УДК 517

# ПРОСТРАНСТВА С МУЛЬТИВНУТРЕННИМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Т. Вересова, В. В. Мосягин

В заметке рассматривается зависимость решения задачи Коши для дифференциального уравнения в пространстве с мультивнутренним произведением от правой части.

**1.** Пусть $X$ — линейное пространство над полем скаляров K (K $=\mathbb{C}$ или ). Полувнутреннее произведение на $X$ — это функция $(\cdot,\cdot): X\times X\to$ K, удовлетворяющая следующим условиям [1]:

$1^0$) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z),\ x,y,z\in X,\ \alpha,\beta\in$ K;

$2^0$) $(x,x)\geq 0,\ x\in X$;

$3^0$) $(x,y)=\overline{(y,x)},\ x,y\in X.$

Если из $(x,x)=0$ следует $x=\theta$, где $\theta$ — нулевой элемент пространства $X$, то $(x,y)$ — внутреннее произведение на $X$ [1].

Пусть теперь $S=\{(\cdot,\cdot)_\gamma\}$, $\gamma\in\Gamma$, обозначает семейство полувнутренних произведений на $X$, причем индекс $\gamma$ пробегает конечное или бесконечное множество $\Gamma$. Семейство $S$ назовем *отделяющим*, если для любого элемента $x\neq\theta$ в $X$ найдется, по крайней мере, одно полувнутреннее произведение $(\cdot,\cdot)_\gamma$, такое, что $(x,x)_\gamma\neq 0$. Семейство $S$, удовлетворяющее условию отделимости, назовем *мультивнутренним произведением.* Если $S$ — счетное отделяющее семейство полувнутренних произведений на $X$, то $S$ назовем *счетным мультивнутренним произведением.*

Обозначим через Р систему полунорм $\{p_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$, определенных на $X$ формулами

$$p_\gamma(x) = \sqrt{(x,x)_\gamma}, \quad x \in X, \quad (\cdot,\cdot) \in S. \tag{1.1}$$

Очевидно, семейство полунорм Р, является отделяющим: для любого $x_0 \neq \theta$ в $X$ найдется полунорма $p_{\gamma_0} \in \mathfrak{P}$, такая, что $p_{\gamma_0}(x_0) \neq 0$.

Систему полунорм Р, определенную формулами (1.1), назовем *соответствующей мультивнутреннему произведению* $S$. С помощью системы Р полунорм на $X$ определим обычным образом локально выпуклую линейную топологию $\tau$ на $X$ [1]. Пара $(X,\tau)$ является хаусдорфовым локально выпуклым линейным топологическим пространством. В дальнейшем предполагаем, что $(X,\tau)$ — полное локально выпуклое пространство.

**2.** В этом пункте исследуем зависимость решения нелинейного дифференциального уравнения первого порядка в вещественном пространстве $X$ от правой части этого уравнения.

С этой целью в пространстве $X$ рассмотрим два уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{2.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) + R(t,y), \tag{2.2}$$

где операторы $f(t,\cdot)$, $R(t,\cdot)$ определены в области $G = G_0 \times_{+}$: $_{+} = \{t \in, t \geq 0\}$; $G_0 \subset X$, $G_0$ — ограниченное по полунормам $p_\gamma \in$ Р множество ($\forall\ p_\gamma$ существует константа $c_{p_\gamma}$ такая, что $p_\gamma(x) \leq c_{p_\gamma}$ для всех $x \in G_0$).

Кроме того, мы предполагаем, что правые части уравнений (2.1), (2.2) удовлетворяют условиям существования единственного решения при любых начальных данных $(t_0, x_0) \in G$.

Теорема 1. *Пусть в области $G$ выполнены условия*
*1)* $(x-y, f(t,x) - f(t,y))_\gamma \leq L_{p_\gamma} p_\gamma^2(x-y)$, $L_{p_\gamma} > 0$, $p_\gamma \in P$;
*2) для любой полунормы $p_\gamma \in P$ существует неубывающая функция $\varphi_{p_\gamma}(p_\gamma(x))$, $x \in G$, для которой*

$$p_\gamma(R(t,x)) \leq \varphi_{p_\gamma}(p_\gamma(x));$$

*3)* $T > 0$, $t_0 \geq 0$ *и* $p_\gamma(x(t,t_0,x_0)) \leq c_{p_\gamma}$, $p_\gamma(y(t,t_0,x_0)) \leq c_{p_\gamma}$, $p_\gamma \in P$, *при* $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

*Тогда при всех* $t \in [t_0, t_0 + T]$ *имеет место оценка*

$$p_\gamma(x(t) - y(t)) \leq 2\varphi_{p_\gamma}(c_{p_\gamma})T \exp\{2L_{p_\gamma}T\}, \quad p_\gamma \in P. \tag{2.3}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$r_{p_\gamma} = \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T} p_\gamma(x(t) - y(t)), \quad p_\gamma \in \mathrm{P}.$$

Из уравнений (2.1), (2.2) вытекает соотношение

$$\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}, x - y\right)_\gamma = (x - y, f(t,x) - f(t,y))_\gamma - (x - y, R(t,y))_\gamma, \ \gamma \in \Gamma.$$

Отсюда

$$p_\gamma^2(x(t) - y(t)) \leq 2r_{p_\gamma}\varphi_{p_\gamma}(c_{p_\gamma})T + \int_{t_0}^{t} 2L_{p_\gamma}p_\gamma^2(x(s) - y(s))\, ds, \tag{2.4}$$

$p_\gamma \in \mathrm{P}$. В силу интегрального неравенства Гронуолла из (2.4) следуют неравенства

$$p_\gamma^2(x(t) - y(t)) \leq 2r_{p_\gamma}\varphi_{p_\gamma}(c_{p_\gamma})T \exp\{2L_{p_\gamma}T\} \tag{2.5}$$

при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $p_\gamma \in \mathrm{P}$. Из неравенств (2.5) получаем оценку (2.3). Теорема доказана. □

## Resume

The aim of this note is present theorem dependence of solution Cauchy problem in multiinner product space on right part.

## Литература

[1] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*.-Springer. Berlin. 1985.