$

Окончательно, из (4.12), (4.14) и (4.15) следует, что

$$\int_0^{\infty}\delta^{-1-(r-l)q}\,\omega_k^q\left(f^{(l)},\delta\right)\,d\delta \le c_7\sum_{s=0}^{\infty} a^{srq}\,\|Q_{a^s}\|^q,$$

а отсюда

$${}^2b(f) \le c_8\,{}^4b(f),$$

что доказывает вложение ${}^2B \hookrightarrow {}^4B$.

В результате получена цепочка вложений

$$^2B \hookrightarrow {}^1B \hookrightarrow {}^3B \hookrightarrow {}^4B \hookrightarrow {}^2B,$$

что и завершает доказательство теоремы 4.

Résumé

Let M be a compact symmetric space of rank 1. We have defined the Nikolskiĭ — Besov type function classes $B^r_{p,\theta}(M)$ and we have obtained a conctructive description of this classes in in terms of the best approximation by the spherical polynomials on M.

Литература

[1] Никольский С. М., Лизоркин П. И. *Приближение сферическими полиномами*// Тр. МИАН. 1984. Т.166. С.186–200.

[2] Никольский С. М., Лизоркин П. И. *Аппроксимация функций на сфере*// Известия АН СССР. Сер. матем. 1987. Т.51. N3. С.635–651.

[3] Рустамов Х. П. *О приближении функций на сфере* // Известия РАН. Сер. матем. 1993. Т.57. N5. С.127–148.

[4] Бессе А. *Многообразия с замкнутыми геодезическими.* М.:Мир, 1981.

[5] Тихомиров В. М. *Теория приближений.* // Соврем. пробл. матем. Фунд. направления. 1987. Т.14.

[6] Камзолов А. И. *Об интерполяционной формуле Рисса и неравенстве Бернштейна для функций на однородных пространствах*// Мат. заметки. Т.15. N6. С.967–978.

[7] Ragozin D. L. *Polinomial approximation on compact manifolds and homogeneous spaces*// Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V.150. P.41–53.

[8] Платонов С. С. *О приближении на компактных симметрических пространствах ранга 1* //Доклады РАН. 1995. Т.342. N4. С.455–457.

[9] Платонов С. С. *О теоремах Джексоновского типа на компактных симметрических пространствах ранга 1* // Доклады РАН. 1996 (в печати).

[10] Платонов С. С. *Об одном подходе к теории пространств типа Никольского — Бесова на однородных многообразиях* //Фундаментальная и прикладная математика (в печати).

[11] Платонов С. С. *Приближение функций на компактных симметрических пространствах ранга 1* // Матем. сборник (в печати).

[12] Хелгасон С. *Группы и геометрический анализ.* М.: Мир, 1987.

[13] Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.* М.: Мир, 1964.

[14] Лизоркин П. И. *О приближении функций на сфере* σ // Доклады РАН. 1993. Т.331. N5. С.555–558.

[15] Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.:Наука, 1977.