Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 3, 1996

УДК 513.83

ПРОСТРАНСТВО РЕТРАКЦИЙ КВАДРАТА

Н. С. Стреколовская

В работе доказано, что пространство ретракций двумерного квадрата гомеоморфно гильбертовому пространству l_2.

В пространстве $C(X)$ непрерывных отображений компакта в себя, наделенном компактно-открытой топологией, выделим подпространство $R(X)$, состоящее из отображений, удовлетворяющих функциональному уравнению $f \circ f = f$. Пространство $R(X)$ называется пространством ретракций компакта X.

Для компактного Q-многообразия X локальное строение топологического пространства $R(X)$ полностью исследовано. Сакаи доказал, что $R(X)$ есть l_2-многообразие.

Хорошо известно, что проблема группы гомеоморфизмов решена полностью для одномерных, двумерных и бесконечномерных компактных многообразий. Вопрос о строении пространства $R(X)$ возник как аналог упомянутой проблемы. Гомеоморфно ли гильбертову пространству l_2 пространство $R(I^n)$, где I^n обозначает n-мерный куб [2]?

В. Н. Басманов и А. Г. Савченко дали положительный ответ на этот вопрос при $n = 1$.В настоящей заметке этот результат доказан для $n = 2$.

Теорема 1. *Пространство $R(I^2)$ гомеоморфно l_2.*

Доказательство. Обозначим через H пространство гомеоморфизмов квадрата I^2 в себя в компакктно-открытой топологии. На множестве непрерывных отображений квадрата в себя введем отношение эквивалентности, полагая $f \sim g$, если существует гомеоморфизм $h \in H$ такой, что $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Следовательно, существует подмножество C_0 множества непрерывных отображений квадрата I^2 в себя такое, что отображение $F : C_0 \times H \to C$ является гомеоморфизмом. Отображение F определяется формулой

$$F(c_0, h) = h^{-1} \circ c_0 \circ h$$

для отображний $c_0 \in C_0, h \in H$.

Положим

$$P = \{g : g \in R(I^2), g \in C_0\}.$$

Определим отображение $\lambda : P \times Hq \to R(I^2)$ следующим образом:

$$\lambda(p, h) = h^{-1} \circ p \circ h$$

для ретракций $p \in P$. Отображение λ определено корректно, то есть $\lambda(p, h)$ является ретракцией.

Определим отображение $\mu : R(I^2) \to P \times H$ таким образом.Для $r \in R(I^2)$ пусть $F^{-1}(r) = (c_0, h)$, где $c_0 \in C_0, h \in H$

Легко видеть, что отображение c_0 является ретракцией квадрата, откуда следует корректность определения отображения μ. Проверим, что отображения λ и μ являются взаимно обратными гомеоморфизмами соответствующих пространств. Пусть $r \in R(I^2)$— произвольная ретракция. $\mu(r) = (c_0, h)$, где $c_0 \in C_0, h \in H$, $(c_0, h) = F^{-1}(r)$. Тогда $\lambda(\mu(r)) = \lambda(c_0, h) = h^{-1} \circ c_0 \circ h = r$. Следовательно, $\lambda \circ \mu$ есть тождественное отображение пространства $R(I^2)$.

Покажем, что пространство $R(I^2)$ локально l_2- стабильно, то есть у каждой точки r существует окрестнoть $G \subset R(I^2)$, для которой $G \times l_2 \simeq G$.

Пусть $\mu(r) = (c_0, h), _0 \in P, h \in H$. Поскольку пространство H гомеоморфизмов квадрата I^2 в себя является l_2- многообразием ([3], с.152), у точки h есть окрестность O в H, гомеоморфная l_2. Возьмем $G = \lambda(O \times P)$. Имеем

$$G \simeq P \times O \simeq P \times l_2 \simeq P \times l_2 \times l_2 \simeq G \times l_2.$$

Локальная l_2-стабильность $R(I^2)$ установлена.

Лемма 1. *$R(I^2) \in ANR$.*

Доказательство. Из работы [2] дословно переносится на случай пространства $R(I^2)$. □

Легко проверить, что $R(I^2)$ является замкнутым подмножеством топологически полного сепарабельного пространства C. Следовательно, $R(I^2)$ топологически полно и сепарабельно. Из леммы 1 и из соотношения $R(I^2) \simeq P \times H$ имеем, что пространство P является ANR-пространством ([5]). Наконец, пространство G принадлежит классу ANR как произведение ANR-пространств P и l_2.

Применим к произведению пространств $G \times l_2 \simeq G$ теорему Торунчика о том, что произведение топологически полного сепарабельного ANR- пространства на l_2 является l_2- многобразием. Ввиду произвольности точки $r \in R(I^2)$, пространство $R(I^2)$ является l_2- многообразием. Из результатов Борсука [1] следует, что $R(I^2)$ стягиваемо. А поскольку по теореме Хендерсона [4] l_2- многообразие определяется своим гомотопическим типом, то $R(I^2) \simeq l_2$. Теорема доказана. □

Résumé

It is proved that Hilbert space l_2 is a space of retractions of the disk.

Литература

[1] Borsuk K. *Concerning the set of retractions*//Colloq.Math. 1967. V.18. P.197–201.

[2] В.Н. Басманов, А.Г. Савченко. *Гильбертово пространство как пространство ретракций отрезка*// Мат.заметки. Т.42. 1987. С.94–99.

[3] Чепмэн Т. *Лекции о Q-многообразиях*. М.: Мир. 1981.

[4] Henderson D. W. *Infinit-dimensional manifoids are open subsets of Hilbert spaces*//Topology. 1970. V.9. No1. P.25–34.

[5] Борсук К. *Теория ретрактов*. М.: Мир. 1971.