Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 3, 1996

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ С ОБРАТИМЫМ ЗАХВАТОМ И ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ю. В. Заика

Дается математическое обоснование модели переноса газа сквозь мембраны с учетом взаимодействия с ловушками и физико-химических процессов на поверхности. Последнее приводит к динамическим граничным условиям. Вопрос о непротиворечивости уравнений модели сводится к исследованию класса функционально-дифференциальных уравнений, аналогичного системам с последействием нейтрального типа. Модель является содержательным примером полудинамической системы в гильбертовом пространстве.

§ 1. Модель переноса водорода сквозь металлические мембраны

Имея в виду конкретную прикладную задачу, будем для определенности рассматривать пару водород — металл. С непринципиальными изменениями модель и полученные результаты могут использоваться и для других систем газ — твердое тело. Водород занимает особое место в теоретических и прикладных исследованиях [1-6] — достаточно упомянуть задачи энергетики, защиты материалов от водородной коррозии, проектирования химических реакторов, ракетостроения, вакуумной техники и технологии. В частности, поскольку в термоядерных реакторах будет использоваться радиоактивный

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований,(проект 95-01-00355).

изотоп водорода — тритий, то возникает проблема возможных диффузионных утечек трития и его накопления в конструкционных материалах первой стенки реактора. В связи с этим разработка адекватных моделей водородопроницаемости и методов их идентификации по результатам эксперимента для конкретных материалов представляет значительный интерес.

Экспериментальный опыт показывает, что лимитирующими являются не только диффузионные процессы внутри металла, но и сложные физико-химические явления на поверхности (см. [4]). Кинетические кривые, получаемые методами водородопроницаемости и термодесорбции, содержат информацию и о скоростях адсорбционно-десорбционных процессов, о взаимодействии с ловушками.

Цель статьи — изложить математическое обоснование одной из возможных моделей переноса водорода сквозь металл. Базой послужили экспериментальные работы под руководством А.А.Курдюмова и И.Е.Габиса (см. [4-6]). Здесь не будут обсуждаться условия и границы применимости используемой модели. Для d-переходных металлов при относительно малых концентрациях в диапазоне температур 300-1000 К адекватность модели подтверждена численно и экспериментально. Из-за ограниченности объема статьи не будут также излагаться методы идентификации неизвестных априори параметров по результатам измерений (метод сопряженных уравнений изложен в [7]).

Будем считать, что концентрация растворенного водорода (в атомарном состоянии) в металле достаточно мала и часть его взаимодействует с ловушками. В качестве математической модели диффузии с обратимым захватом внутри мембраны примем систему уравнений (см. обзор [5]):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(T)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - a_1(T)c + a_2(T)z, \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a_1(T)c - a_2(T)z, \qquad x \in [0,\ell], \quad t \in [0,t_*], \tag{2}$$

где $c(t,x)$ — концентрация диффундирующего водорода, $z(t,x)$ — концентрация захваченного диффузанта, D — коэффициент диффузии, a_1, a_2 — коэффициенты поглощения и выделения водорода ловушками.

В правой части (2) диффузионное слагаемое отсутствует, поскольку ловушки (различного рода дефекты физико-химической структуры металла) предполагаются неподвижными. Величины D, a_i зависят от температуры $T(t)$ с приемлемой точностью по закону Аррениуса с соответствующими предэкспоненциальными множителями и энергиями активации:

$$D_0, E_D, a_{0i}, E_i, R = \mathrm{const},$$

$$D = D_0 \exp(-E_D/RT(t)),\ a_i = a_{0i} \exp(-E_i/RT(t)).$$

Отметим, что именно аррениусовость коэффициентов в дальнейшем изложении не играет принципиальной роли. Важно лишь, чтобы после подстановки $T(t)$ коэффициенты были функциями времени t и, может быть, неизвестных констант, подлежащих идентификации. Поэтому при необходимости можно использовать и другие температурные зависимости. Необходимо сохранить только свойства гладкости, монотонности с ростом T , отделенности от нуля и положительности, как имеющие физический смысл.

Существуют более детализированные математические модели диффузии. Однако значительное увеличение числа неизвестных параметров делает задачу их экспериментального определения труднообозримой. Поэтому здесь и в дальнейшем принят разумный компромисс между полнотой модели и реальными возможностями ее идентификации имеющимися экспериментальными и вычислительными средствами.

Основные трудности связаны не с уравнениями (1), (2), а с динамическими нелинейными граничными условиями. Перейдем к их описанию.

Пусть поверхность мембраны контактирует с газообразным водородом. Тогда с учетом адсорбционно-десорбционных процессов на поверхности краевые условия моделируются следующим образом (см.обзор [5] и [4]):

$$c(0,x) = \bar{c}(x), \qquad z(0,x) = \bar{z}(x), \quad x \in [0,\ell], \tag{3}$$

$$c_0(t) = c(t,0) = g(T)q_0(t), \qquad c_\ell(t) = c(t,\ell) = g(T)q_\ell(t), \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}q_0(t) = \mu s(T)p_0(t) - b(T)q_0^2(t) + D(T)\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=0}, \\ \frac{d}{dt}q_\ell(t) = \mu s(T)p_\ell(t) - b(T)q_\ell^2(t) - D(T)\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=\ell}, \\ T = T(t), \quad t \in [0,t_*], \\ g(T) = g_0 \exp(-E_g/RT), \quad b(T) = b_0 \exp(-E_b/RT), \\ s(T) = s_0 \exp(-E_s/RT). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $q_0(t), q_\ell(t)$ — концентрации диффундирующего водорода на соответствующих поверхностях мембраны ($x = 0, \ell$), $g(T)$ — константа равновесия между концентрациями на поверхности и в приповерхностном объеме мембраны, μ — кинетический коэффициент, $s(T)$ — коэффициент прилипания водорода в газовой фазе к поверхности, $p_0(t), p_\ell(t)$ — давления газообразного водорода с соответствующих сторон мембраны, $b(T)$ — коэффициент десорбции.

Поясним несколько подробнее смысл соотношений (3)—(5). Начальное условие (3) определяется начальным насыщением мембраны водородом. Если перед экспериментом мембрана обезводорожена, то $\bar{c}(x) = \bar{z}(x) = 0$. Соотношения (4) означают, что объемные приповерхностные концентрации $c_0(t), c_\ell(t)$ "отслеживают"(пропорциональны) текущие концентрации $q_0(t), q_\ell(t)$ на поверхности. Наконец, рассмотрим уравнения баланса потоков (5). Чем больше давление газообразного водорода, тем больше атомов в единицу времени попадает на единичную площадку поверхности (первые слагаемые в правых частях (5)). Вторые слагаемые означают, что часть атомов, оказавшихся на поверхности, снова соединяются в молекулы водорода и покидают поверхность (десорбционный поток). Квадратичность закона десорбции, характерная для водорода, в дальнейшем изложении не принципиальна. Последние слагаемые в правых частях (5) соответствуют притоку или оттоку атомов водорода к поверхности за счет диффузии в объеме мембраны.

Кроме нелинейности граничные условия (4),(5) имеют следующую особенность. Значения слагаемых $D(T(t))\partial c/\partial x|_{x=0,\ell}$ в момент времени $t > 0$ определяются всей предысторией поверхностных концентраций $q_0(\tau), q_\ell(\tau)$ на отрезке $[0, t]$. Образно говоря, согласно (4) часть атомов с поверхности "ныряет"в объем и диффундирует внутри мембраны в соответствии с (1),(2). Диффузионный приток (отток) к (от) поверхности при этом определяется "профилем"концентрации по толщине.

§ 2. Методика экспериментов и модель измерений

2.1. Метод термодесорбционной спектрометрии

В камеру с лентой из исследуемого материала подается водород в газовой фазе при сравнительно большом давлении. Лента нагревается электрическим током с целью увеличения скоростей адсорбционно-десорбционных процессов и диффузии. После установления стационарной концентрации, когда лента поглотит достаточное количество водорода, она быстро охлаждается. При этом резко падают скорости указанных процессов и значительное количество водорода остается в ленте (в частности, в ловушках). В режиме вакуумирования камеры лента через определенный промежуток времени снова нагревается. Закон нагрева может варьироваться в достаточно широких пределах. С помощью масс-спектрометра измеряется давление молекулярного водорода в вакуумной камере, обусловленное десорбционным потоком с поверхности (плотность этого потока обозначим через $J(t)$):

$$p(t) = \theta_1 \int_0^t J(\tau) \exp(\frac{\tau - t}{\theta_0}) d\tau, \tag{6}$$

$$J(t) = b(t)q^2(t) = b(t)g^{-2}(t)c_\ell^2(t). \tag{7}$$

Здесь и далее для упрощения обозначений $b(t) = b(T(t))$, $g(t) = g(T(t))$, $D(t) = D(T(t))$, $a_i(t) = a_i(T(t))$, $s(t) = s(T(t))$.

Для метода ТДС выполнены условия симметричности:

$$\begin{gathered} p(t) = p_0(t) = p_\ell(t), \qquad q(t) = q_0(t) = q_\ell(t), \\ c_0(t) = c_\ell(t), \qquad D(t)\frac{\partial c}{\partial x}(t,0) = -D(t)\frac{\partial c}{\partial x}(x,\ell), \\ \bar{c}(x) = \bar{c}(\ell - x), \quad \bar{z}(x) = \bar{z}(\ell - x). \end{gathered} \tag{8}$$

Константа θ_1 зависит от площади поверхности ленты S ($\theta_1 = S\theta_2$), θ_0 и θ_2 определяются конкретными характеристиками экспериментальной установки, в частности, объемом камеры и скоростью откачки вакуумной системы. Выбор модели измерений (6) обусловлен опытом: впрыск порции водорода в камеру (δ-импульс) приводит к резкому скачку давления с последующим экспоненциальным затуханием. Уравнение (6) является в определенном смысле классическим в теории измерений. Специфику задачи отражает (7).

В начальный момент времени, определяемый повторным нагревом,

$$c(0, x) = \bar{c}, \quad z(0, x) = \bar{z}, \quad x \in [0, \ell], \tag{9}$$

где константы $\bar{c}, \bar{z}$, вообще говоря, априори неизвестны. Время окончания эксперимента определим условием $p(t) \approx 0, t \geq t_*$, т. е.

$$c(t_*, x) = z(t_*, x) = 0, \quad x \in [0, \ell]. \tag{10}$$

Перепад температур $T(t_*) - T(0)$ должен быть при этом достаточно велик. Отметим, что какой-бы глубокий вакуум ни создавался, наличие давления и взаимодействие водорода с ловушками приводят к тому, что какая-то его часть неизбежно останется в образце даже при очень большом t_*. Это следует и из линейности уравнений (1),(2). Поэтому условие (10) является приближенным и означает лишь, что относительно ничтожной частью водорода мы пренебрегаем. Подобные замечания в дальнейшем будем опускать.

2.2. Метод проницаемости

С входной стороны предварительно обезводороженной и нагретой до фиксированной температуры $\bar{T}$ мембраны (перегородки вакуумной камеры) скачкообразно создается достаточно высокое постоянное давление газообразного водорода $\bar{p}_0$. С выходной стороны в режиме постоянной откачки водорода измеряется давление согласно модели (6), (7), где следует заменить p, q на p_ℓ, q_ℓ. Условия симметричности (8) отсутствуют.

Начальные данные считаем нулевыми:

$$c(0,x) = \bar{c}(x) = 0, \quad z(0,x) = \bar{z}(x) = 0, \qquad x \in [0,\ell]. \tag{11}$$

Время окончания эксперимента определим временем установления выходных давления и потока: $p_\ell(t) = \text{const}$, $J(t) = \text{const}$, $t \geq t_*$.

В методе проницаемости нецелесообразно варьировать температуру мембраны во времени, так как при этом существенны искажения, вызванные поглощением и выделением водорода соприкасающимися с мембраной стенками камеры. Для оценивания всех интересующих параметров необходимо несколько экспериментов с различными температурами $\bar{T}$.

§ 3. Теоремы существования и единственности решений уравнений модели

После интегрирования линейного уравнения (2) система (1), (2) преобразуется в интегро-дифференциальное уравнение с частными производными. На границе, с учетом соотношений (6), (7), получаем динамические условия: нелинейные интегро-дифференциальные уравнения со свободными членами, содержащими диффузионные потоки к поверхности мембраны. Непротиворечивость такой модели не является очевидной.

Отметим, что модель (1)-(5) можно рассматривать безотносительно к измерениям (6), (7) или другим экспериментальным методам, считая $p_0(t), p_\ell(t)$ заданными функциями времени. Все последующие выкладки лишь упростятся. Учет того, что $p_0(t)$ и(или) $p_\ell(t)$ могут содержать обратную связь (в частности, в смысле (6), (7)), лишь делает задачу более содержательной. Поэтому сразу будем рассматривать полную модель, т. е. с учетом "экспериментального вмешательства"в (1)-(5).

Остановимся вначале на методе термодесорбционной спектрометрии (ТДС).

Температуру $T(t)$ будем считать непрерывно дифференцируемой на рассматриваемом отрезке времени $[0, t_*]$ и ограниченной: $0 < T^- \leq T(t) \leq T^+$. Зависимость коэффициентов от температуры $T(t)$ для определенности предполагаем аррениусовской, хотя в дальнейшем достаточно лишь свойств гладкости, монотонности с ростом T , положительности и отделенности от нуля в диапазоне $[T^-, T^+]$ как имеющих физический смысл.

Начальные концентрации постоянны:

$$c(o,x) = \bar{c}, \quad z(0,x) = \bar{z}, \quad x \in [0,\ell].$$

Далее достаточно лишь условия симметричности $\bar{c}(x) = \bar{c}(\ell - x), \bar{z}(x) = \bar{z}(\ell - x)$.

Перейдем к описанию полученной краевой задачи в компактной форме.

Проинтегрируем линейное уравнение (2):

$$z(t,x) = \exp(-\int_0^t a_2(s)ds)\bar{z} + \int_0^t \exp(\int_t^\tau a_2(s)ds)a_1(\tau)c(\tau,x)d\tau, \quad (12)$$

$$(t,x) \in Q_{t_*} = (0,t_*) \times (0,\ell).$$

Замечание. Эта операция пока проделана формально - аналитические свойства функции $c(t,x)$ уточнены ниже. Изложение будем вести в терминах обобщенных решений, следуя в терминологии в основном книге [9]. Докажем, что $c(t,x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$, т. е. функция $c(t,x) \in L_2(Q_{t_*})$ имеет обобщенные производные

$$\frac{\partial c}{\partial t}(t,x), \quad \frac{\partial c}{\partial x}(t,x), \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,x) \in L_2(Q_{t_*}).$$

Тогда для каждого фиксированного $x \in (0, \ell)$ определен след $c(\cdot, x) \in L_2(0, t_*)$ и функция $z(t, x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$ определена формулой (12) в области Q_{t_*} корректно.

После подстановки (12) в (1) вместо системы (1), (2) в области Q_{t_*} получаем интегро-дифференциальное уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{\partial c}{\partial t} = D(t)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - a_1(t)c + a_2(t)\exp(-\int_0^t a_2(s)ds)\bar{z}+ \\ +a_2(t)\int_0^t \exp(\int_t^\tau a_2(s)ds)a_1(\tau)c(\tau, x)d\tau,\end{gathered} \tag{13}$$

$$(t, x) \in Q_{t_*} = (0, t_*) \times (0, \ell),$$

$$D(t) = D(T(t)), \qquad a_i(t) = a_i(T(t)).$$

Краевые условия:

$$c(0, x) = \bar{c}, \quad x \in [0, \ell], \tag{14}$$

$$c_0(t) = c_\ell(t) = g(t)q(t), \qquad \frac{\partial c}{\partial x}(t, 0) = -\frac{\partial c}{\partial x}(t, \ell), \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}q(t) = \mu s(t)\theta_1 \int_0^t \exp(\frac{\tau - t}{\theta_0})b(\tau)q^2(\tau)d\tau- \\ -b(t)q^2(t) + D(t)\frac{\partial c}{\partial x}(t, 0), \quad t \in [0, t_*],\end{gathered} \tag{16}$$

$$g(T(0))q(0) = \bar{c}. \tag{17}$$

Соотношения (15) являются следствием симметричности метода ТДС в смысле (8), (16) получено подстановкой (6), (7) в (5), а (17) согласует начальные и граничные условия. Здесь мы также воспользовались обозначениями $s(t) = s(T(t))$, $g(t) = g(T(t))$, $b(t) = b(T(t))$.

Уточним, в каком классе функций ищется решение и в каком смысле оно удовлетворяет (13)-(17). По аналогии с [9] дадим в терминах обобщенных производных следующее определение.

Определение 1 *Решением п.в. (почти всюду) поставленной краевой задачи назовем функцию $c(t, x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$, удовлетворяющую уравнению (13) при почти всех $(t, x) \in Q_{t_*}$ и согласованным симметричным начальным и граничным условиям в смысле теории следов (т.е. следы*

$$c(\cdot, 0) \in L_2(0, \ell), \quad c_0(\cdot) = c(\cdot, 0), \quad c_\ell(\cdot) = c(\cdot, \ell),$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(\cdot, 0), \quad \frac{\partial c}{\partial x}(\cdot, \ell) \in L_2(0, t_*)$$

подчинены (14)-(16) для почти всех $x \in [0, \ell]$, $t \in [0, t_*]$ соответственно). При фиксированной $\partial c/\partial x(\cdot, 0)$ с начальными данными $q(0) = q^{-1}(T(0))\bar{c}$ понимается в смысле Каратеодори.

Опишем пока в общих чертах "путь", приводящий к решению уравнений (13)-(17). Фиксируем для уравнения (13) симметричные начальные данные (14) ($c(0, x) = c(0, \ell - x)$) и граничные условия первого рода $c_0(t) = c_\ell(t) \in H^1(0, t_*)$. Эти краевые условия определяют симметричное решение п. в. $c(t, x) = c(t, \ell - x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$, для которого $\partial c/\partial x(t, 0) = -\partial c/\partial x(t, \ell)$ п.в. в $(0, t_*)$ (см. ниже следствие 1 из теоремы 1). Подставим функцию времени $\partial c/\partial x(\cdot, 0) \in L_2(0, t_*)$ в интегро-дифференциальное уравнение (16), которое введением дополнительной переменной сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть абсолютно непрерывное решение $q(t)$ с начальными данными (17) определено на $[0, t_*]$. Если теперь будет выполнено оставшееся первое условие в (15) $c_0(t) = g(t)q(t)$, то модель будем считать обоснованной. Таким образом, необходимо доказать, что на некотором отрезке времени $[0, t_*]$ можно проделать "замкнутый круг"и вернуться к исходным $c_0(t), c_\ell(t)$. Из физических соображений необходима единственность такого решения.

Пусть решение п. в. существует. Укажем некоторые следствия.

Прямоугольная область Q_{t_*} удовлетворяет сильному условию ℓ-рога [12], поэтому элементы $H^{1,2}(Q_{t_*})$ равномерно непрерывны в Q_{t_*} и продолжаются по непрерывности на замыкание $\bar{Q}_{t_*}$. Следы $c(t, \cdot), c(\cdot, x)$ можно понимать в обычном смысле — как непрерывные функции $c(t, x)$ при фиксированных $t \in [0, t_*]$ или $x \in [0, \ell]$.

Поскольку $\partial c/\partial x(\cdot, 0) \in L_2(0, t_*)$, то решение $q(t)$ уравнения (16) принадлежит пространству $H^1(0, t_*)$, т.е. является абсолютно непрерывной функцией на $[0, t_*]$, производная которой существует почти всюду (в классическом смысле) и принадлежит $L_2(0, t_*)$. В силу (15) и $c_0(t)$, $c_\ell(t) \in H^1(0, t_*)$. Кроме того, как следует из [8], $c(t, \cdot) \in H^1(0, \ell)$ для любого $t \in [0, t_*]$, причем $c(t, \cdot)$ непрерывно зависит от t в норме $H^1(0, \ell)$.

С ростом гладкости условий задачи будет расти и гладкость решения. В частности, в случае аррениусовской зависимости коэффициентов модели от температуры при линейном нагреве $T(t) = T_0 + kt \in [T^-, T^+]$ (наиболее часто используется на практике) решение п.в.

$c(t,x)$ будет бесконечно дифференцируемым в любой строго внутренней подобласти Q, $\bar{Q} \in Q_{t_*}$.

Ближайшая цель — доказать существование и единственность решения п. в. при достаточно малом t_*. Вопрос о продолжимости решений требует специального изучения.

Докажем вначале одно вспомогательное общее утверждение.

Рассмотрим в области $Q_{t_*} = (0,t_*) \times (o,\ell)$ уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(t)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - a_1(t)c + \int_0^t H(t,\tau)c(\tau,x)d\tau + h(t,x), \tag{18}$$

$$H(t,\tau) \in C([0,t_*] \times [0,t_*]), h(t,x) \in L_2(Q_{t_*}).$$

Зададим согласованные краевые условия первого рода:

$$c(0,x) = \varphi(x) \in H^1(0,\ell),\ c(t,0) = c_0(t),\ c(t,\ell) = c_\ell(t),$$

$$c_0(t), c_\ell(t) \in H^1(0,t_*),\ c_0(0) = \varphi(0),\ c_\ell(0) = \varphi(\ell). \tag{19}$$

Для произвольной функции $c(t,x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$ определены следы $c(0,\cdot) \in L_2(0,\ell)$ и $c(\cdot,0)$, $c(\cdot,\ell) \in L_2(0,t_*)$ (см.[9]). Под решением п. в. задачи (18), (19) понимаем такую $c(t,x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$, которая удовлетворяет (18) п. в. в Q_{t_*}, а указанные следы принадлежат $H^1(0,\ell)$, $H^1(0,t_*)$ соответственно и подчинены (19) для заданных $\varphi(x), c_0(t), c_\ell(t)$.

Теорема 1. *Решение п. в. краевой задачи (18), (19) существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\begin{gathered} \|c\|_{H^{1,2}(Q_{t_*})} \le A(\|\varphi\|_{H^1(0,\ell)} + \|h\|_{L_2(Q_{t_*})} + \\ + \|c_0\|_{H^1(0,t_*)} + \|c_\ell\|_{H^1(0,t_*)}), \end{gathered} \tag{20}$$

в котором константа $A > 0$ не зависит от φ, h, c_0, c_ℓ.

Доказательство. Введем новую переменную $u(t,x)$:

$$c(t,x) = \exp(-\int_0^t a_1(\tau)d\tau)u(t,x) + \frac{1}{\ell}(xc_\ell(t) - (x-\ell)c_0(t)), \tag{21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_0^t H(t,\tau)u(\tau,x)d\tau + \tilde{h}(t,x), \tag{22}$$

$$\tilde{h}(t,x)=\exp(\int_0^t a_1(\tau)d\tau)\{h(t,x)+\frac{1}{\ell}\int_0^t H(t,\tau)(xc_\ell(\tau)-$$
$$(x-\ell)c_0(\tau))d\tau-\frac{1}{\ell}(x\dot{c}_\ell(t)-(x-\ell)\dot{c}_0(t))-\frac{a_1}{\ell}(xc_\ell(t)-(x-\ell)c_0(t))\}.$$

После монотонной замены времени $t\leftrightarrow s$,

$$s=\int_0^t D(\tau)d\tau,\quad \dot{s}(t)=D(t)>0, \tag{23}$$

для функции $v(s,x)=u(t(s),x)$ получим краевую задачу в области $Q_{s_*}=(0,s_*)\times(0,\ell),\quad s_*=s(t_*):$

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\int_0^s (s,\nu)v(\nu,x)d\nu+r(s,x), \tag{24}$$

$$R(s,\nu)\in C([0,s_*]\times[0,s_*]),$$
$$r(s,x)=D^{-1}(t(s))\tilde{h}(t(s),x)\in L_2(Q_{s_*}),$$
$$v(0,x)=\varphi(x)-\frac{1}{\ell}(xc_\ell(0)-(x-\ell)c_0(0))=\tilde{\varphi}(x)\in \overset{\circ}{H}{}^1(0,\ell),$$
$$v(s,0)=v(s,\ell)=0,\qquad s\in[0,s_*].$$

Рассмотрим теперь итерационную процедуру

$$\begin{gathered} v^{(0)}(s,x)=0,\qquad (s,x)\in Q_{s_*},\\ \frac{\partial v^{(k)}}{\partial s}=\frac{\partial^2 v^{(k)}}{\partial x^2}+f^{(k)}(s,x),\quad k\geq 1, \end{gathered} \tag{25}$$

$$f^{(k)}(s,x)=\int_0^s R(s,\nu)v^{(k-1)}(\nu,x)d\nu+r(s,x),$$
$$v^{(k)}(0,x)=\tilde{\varphi}(x)\in \overset{\circ}{H}{}^1(0,\ell),$$
$$v^{(k)}(s,0)=v^{(k)}(x,\ell)=0,\qquad s\in[0,s_*].$$

По теореме 4[9] для каждого $k\geq 1$ при фиксированной $v^{(k-1)}(s,x)$ решение п.в. $v^{(k)}(s,x)\in H^{1,2}(Q_{s_*})$ существует, единственно и

$$\|v^{(k)}\|_{H^{1,2}(Q_{s_*})}\leq A_1(\|\tilde{\varphi}\|_{H^1(0,\ell)}+\|f^{(k)}\|_{L_2(Q_{s_*})}), \tag{26}$$

где константа A_1 не зависит от $\tilde{\varphi},\ f^{(k)}$.

В оценке (26) момент времени s_* можно заменить на любой $s_0 \in (0, s_*)$, не изменяя при этом константу A_1. Действительно, положим

$$f_0^{(k)} = f^{(k)}, \quad s \in (0, s_0), \quad f_0^{(k)} = 0, \quad s \in (s_0, s_*).$$

Соответствующее $f_0^{(k)}$ решение $v_0^{(k)}$ будет совпадать с $v^{(k)}$ в $Q_{s_0} = (0, s_0) \times (0, \ell)$ как элемент $H^{1,2}(Q_{s_0})$ — достаточно рассмотреть однородную краевую задачу для $v_0^{(k)} - v^{(k)}$ в области Q_{s_0} и воспользоваться оценкой типа (26). Следовательно,

$$\begin{aligned} \|v^{(k)}\|_{H^{1,2}(Q_{s_0})} = \|v_0^{(k)}\|_{H^{1,2}(Q_{s_0})} \le \|v_0^{(k)}\|_{H^{1,2}(Q_{s_*})} \le \\ \le A_1(\|\tilde{\varphi}\|_{H^1(0,\ell)} + \|f_0^{(k)}\|_{L^2(Q_{s_*})} = \\ = A_1(\|\tilde{\varphi}\|_{H^1(0,\ell)} + \|f^{(k)}\|_{L_2(Q_{s_0})}) \quad \forall s_0 \in (0, s_*]. \end{aligned} \tag{27}$$

Далее, для $w^{(1)} = v^{(1)}$, $w^{(k+1)} = v^{(k+1)} - v^{(k)}$, $k \ge 1$, получаем

$$\frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial s} = \frac{\partial^2 w^{(k+1)}}{\partial x^2} + g^{(k+1)}(s, x), \quad (s, x) \in Q_{s_*},$$

$$g^{(k+1)}(s, x) = \int_0^s R(s, \nu) w^{(k)}(\nu, x) d\nu,$$

$$w^{(k+1)}(0, x) = 0, \qquad x \in [0, \ell],$$

$$w^{(k+1)}(s, 0) = w^{(k+1)}(s, \ell) = 0, \qquad s \in [0, s_*],$$

откуда в силу (27)

$$\begin{aligned} \|w^{(k+1)}\|^2_{H^{1,2}(Q_s)} \le A_1^2 \|g^{(k+1)}\|^2_{L_2(Q_s)} = \\ = A_1^2 \int_0^\ell \int_0^s \left(\int_0^{t_1} R(t_1, \nu) w^{(k)}(\nu, x) d\nu\right)^2 dt_1 dx \le \\ \le A_1^2 \int_0^\ell \int_0^s t_1 \int_0^{t_1} R^2(t_1, \nu) {w^{(k)}}^2(\nu, x) d\nu dt_1 dx \le \\ \le A_1^2 \bar{R}^2 \int_0^s t_1 \|w^{(k)}\|^2_{L_2(Q_{t_1})} dt_1 \le \\ \le A_2^2 \int_0^s t_1 \|w^{(k)}\|^2_{H^{1,2}(Q_{t_1})} dt_1 \qquad \forall s \in (0, s_*], \end{aligned} \tag{28}$$

$$A_2 = A_1\bar{R}, \quad \bar{R} = \max|R(s,\nu)|, \quad s,\nu \in [0,s_*].$$

Воспользуемся оценкой многократно:

$$\begin{gathered}
\|w^{(k+1)}\|^2_{H^{1,2}(Q_{s_*})} \le A_2^2 \int_0^{s_*} t_1 \|w^{(k)}\|^2_{H^{1,2}(Q_{t_1})} dt_1 \le \\
\le A_2^4 \int_0^{s_*} t_1 \int_0^{t_1} t_2 \|w^{(k-1)}\|^2_{H^{1,2}(Q_{t_2})} dt_2 dt_1 \le \ldots \le \\
\le A_2^{2k} \int_0^{s_*} t_1 \int_0^{t_1} \ldots t_{k-1} \int_0^{t_{k-1}} t_k \|w^{(1)}\|^2_{H^{1,2}(Q_{t_k})} dt_k \ldots dt_1 \le \\
\le A_2^{2k} \|w^{(1)}\|^2_{H^{1,2}(Q_{s_*})} \int_0^{s_*} t_1 \int_0^{t_1} \ldots t_{k-1} \int_0^{t_{k-1}} t_k dt_k \ldots dt_1 = \\
= A_3^2 A_2^{2k} s_*^{2k} (2^k k!)^{-1}, \qquad k \ge 1,
\end{gathered} \tag{29}$$

$$A_3 = \|w^{(1)}\|_{H^{1,2}(Q_{s_*})} = \|v^{(1)}\|_{H^{1,2}(Q_{s_*})}.$$

Элементы $v^{(k)} \in H^{1,2}(Q_{s_*})$, $\;k \ge 1$, являются частичными суммами ряда $w^{(1)} + w^{(2)} + w^{(3)} + \ldots$, который мажорируется сходящимся числовым (достаточно воспользоваться признаком Даламбера):

$$\begin{gathered}
\|w^{(1)}\|_{H^{1,2}(Q_{s_*})} + \ldots + \|w^{(k+1)}\|_{H^{1,2}(Q_{s_*})} + \ldots \le \\
\le A_3 + \ldots + A_3 A_2^k s_*^k (2^k k!)^{-1/2} + \ldots = A_3 A_4.
\end{gathered}$$

Поэтому последовательность $v^{(k)}$ сходится к $v \in H^{1,2}(Q_{s_*})$, причем

$$\begin{gathered}
v^{(0)}(s,x) = 0 \Rightarrow f^{(1)}(s,x) = r(s,x) \Rightarrow \\
\Rightarrow A_3 = \|v^{(1)}\|_{H^{1,2}(Q_{s_*})} \le A_1(\|\tilde{\varphi}\|_{H^1(0,\ell)} + \|r\|_{L_2(Q_{s_*})}) \Rightarrow \\
\Rightarrow \|v\|_{H^{1,2}(Q_{s_*})} \le A_3 A_4 \le \\
\le A_1 A_4 (\|\tilde{\varphi}\|_{H^1(0,\ell)} + \|r\|_{L_2(Q_{s_*})}).
\end{gathered} \tag{30}$$

Переходя к пределу при $k \to +\infty$ в (25) заключаем, что $v(s,x) \in H^{1,2}(Q_{s_*})$ — решение п. в. краевой задачи для уравнения (24).

Если предположить, что существует еще одно решение $\tilde{v}(s,x)$, то для $v(s,x) - \tilde{v}(s,x)$ получаем однородную краевую задачу ($r(s,x) = 0$, $\tilde{\varphi}(x) = 0$). Из оценки (30) следует $v(s,x) = \tilde{v}(s,x)$ в $H^{1,2}(Q_{s_*})$. Замены переменных (21), (23) гарантируют включение $c(t,x) \in H^{1,2}(Q_{s_*})$. Таким образом, существование и единственность решения п. в. краевой задачи для (24), а значит, и задачи (18), (19), доказаны.

Осталось доказать оценку (20). Возвращаясь к времени t, из (30) получаем:

$$\|u\|_{H^{1,2}(Q_{t_*})} \le A_5(\|\tilde{\varphi}\|_{H^1(0,\ell)} + \|\tilde{h}\|_{L_2(Q_{t_*})}).$$

Воспользуемся теперь определениями функции $\tilde{h}(t,x)$ в (22) и начальных данных $\tilde{\varphi}(x)$ для уравнения (24):

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H^1(0,\ell)} \le \|\varphi\|_{H^1(0,\ell)} + (\frac{\ell}{3} + \frac{1}{\ell})^{1/2}(c_\ell(0) + c_0(0)) \le$$
$$\le \|\varphi\|_{H^1(0,\ell)} + A_6(\|c_\ell\|_{H^1(0,t_*)} + \|c_0\|_{H^1(0,t_*)})$$

(здесь мы воспользовались тем, что пространство $H^1(0,t_*)$ вложено в $C[0,t_*]$, т. е. $\|\cdot\|_C \le A_7\|\cdot\|_{H^1}$),

$$\|\tilde{h}\|_{L_2(Q_{t_*})} \le A_8(\|h\|_{L_2(Q_{t_*})} + \|c_0\|_{H^1(0,t_*)} + \|c_\ell\|_{H^1(0,t_*)}).$$

Тогда

$$\|u\|_{H^{1,2}(Q_{t_*})} \le A_9(\|\varphi\|_{H^1(0,\ell)}+$$
$$+\|h\|_{L_2(Q_{t_*})} + \|c_0\|_{H^1(0,t_*)} + \|c_\ell\|_{H^1(0,t_*)})$$

и справедливость оценки (20) теперь следует из (21).

Теорема доказана. $\square$

При $c_0(t) = c_\ell(t)$, $\varphi(x) = \bar{c}$ доказательство теоремы 1 несколько упрощается — выражения $(xc_\ell(t) - (x-\ell)c_0(t))/\ell$, $(x\dot{c}_\ell(t) - (x-\ell)\dot{c}_0(t))/\ell$ равны соответственно $c_0(t)$, $\dot{c}_0(t)$, а $\tilde{\varphi}(x) = 0$.

Следствие. *Пусть условия краевой задачи (18), (19) симметричны:*

$$\varphi(x) = \varphi(\ell - x), \quad x \in [0,\ell], \qquad c_0(t) = c_\ell(t), \quad t \in [0,t_*],$$

$$h(t,x) = h(t,\ell - x) \text{п. в. в } Q_{t_*}.$$

Тогда $c(t,x) = c(t,\ell - x)$ *в* Q_{t_*}, $\partial c/\partial x(t,0) = -\partial c/\partial x(t,\ell)$ *п. в. в* $(0,t_*)$.

Действительно, для функции $\tilde{c}(t,x) = c(t,\ell - x)$ получаем ту же краевую задачу (18), (19), что и для $c(t,x)$. В силу единственности решений $\tilde{c}(t,x) = c(t,x)$ в $H^{1,2}(Q_{t_*})$, т. е. $\tilde{c}(t,x) = c(t,x)$ $\forall$ $(t,x) \in Q_{t_*}$.

Равные в $H^{1,2}(Q_{t_*})$ элементы определяют равные в $L_2(0,t_*)$ следы $\partial c/\partial x(t,0)$ и $\partial\tilde{c}/\partial x(t,0) = -\partial c/\partial x(t,\ell)$.

Следствие. *Функция $z(t,x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$, определенная формулой (12), имеет непрерывную производную по t и удовлетворяет уравнению (2).*

Иными словами, в классе решений из $H^{1,2}(Q_{t_*})$ система (1), (2) действительно эквивалентна уравнению (13). При этом $z(t,x)$ продолжается по непрерывности на замыкание $\bar{Q}_{t_*}$ и следы $z(t,\cdot)$, $z(\cdot,x)$ можно понимать как функции $z(t,x)$ при фиксированных $t \in [0,t_*]$ или $x \in [0,\ell]$. Более того, если подставить в (24) решение $v(s,x) \in H^{1,2}(Q_{s_*})$ и считать интегральное слагаемое уже известной функцией из $L_2(Q_{s_*})$, то из теоремы 2.1[8,c.158] в исходных переменных получаем $c(t,\cdot)$, $z(t,\cdot) \in H^1(0,\ell)$ $\forall t \in [0,t_*]$. Зависимость по t здесь непрерывная в норме $H^1(0,\ell)$.

Следствие. *Рассмотрим уравнение (18) как общий вид семейства уравнений (13) при $T(\cdot) \in C^1[0,t_*]$, $T(t) \in [T^-,T^+]$, $T^- > 0$, с произвольной функцией $\psi \in L_2(0,\ell)$ вместо $\bar{z}$ (постоянное начальное распределение $\psi(x) = \bar{z}$ — частный случай) и краевыми условиями (19). Тогда в оговоренном классе температурных зависимостей коэффициентов модели справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\|c\|_{H^{1,2}(Q_{t_*})} \le A(\|\varphi\|_{H^1(0,\ell)}+ \\ +\|\psi\|_{L_2(0,\ell)} + \|c_0\|_{H^1(0,t_*)} + \|c_\ell\|_{H^1(0,t_*)}),\end{gathered} \tag{31}$$

где константа A не зависит не только от $\varphi, \psi, c_0, c_\ell$, но и от допустимой реализации $T(\cdot)$.

Действительно, определим $\bar{s}_*$ условием

$$\int_0^{t_*} D(T(\tau))d\tau \le \bar{s}_* \qquad \forall T(\cdot).$$

Например, $\bar{s}_* = D(T^+)t_*$. Из уравнения (25) в $Q_{\bar{s}_*}$, полагая $f^{(k)}$ произвольной из $L_2(Q_{\bar{s}_*})$ и $v^{(k)}(s,0) = v^{(k)}(s,\ell) = 0$, $s \in [0,\bar{s}_*]$, получим согласно [9] оценку вида (26) для $s_* = \bar{s}_*$ с независящей от $T(\cdot)$ константой A_1 ("коэффициент диффузии"в (25) равен единице). В силу (27) такой оценкой можно пользоваться и при $s_* < \bar{s}_*$ независимо от допустимой реализации $T(\cdot)$. Далее, в (28) норма $\|R\|_C$ равномерно ограничена по $T(\cdot)$ и можно выбрать $A_2 \ne A_2(T(\cdot))$, $A_4 \ne$

$A_4(T(\cdot))$, $A_5 \neq A_5(T(\cdot))$. Из анологичных соображений определим $A_8 \neq A_8(T(\cdot))$. Константа A_7 (A_6) зависит от t_*, но не от $T(\cdot)$. Для вывода (31) остается воспользоваться конкретным видом функции $h(t,x)$ в (13).

Если $\psi(x) \in L_2(0,\ell)$ подставить вместо $\bar{z}$ и в (12), то $\partial z/\partial t \in L_2(Q_{t_*})$ и уравнение (2) удовлетворяется п. в. Гладкость $c(t,x)$, $z(t,x)$, естественно, зависит от гладкости начальных данных $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Вернемся к исходной задаче (13)-(17), полагая реализацию $T(\cdot)$ на $[0,t_*]$ фиксированной (произвольной допустимой). Рассмотрим уравнение (13) с симметричными краевыми условиями

$$c(0,x) = \bar{c}, \quad c_0(t) = c_\ell(t) \in H^1(0,t_*), \quad c_0(0) = c_\ell(0) = \bar{c}.$$

Поскольку выполнены все предположения следствия 1, то необходимо варьированием $c_0(t)$ добиться выполнения оставшегося динамического условия (16):

$$\frac{d}{dt}(g^{-1}(t)c_0(t)) = -b(t)g^{-2}(t)c_0^2(t) + D(t)\frac{\partial c}{\partial x}(t,0) +$$
$$+\mu s(t)\theta_1 \int_0^t \exp(\tau - t/\theta_0)b(\tau)g^{-2}(\tau)c_0^2(\tau)d\tau, \qquad c_0(0) = \bar{c}.$$

Обозначив $w(t) = \int_0^t b(\tau)g^{-2}(\tau)c_0^2(\tau)\exp(\tau/\theta_0)d\tau$, перепишем уравнение в форме системы

$$\begin{aligned} \dot{c}_0(t) &= g^{-1}(t)\dot{g}(t)c_0(t) - b(t)g^{-1}(t)c_0^2(t) + \\ &+ D(t)g(t)\frac{\partial c}{\partial x}(t,0) + g(t)\mu s(t)\theta_1 \exp(-t/\theta_0)w(t), \\ \dot{w}(t) &= b(t)g^{-2}(t)\exp(t/\theta_0)c_0^2(t), \qquad c_0(0) = \bar{c}, \;\; w(0) = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Перейдем к более общему рассмотрению. В предположениях следствия 1 о симметричности краевой задачи (18), (19) определим при фиксированных $h(t,x) \in L_2(Q_{t_*})$, $\varphi(x) \in H^1(0,\ell)$ $(h(t,x) = h(t,\ell - x)$

п. в., $\varphi(x) = \varphi(\ell - x)$, $c_0(t) = c_\ell(t)$) операторы

$$\begin{gathered}F(c_0): \quad \Omega \subset H^1(0,t_*) \to H^{1,2}(Q_{t_*}),\\ F(c_0)(t,x) = c(t,x),\\ \Omega = \{c_0 \in H^1(0,t_*) | c_0(0) = \varphi(0)\},\\ G(u): H^{1,2}(Q_{t_*}) \to L_2(0,t_*),\\ G(u)(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) \quad \ldots\end{gathered} \tag{33}$$

Здесь $c(t,x)$ — решение п. в. задачи (18), (19).

По известному свойству следов функций из $H^{1,2}(Q_{t_*})$ [9] оператор G линеен и непрерывен:

$$\|G(u)\|_{L_2(0,t_*)} \le A_0 \|u\|_{H^{1,2}(Q_{t_*})}, \qquad A_0 \ne A_0(u).$$

Следовательно, с учетом (20) для оператора $GF: \Omega \to L_2(0,t_*)$ справедлива оценка

$$\|GF(c_0)\|_{L_2(0,t_*)} \le A_1 \|h\|_{L_2(Q_{t_*})} + A_2 \|\varphi\|_{H^1(0,\ell)} + A_3 \|c_0\|_{H^1(0,t_*)}, \tag{34}$$

где константы A_i (отличные от A_i в доказательстве теоремы 1) не зависят от h, φ, c_0. Из дальнейшего станет ясно, что A_3 целесообразно выбрать, по возможности, минимальной.

Подчеркнем, что c_0 и φ не являются независимыми ($c_0(0) = \varphi(0)$), операторы F, GF, вообще говоря, нелинейны — их множество определения Ω не является линейным при $\varphi(0) \ne 0$. Значения F, GF определяются при фиксированных симметричных h, φ в (18), (19), аргументом является $c_0 \in \Omega = \Omega(\varphi)$ (в (19) $c_\ell(t) = c_0(t)$).

Система (32) имеет следующий общий вид:

$$\begin{gathered}\dot c_0(t) = f_1(t, c_0(t), w(t)) + L(c_0(\cdot))(t),\\ \dot w(t) = f_2(t, c_0(t)), \qquad c_0(0) = \varphi(0), \qquad w(0) = 0,\end{gathered} \tag{35}$$

где $L(c_0(\cdot))(t) = g(t)D(t)GF(c_0(\cdot))(t)$. Обозначение $c_0(\cdot)$ оттеняет тот факт, что числовые значения $L(c_0(\cdot))(t_0)$ п. в. в $[0,t_*]$ определяются с учетом всех значений функции $c_0: [0,t_*] \to R^1$. Точнее, как нетрудно заметить, используются $c_0(t)$, $t \in [0,t_0]$, т. е. (35) не является системой с опережающим аргументом. Определенная сложность исследования системы (35) заключается в том, что непрерывность правой части формулируется лишь с учетом производной $\dot{c}_0$ (в норме пространства H^1), которая входит и в левую часть. В теории уравнений с последействием [10, 11] системы с подобными свойствами относятся к нейтральному типу и требуют более сложной техники доказательств теорем существования и единственности решений.

Лемма 1. *Оператор GF является липшицевым на Ω, причем в качестве константы Липшица можно взять A_3 из оценки (34).*

Доказательство. В самом деле, разность $GF(c_{01})-GF(c_{02}) = G(F(c_{01})-F(c_{02}))$ представляет собой след $\partial/\partial x|_{x=0}(c_1(t,x) - c_2(t,x))$ разности двух решений п. в. симметричных краевых задач (18), (19) с равными h, φ и различными c_{01}, c_{02}. Эта разность сама является решением п. в. (18), (19) с $h = 0$, $\varphi = 0$ $c_0 = c_{01} - c_{02}$. Условие согласования выполнено ($c_0(0) = 0$), поэтому в силу (34)

$$\|GF(c_{01}) - GF(c_{02})\|_{L_2(0,t_*)} \le A_3\|c_{01} - c_{02}\|_{H^1(0,t_*)}. \tag{36}$$

Для оператора L в качестве константы Липшица можно взять $A_4 = A_3 \max(g(t)D(t))$, $t \in [0, t_*]$. В контексте замечания 3 возможен выбор A_4 независимо от $T(\cdot)$. □

В (36) формально $A_3 = A_3(t_*)$. Однако в процессе доказательства теорем 2, 3 потребуется, возможно, уменьшать t_*. Необходима уверенность, что при $t_* \to 0$ (т. е. на некотором отрезке времени $[0, t_0]$) можно пользоваться оценкой вида (36) с независящей от $t_* \in (0, t_0]$ константой Липшица. Сужению c_0 на $[0, \tilde{t}_*]$, $\tilde{t}_* < t_*$, соответствует сужение $GF(c_0)$ на $[0, \tilde{t}_*]$.

Лемма 2. *Пусть для некоторого $t_* = t_0$ в $\Omega = \Omega(t_0) = \{c_0 \in H^1(0, t_0) | c_0(0) = \varphi(0)\}$ выполняется оценка (36). Тогда*

$$\begin{gathered}\|GF(c_{01}) - GF(c_{02})\|_{L_2(0,t_*)} \le A_3(1 + t_0^2/4)\|c_{01} - c_{02}\|_{H^1(0,t_*)} \\ \forall t_* \in (0, t_0], \qquad \forall c_{0i} \in \Omega(t_*).\end{gathered} \tag{37}$$

Доказательство. Фиксируем $c_{0i} \in \Omega(t_*)$ и определим $\tilde{c}_{0i}(t) = c_{0i}(t)$, $t \in [0, t_*]$, $\tilde{c}_{0i}(t) = c_{0i}(t_*)$, $t \in [t_*, t_0]$. Тогда

$$\begin{gathered}\tilde{c}_{0i} \in \Omega(t_0), \\ c_i(t,x) = F(c_{0i})(t,x) = \tilde{c}_i(t,x) = F(\tilde{c}_{0i})(t,x), \\ (t,x) \in Q_{t_*} = (0, t_*) \times (0, \ell),\end{gathered}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial x}(t,0) = GF(c_{0i})(t) = \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial x}(t,0) = GF(\tilde{c}_{0i})(t) \;..\;\; (0,t_*)$$

и в силу (36) для $(0, t_0)$

$$\|GF(c_{01}) - GF(c_{02})\|^2_{L_2(0,t_*)} = \|GF(\tilde{c}_{01}) - GF(\tilde{c}_{02})\|^2_{L_2(0,t_*)} \leq$$

$$\leq \|GF(\tilde{c}_{01}) - GF(\tilde{c}_{02})\|^2_{L_2(0,t_0)} \leq A_3^2 \|\tilde{c}_{01} - \tilde{c}_{02}\|^2_{H^1(0,t_0)} =$$

$$= A_3^2(\|c_{01} - c_{02}\|_{H^1(0,t_*)} + (c_{01}(t_*) - c_{02}(t_*))^2(t_0 - t_*)).$$

Далее, поскольку $c_{01}(0) - c_{02}(0) = \varphi(0) - \varphi(0) = 0$, то

$$|c_{01}(t_*) - c_{02}(t_*)| = |\int_0^{t_*} (\dot{c}_{01}(\tau) - \dot{c}_{02}(\tau))d\tau| \leq$$
$$\leq t_*^{1/2}\|\dot{c}_{01} - \dot{c}_{02}\|_{L_2(0,t_*)} \leq t_*^{1/2}\|c_{01} - c_{02}\|_{H_1(0,t_*)}.$$

Следовательно,

$$\|GF(c_{01}) - GF(c_{02})\|^2_{L_2(0,t_*)} \leq$$
$$\leq A_3^2(1 + t_*(t_0 - t_*))\|c_{01} - c_{02}\|^2_{H^1(0,t_*)}$$

и выполняется (37). Лемма доказана. □

Оценка (37) является достаточно грубой, ее можно уточнить, однако для наших целей в этом нет необходимости.

Обобщая систему (35), рассмотрим векторное функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \ell(t, x_t(\cdot)), \qquad x(0) = x_0 \in U, \tag{38}$$

где U — область в R^n, вектор-функция f непрерывна и локально липшицева по x в области $(t_1, t_2) \times U \supset [0, t_0] \times U$, $x_t(\cdot) = x(\cdot) : [0, t] \to U$ — сужение вектор-функции $x(\cdot)$ на отрезок $[0, t]$.

Относительно отображения ℓ будем предполагать, что:

1) $\ell(t, \cdot) : \Omega(t) \to R^n, \quad t > 0,$
$\Omega(t) = \{y(\cdot) \in H^1((0,t), R^n) | y(0) = x_0\};$
2) $\;\; t_* \in (0, t_0] \;\; y(\cdot) \in \Omega(t_*) \;\; -$
$\lambda(\cdot) \quad \lambda(t) = \ell(t, y_t(\cdot)) \;\; L_2((0, t_*), R^n);$
3) $\;\; y(\cdot) \mapsto \lambda(\cdot) \; (\;\; t_* \in (0, t_0])$
, ..

$$\|\lambda_1(\cdot) - \lambda_2(\cdot)\|_{L_2((0,t_*),R^n)} \le B\|y_1(\cdot) - y_2(\cdot)\|_{H^1((0,t_*),R^n)}, \qquad (39)$$

где $y_i(\cdot) \in \Omega(t_*)$, а константа B не зависит от $t_* \in (0, t_0]$.

Под $L_2((0,t_*),V)$, $H^1((0,t_*),V)$ понимаем пространства вектор-функций со значениями в V и компонентами из $L_2(0,t_*)$, $H^1(0,t_*)$ соответственно,

$$\|y(\cdot)\|^2_{H^1} = \|y(\cdot)\|^2_{L_2} + \|\dot{y}(\cdot)\|^2_{L_2},$$

в R^n — евклидова норма $|\cdot|$.

Преобразуем уравнение (38) в интегральное:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau + \int_0^t \ell(\tau, x_\tau(\cdot))d\tau. \qquad (40)$$

В операторной форме:

$$x(\cdot) = x_0 + \Phi(x(\cdot)) + \Lambda(x(\cdot)), \qquad (41)$$

$$\Phi(x(\cdot))(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau, \quad \Lambda(x(\cdot))(t) = \int_0^t \ell(\tau, x_\tau(\cdot))d\tau,$$
$$\Phi : H^1((0,t_*),U) \to H^1((0,t_*),R^n),$$
$$\Lambda : \Omega(t_*) \to H^1((0,t_*),R^n), \qquad \forall t_* \in (0,t_0].$$

Под решением п. в. уравнения (38) понимаем вектор-функцию $x(\cdot) \in H^1((0,t_*),U)$, которая удовлетворяет (38) почти всюду на $[0,t_*]$ и заданному начальному условию $x(0) = x_0$. Для оператора $x_0 + \Phi + \Lambda$ это решение является неподвижной точкой в $\Omega(t_*) \cap H^1((0,t_*),U)$. Как обычно, x_0 обозначает вектор или вектор-функцию $x(t) \equiv x_0$ в зависимости от контекста.

Вначале рассмотрим случай $f = f(t)$.

Теорема 2. *Пусть в (39) $B < 1$. Тогда при $t_* < (B^{-2} - 1)^{1/2}$ решение п. в. на $[0,t_*]$ уравнения*

$$\dot{x}(t) = \ell(t, x_t(\cdot)) + \xi(t), \qquad x(0) = x_0 \in U = R^n, \qquad (42)$$

существует в $\Omega(t_*)$ и единственно $\forall \xi(\cdot) \in L_2((0,t_*),R^n)$. Отображение $\xi(\cdot) \in L_2 \mapsto x(\cdot) \in H^1$ непрерывно.

Доказательство. Запишем задачу в операторной форме:

$$x(\cdot) = x_0 + \Lambda(x(\cdot)) + \eta(\cdot), \qquad \eta(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau. \qquad (43)$$

Определим итерационную процедуру

$$x^{(k+1)}(\cdot) = x_0 + \Lambda(x^{(k)}(\cdot)) + \eta(\cdot), \quad k \geq 0, \quad x^{(0)}(\cdot) = x_0. \tag{44}$$

Тогда для $k \geq 1$

$$\begin{gathered}
\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|^2_{H^1} = \|\Lambda(x^{(k)}) - \Lambda(x^{(k-1)})\|^2_{H^1} = \\
= \| \int_0^t (\ell(\tau, x^{(k)}_\tau(\cdot)) - \ell(\tau, x^{(k-1)}_\tau(\cdot)))d\tau\|^2_{L_2} + \\
+\|\ell(t, x^{(k)}_t(\cdot)) - \ell(t, x^{(k-1)}_t(\cdot))\|^2_{L_2} \leq \\
\leq \|t^{1/2}\|\ell(\tau, x^{(k)}_\tau(\cdot)) - \ell(\tau, x^{(k-1)}_\tau(\cdot))\|_{L_2((0,t),R^n)}\|^2_{L_2(0,t_*)} + \\
+B^2\|x^{(k)}_{t_*} - x^{(k-1)}_{t_*}\|^2_{H^1} \leq \\
\leq t_*^2\|\ell(t, x^{(k)}_t(\cdot)) - \ell(t, x^{(k-1)}_t(\cdot))\|^2_{L_2} + B^2\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|^2_{H^1} \leq \\
\leq B^2(1+t_*^2)\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|^2_{H^1}, \\
L_2 = L_2((0,t_*), R^n), \qquad H^1 = H^1((0,t_*), R^n).
\end{gathered}$$

Следовательно, при $t_* < (B^{-2} - 1)^{1/2}$

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{H^1} \leq q\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{H^1}, \qquad q = B(1+t_*^2)^{1/2} < 1,$$

и последовательность $x^{(k)}(\cdot)$ сходится к $x(\cdot) \in H^1$. Поскольку сходимость в H^1 влечет сходимость в $C([0,t_*], R^n)$ и $x^{(k)}(0) = x_0$, то $x(0) = x_0$ и $x(\cdot) \in \Omega(t_*)$. Переходя к пределу в (44), заключаем, что $x(\cdot)$ — искомое решение.

Предположим, что существует другое решение $y(\cdot) \in \Omega(t_*)$ Тогда

$$\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{H^1} = \|\Lambda(x(\cdot) - \Lambda(y(\cdot))\|_{H^1} \leq q\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{H^1},$$

откуда $x(\cdot) = y(\cdot)$ и единственность доказана.

Пусть теперь $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ — решения задачи при различных $\xi_1(\cdot)$, $\xi_2(\cdot)$: $x_i(\cdot) = x_0 + \Lambda(x_i(\cdot)) + \eta_i$. Из оценок

$$\begin{gathered}
\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{H^1} \leq \|\Lambda(x_1(\cdot)) - \Lambda(x_2(\cdot))\|_{H^1} + \|\eta_1(\cdot) - \eta_2(\cdot)\|_{H^1} \leq \\
\leq q\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{H^1} + \|\xi_1(\cdot) - \xi_2(\cdot)\|_{L_2} + \|\int_0^t (\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau))d\tau\|_{L_2} \leq \\
\leq q\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{H^1} + \|\xi_1(\cdot) - \xi_2(\cdot)\|_{L_2} + \\
+\|t^{1/2}\|\xi_1(\cdot) - \xi_2(\cdot)\|_{L_2((0,t),R^n)}\|_{L_2(0,t_*)} \leq \\
\leq q\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{H^1} + (1+t_*)\|\xi_1(\cdot) - \xi_2(\cdot)\|_{L_2}
\end{gathered}$$

получаем

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{H^1} \leq \frac{1+t_*}{1-q}\|\xi_1(\cdot) - \xi_2(\cdot)\|_{L_2}. \tag{45}$$

Последнее влечет непрерывную зависимость $x(\cdot)$ от $\xi(\cdot)$.

Теорема доказана. □

Следствие. *При $t_* < (B^{-2} - 1)^{1/2}$ оператор $(I - \Lambda) : \Omega(t_*) \to \Omega(t_*)$ непрерывно обратим, $(I-\Lambda)^{-1}$ является липшицевым. Здесь I — тождественный оператор в $H^1 = H^1((0, t_*), R^n)$.*

Доказательство. По построению оператор $(I-\Lambda)$ определен на множестве $\Omega(t_*)$ и отображает его в $\Omega(t_*)$. Рассмотрим теперь в $\Omega(t_*)$ уравнение $(I-\Lambda)(x(\cdot)) = \mu(\cdot) \in \Omega(t_*)$. Положим в (43) $\xi(t) = \dot{\mu}(t)$ п. в. Тогда в силу теоремы 2 оператор $(I-\Lambda)^{-1} : \Omega(t_*) \to \Omega(t_*)$ существует. Из

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{H^1} \leq q\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{H^1} + \|\eta_1(\cdot) - \eta_2(\cdot)\|_{H^1}$$

получаем $\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|_{H^1} \leq (1-q)^{-1}\|\mu_1(\cdot)-\mu_2(\cdot)\|_{H^1}$, откуда следует непрерывность $(I - \Lambda)^{-1}$ на $\Omega(t_*)$. В качестве константы Липшица можно взять $(1 - q)^{-1}$.

Подчеркнем, что как Λ, так и $I-\Lambda$ не являются линейными операторами в силу нелинейности множества своего определения $\Omega(t_*)$ при $x_0 \neq 0$. □

Перейдем к исследованию общего случая.

Теорема 3. *Пусть в (39) $B < 1$. Тогда при достаточно малом t_* решение п. в. на $[0, t_*]$ уравнения (38) существует и единственно.*

Доказательство. Выберем $t_* < (B^{-2}-1)^{1/2}$ и α настолько малыми, чтобы на множестве

$$\Pi = \{(t,x)|t \in [0,t_*], \quad |x - x_0| \leq \alpha\} \subset [0, t_0] \times U$$

вектор-функция f была липшицевой по x с некоторой константой Липшица N.

С учетом непрерывной обратимости оператора $(I - \Lambda)$ перепишем уравнение (38) в операторной форме (см.(41)):

$$x(\cdot) = \Psi(x(\cdot)) = (I - \Lambda)^{-1}(x_0 + \Phi(x(\cdot))). \tag{46}$$

Если $x(\cdot) \in M_c = \{x(\cdot) \in C([0,t_*], R^n)|\ |x(t)-x_0| \leq \alpha\}$, то $x_0+\Phi(x(\cdot)) \in \Omega(t_*)$ и применение оператора $(I - \Lambda)^{-1}$ правомерно.

Определим

$$x^{(0)}(\cdot) = x_0,$$
$$x^{(k+1)}(\cdot) = (I - \Lambda)^{-1}(x_0 + \Phi(x^{(k)}(\cdot))), \tag{47}$$

т. е. $x^{(k+1)}(\cdot) = x_0 + \Phi(x^{(k)}(\cdot)) + \Lambda(x^{(k+1)}(\cdot)), \quad k \geq 0$. Напомним,что x_0 — вектор или вектор-функция $x(t) \equiv x_0$ в зависимости от контекста.

Чтобы последовательность $x^{(k)}(\cdot)$ была определена корректно, докажем, что при достаточно малом t_* из $x(\cdot) \in M_c$ следует $y(\cdot) = \Psi(x(\cdot)) \in M_c$. Действительно, по построению $y(\cdot) \in \Omega(t_*) \Rightarrow y(\cdot) \in H^1$, $y(0) = x_0 \Rightarrow y \in C$, где $H^1 = H^1((0, t_*), R^n)$, $C = C([0, t_*], R^n)$. Далее:

$$y(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau + \int_0^t \ell(\tau, y_\tau(\cdot))d\tau -$$
$$- \int_0^t \ell(\tau, x_0)d\tau + \int_0^t \ell(\tau, x_0)d\tau \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|y(\cdot) - x_0\|_C \leq t_* \hat{f} + t_*^{1/2} B \|y(\cdot) - x_0\|_{H^1} + \hat{\ell} \leq$$
$$\leq t_* \hat{f} + t_*^{1/2} B(\|y(\cdot) - x_0\|_{L_2} + \|\dot{y}(\cdot)\|_{L_2}) + \hat{\ell} \leq$$
$$\leq t_* \hat{f} + t_* B \|y(\cdot) - x_0\|_C + t_*^{1/2} B \|\dot{y}(\cdot)\|_{L_2} + \hat{\ell},$$
$$\hat{f} = \max_{\Pi} |f|, \qquad \hat{\ell} = \int_0^{t_*} |\ell(\tau, x_0)|d\tau,$$
$$\|y(\cdot) - x_0\|_C \leq (1 - t_* B)^{-1}(t_* \hat{f} + \hat{\ell} + t_*^{1/2} B \|\dot{y}(\cdot)\|_{L_2}), \tag{48}$$
$$\|\dot{y}(\cdot)\|_{L_2} \leq t_*^{1/2} \hat{f} + B \|y(\cdot) - x_0\|_{H^1} + \|\ell(t, x_0)\|_{L_2} \leq$$
$$\leq t_*^{1/2} \hat{f} + B t_*^{1/2} \|y(\cdot) - x_0\|_C + B \|\dot{y}(\cdot)\|_{L_2} + \|\ell(t, x_0)\|_{L_2},$$
$$\|\dot{y}(\cdot)\|_{L_2} \leq (1 - B)^{-1}(t_*^{1/2} \hat{f} + t_*^{1/2} B \|y(\cdot) - x_0\|_C + \|\ell(t, x_0)\|_{L_2}). \tag{49}$$

Здесь мы дополнительно предположили, что в (48) $t_* B < 1$.

Подставляя теперь оценку (49) в (48), получим:

$$\|y(\cdot) - x_0\|_C \leq (1 - t_* B)^{-1}(t_* B(1 - B)^{-1} \hat{f} +$$
$$+ t_* B^2 (1 - B)^{-1} \|y(\cdot) - x_0\|_C + t_*^{1/2} B(1 - B)^{-1} \|\ell(t, x_0)\|_{L_2} + t_* \hat{f} + \hat{\ell}),$$
$$\|y(\cdot) - x_0\|_C (1 - (1 - t_* B)^{-1} t_* B^2 (1 - B)^{-1}) \leq$$
$$\leq (1 - t_* B)^{-1}(t_* B(1 - B)^{-1} \hat{f} + t_* \hat{f} + \hat{\ell} +$$
$$+ t_*^{1/2} B(1 - B)^{-1} \|\ell(t, x_0)\|_{L_2})$$

и $\|y(\cdot)-x_0\|_C \le \alpha$ при достаточно малом t_*.

Перейдем теперь к доказательству сходимости последовательности $x^{(k)}(\cdot)$ в $C = C([0,t_*],R^n)$, точнее, в M_c:

$$\begin{gathered}\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_C \le Nt_*\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_C+\\ +t_*^{1/2}B\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_{H^1} \le Nt_*\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_C+\\ +t_*^{1/2}B(\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_{L_2}+\|\dot{x}^{(k+1)}-\dot{x}^{(k)}\|_{L_2}) \le\\ Nt_*\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_C + t_*B\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_C+ \qquad (50)\\ +t_*^{1/2}B\|\dot{x}^{(k+1)}-\dot{x}^{(k)}\|_{L_2},\\ \|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_C \le (1-t_*B)^{-1}(Nt_*\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_C+\\ +t_*^{1/2}B\|\dot{x}^{(k+1)}-\dot{x}^{(k)}\|_{L_2}),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\|\dot{x}^{(k+1)}-\dot{x}^{(k)}\|_{L_2} \le N\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_{L_2}+\\ +B\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_{H^1} \le t_*^{1/2}N\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_C+\\ +t_*^{1/2}B\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_C + B\|\dot{x}^{(k+1)}-\dot{x}^{(k)}\|_{L_2}, \qquad (51)\\ \|\dot{x}^{(k+1)}-\dot{x}^{(k)}\|_{L_2} \le (1-B)^{-1}(t_*^{1/2}N\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_C+\\ +t_*^{1/2}B\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_C).\end{gathered}$$

Из (50), (51) следует

$$\begin{gathered}\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_C \le (1-t_*B)^{-1}(t_*N\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_C+\\ +t_*^{1/2}B(1-B)^{-1}[t_*^{1/2}N\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_C + t_*^{1/2}B\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_C]),\\ \|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_C(1-(1-t_*B)^{-1}t_*B^2(1-B)^{-1}) \le\\ \le (1-t_*B)^{-1}(1+B(1-B)^{-1})t_*N\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_C,\end{gathered}$$

т. е. при достаточно малом t_* и всех $k \ge 1$

$$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_C \le q\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_C, \quad q<1. \qquad (52)$$

Таким образом, последовательность $x^{(k)}(\cdot)$ сходится в норме $C = C([0,t_*],R^n)$ к некоторой вектор-функции $x(\cdot) \in M_c$.

Далее, поскольку

$$\begin{gathered}\|\Phi(x(\cdot)) - \Phi(x^{(k)}(\cdot))\|_{H^1} \le \\ \le \| \int_0^t (f(\tau,x(\tau)) - f(\tau,x^{(k)}(\tau)))d\tau\|_{L_2} + \\ +\|f(t,x(t)) - f(t,x^{(k)}(t))\|_{L_2} \le t_*^{1/2}(1+t_*)N\|x(\cdot) - x^{(k)}(\cdot)\|_C,\end{gathered} \tag{53}$$

то последовательность $x_0 + \Phi(x^{(k)}(\cdot)) \in \Omega(t_*)$ сходится в норме $H^1 = H^1((0,t_*),R^n)$ к вектор-функции $x_0 + \Phi(x(\cdot)) \in \Omega(t_*)$. Поэтому в (47) можно перейти к пределу при $k \to \infty$. В результате получим (46), откуда следует $x(\cdot) \in H^1$, $x(0) = x_0$, т. е. $x(\cdot) \in \Omega(t_*)$. Существование решения доказано.

Предположим,что существуют два решения п. в. $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$. При необходимости снова уменьшая t_*, изложенным выше способом получим

$$\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_C(1 - t_*(B+N)) \le t_*^{1/2}B\|\dot{x}(\cdot) - \dot{y}(\cdot)\|_{L_2},$$

$$\|\dot{x}(\cdot) - \dot{y}(\cdot)\|_{L_2}(1-B) \le t_*^{1/2}(N+B)\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_C,$$

$$\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_C \le \tilde{q}\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_C, \quad \tilde{q} < 1,$$

$$\tilde{q} = t_*(1 - t_*(N+B))^{-1}B(1-B)^{-1}(N+B).$$

В силу $\tilde{q} < 1$ эти решения совпадают на соответствующем $[0,t_*]$.

Итак, найдется некоторый общий отрезок времени $[0,t_*]$, на котором решение поставленной задачи существует и единственно.

Теорема доказана. □

В качестве следствия в обозначениях доказательства теоремы приведем одну оценку, которая понадобится в дальнейшем.

Вследствие липшицевости оператора $(I - \Lambda)^{-1}$ на области своего определения $\Omega(t_*)$, из (47) по аналогии с (53) получим

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{H^1} \le K_1\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_C, \qquad k \ge 1, K_1 = \mathrm{const},$$

откуда с учетом оценок (52) для решения задачи $x(\cdot) = \lim x^{(k)}(\cdot)$,

$k \to +\infty$, следует

$$\|x\|_{H^1} \le t_*^{1/2}|x_0| + \|x^{(1)} - x_0\|_{H^1} + \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_{H^1} + \ldots \le t_*^{1/2}|x_0| +$$
$$+ \|x^{(1)} - x_0\|_{H^1} + K_1(\|x^{(1)} - x_0\|_C + \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_C + \ldots) \le$$
$$\le t_*^{1/2}|x_0| + \|x^{(1)} - x_0\|_{H^1} + K_1(1-q)^{-1}(\|x^{(1)} - x_0\|_C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|x\|_{H^1} \le t_*^{1/2}|x_0| + K_2\|x^{(1)} - x_0\|_{H^1}. \tag{54}$$

Проводя некоторую аналогию с теорией уравнений с последействием, отметим, что ограничение на константу Липшица по производной (типа $B < 1$ в (39)) является существенным при доказательстве теорем существования и единственности решений систем нейтрального типа [10].

Приведем не претендующие на математическую строгость рассуждения по обоснованию физического смысла условия $B < 1$. Образно говоря, в соответствии с причинно-следственными связями производная $\dot{c}_0$, которая является неявным аргументом диффузионного потока к поверхности мембраны в правой части исходной системы (32), не должна "забегать вперед"по отношению к $\dot{c}_0$ слева. В контексте лемм 1, 2 (см. (32), (33), (36), (37)) условие (39) запишется в виде

$$\|g(t)D(t)(\frac{\partial c_1}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial c_2}{\partial x}(t,0))\|_{L_2(0,t_*)} \le$$
$$\le B\|c_{01} - c_{02}\|_{H^1(0,t_*)} \qquad \forall t_* \in (0,t_0],\ c_{0i}(0) = \bar{c}.$$

Можно выбрать

$$B = \max_{[0,t_0]}(g(t)D(t))A_3(1 + t_0^2/4)^{1/2}. \tag{55}$$

С учетом линейности диффузионного уравнения (13)

$$\|g(t)D(t)\partial c/\partial x(t,0)\|_{L_2(0,t_*)} \le B\|c_0\|_{H^1(0,t_*)}. \tag{56}$$

Здесь $c(t,x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$ — решение п. в. симметричной краевой задачи

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(t)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - a_1(t)c + \int_0^t H(t,\tau)c(\tau,x)d\tau, \tag{57}$$
$$(t,x) \in Q_{t_*} = (0,t_*) \times (0,\ell),$$

$$H(t,\tau) = a_2(t)\exp(\int_t^\tau a_2(s)ds)a_1(\tau),$$

$$c_0(t) = c_\ell(t) \in H^1(0, t_*),$$
$$\frac{\partial c}{\partial x}(t,0) = -\frac{\partial c}{\partial x}(t,\ell) \;..\;\; (0,t_*),$$
$$c(0,x) = 0, \quad x \in [0,\ell], \qquad c_0(0) = c(0,0) = 0.$$

В задаче (57) с нулевыми начальными данными причиной появления диффузанта внутри мембраны является заданная концентрация $c_0(\cdot) \in H^1$ в приповерхностном объеме , а следствием — индуцированный $c_0(\cdot)$ диффузионный поток. Поэтому предположение $B < 1$ в (56) (если не завышать t_0 и A_3 в (55)) не выглядит искусственным. Для металлов, используемых в качестве конструкционных материалов в реакторах, диффузионный поток мал, характерный диапазон коэффициента диффузии $D(t) - 10^{-6} - 10^{-9}$ см^2/с.

По своему определению константа A_3 не зависит от функции $g(t)$. Поэтому с чисто математической точки зрения $B < 1$ при относительно малом

$$\bar{g} = \max_{[0,t_0]} g(t) = g_0 \exp(-E_g/R \max_{[0,t_0]} T(t)) < g_0$$

(при использовании неаррениусовских температурных зависимостей остается первое равенство). Именно при малом $\bar{g}$ (g_0) принятая модель наиболее адекватно отражает ситуацию , когда существенны поверхностные процессы и только сравнительно малая часть водорода проникает в объем мембраны. С ростом значений $g(t)$ в силу $c_0 = g(t)q_0(t)$ диффузант все легче "протыкает"поверхность и процессы на поверхности перестают быть лимитирующими. В этом случае на граничащих с вакуумом поверхностях обычно задают нулевые граничные условия первого рода. Поток газа с поверхности практически становится не десорбционным, а диффузионным: $J(t) = D(t)\partial c/\partial x(t,0)$.

Не исключено, что формально и при $\inf B \geq 1$ (B — из (56)) модель математически непротиворечива — в численных экспериментах при варьировании параметров в широких пределах никаких "особенностей"не наблюдалось, включая вопросы продолжимости решений.

§ 4. Зависимость от параметров и продолжимость решений

Следующий важный вопрос — зависимость решений от параметров. Для определенности считаем зависимость коэффициентов модели от температуры аррениусовской. Наиболее чувствительно решение к изменению коэффициента десорбции $b(t) = b_0 \exp(-E_b/RT(t))$, который является множителем при квадрате концентрации $c_0^2(t)$. Исследуем зависимость от b_0 подробнее.

Запишем исходную систему (32) в виде

$$\begin{gathered}\dot{c}_0(t) = r_1(t)c_0(t) + b_0 r_2(t)c_0^2(t) + \\ +b_0 \int_0^t R(t,\tau)c_0^2(\tau)d\tau + g(t)D(t)\frac{\partial c}{\partial x}(t,0),\end{gathered} \tag{58}$$

$$\begin{gathered}r_1(t) = \dot{g}(t)/g(t) = E_g\dot{T}(t)/RT^2(t),\\ r_2(t) = -g^{-1}(t)\exp(-E_b/RT(t)),\\ R(t,\tau) = g(t)\mu s(t)\theta_1 \exp(-E_b/RT(\tau))g^{-2}(\tau)\\ \exp((\tau - t)/\theta_0),\ c_0(0) = \bar{c}.\end{gathered}$$

Если формально положить $b_0 = 0$, то получаем предельный случай: водород копится на поверхности или диффундирует в объем, но не десорбируется с поверхности.

Фиксируем для случая $b_0 = 0$ отрезок $[0, t_*]$, определяемый доказательством теоремы 3.

Теорема 4. *Существует $\beta > 0$ такое, что определяющие решение задачи функции $c_0(t, b_0)$, $c(t, x, b_0)$ определены соответственно в $[0, t_*]$, $Q_{t_*} = (0, t_*) \times (0, \ell)$ при всех неотрицательных $b_0 \le \beta$ и аналитичны по b_0 :*

$$\begin{gathered}c_0(t, b_0) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{0i}(t)b_0^i, \qquad c_{0i}(t) \in H^1(0, t_*),\\ c(t, x, b_0) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(t, x)b_0^i, \qquad c_i(t, x) \in H^{1,2}(Q_{t_*}),\\ 0 \le b_0 \le \beta.\end{gathered}$$

Сходимость рядов при фиксированном b_0 понимается в $H^1(0, t_*)$ и $H^{1,2}(Q_{t_*})$. При этом сходимость абсолютна, т. е. сходятся и мажорирующие числовые ряды из норм.

Доказательство. При малом изменении b_0 в доказательстве теоремы 3 малое приращение получит при необходимости лишь константа

Липшица N. Поэтому существование $c_0(t, b_0)$ на отрезке времени $[0, t_*]$ и $c(t, x, b_0)$ в области Q_{t_*} для $b_0 \leq \beta$ можно считать доказанным.

Абсолютную сходимость рядов докажем позже, что и послужит оправданием приводимых ниже преобразований.

Подставим формальные ряды для $c_0(t, b_0)$ и $c(t, x, b_0)$ в (58) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях b_0:

$$\dot{c}_{00}(t) = r_1(t)c_{00}(t) + g(t)D(t)\frac{\partial c_0}{\partial x}(t, 0), \tag{59}$$

$$c_{00}(0) = \bar{c},$$

$$\dot{c}_{0i}(t) = r_1(t)c_{0i}(t) + g(t)D(t)\frac{\partial c_i}{\partial x}(t, 0) + f_i(t), \tag{60}$$

$$c_{0i}(0) = 0,$$

$$f_i(t) = \sum_{k+j=i-1} (r_2(t)c_{0k}(t)c_{0j}(t) + \int_0^t R(t, \tau)c_{0k}(\tau)c_{0j}(\tau)d\tau), i \geq 1.$$

Здесь $c_0(t, x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$ — решение п. в. неоднородного уравнения (13) с симметричными краевыми условиями

$$c(0, x) = \bar{c}, \qquad c_0(t) = c_\ell(t) = c_{00}(t),$$
$$\frac{\partial c}{\partial x}(t, 0) = -\frac{\partial c}{\partial x}(t, \ell) \text{ ..,}$$

а $c_i(t, x)$ — решение п. в. задачи (57) с $c_0(t) = c_{0i}(t)$.

Если применять теорему 3 к уравнениям (60), то получим те же константы N и $B < 1$, что и для невозмущенного уравнения (59). Константа Липшица N определяется функцией $r_1(t)$, B — оценкой (56) для задачи (57). Таким образом, решения $c_{0i}(t)$, $c_i(t, x)$ определены и принадлежат $H^1(0, t_*)$, $H^{1,2}(Q_{t_*})$ соответственно.

В обозначениях (60) из оценки (54) получаем

$$\|c_{0i}\|_{H^1} \leq K_2\|c_{0i}^{(1)}\|_{H^1}.$$

Здесь $c_{0i}^{(1)}$ - первое приближение решения (60), т. е.

$$\dot{c}_{0i}^{(1)}(t) = g(t)D(t)\frac{\partial c_i^{(1)}}{\partial x}(t, 0) + f_i(t), \quad c_{0i}^{(1)}(0) = 0, \tag{61}$$

$c_i^{(1)}(t,x)$ — решение п. в. задачи (57) с $c_0(t) = c_{0i}^{(1)}(t)$. Полученное уравнение (61) имеет общий вид (42). Момент времени t_* удовлетворяет условию $t_* < (B^{-2}-1)^{1/2}$ теоремы 2. При $x_0 = 0$ возмущению $\eta(t) = 0$ в (43) соответствует решение $x(t) = 0$. Поэтому из (45) получаем оценку вида

$$\|c_{0i}\|_{H^1(0,t_*)} \le K_2 \|c_{0i}^{(1)}\|_{H^1(0,t_*)} \le K_3 \|f_i\|_{L_2(0,t_*)}, \tag{62}$$

где константа K_3 не зависит от номера i и функций $f_i(t)$.

Для номера $i = 1$ получаем $\|c_{01}\|_{H^1} \le K_4 \|c_{00}\|^2_{H^1}$. Константа K_4 определяется t_*, K_3, $\|r_2\|_C$, $\|R\|_C$. По индукции доказываются оценки

$$\|c_{0i}\|_{H^1(0,t_*)} \le K_4^i \|c_{00}\|^{i+1}_{H^1(0,t_*)}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} c_{0i}(t) z^i$ сходится равномерно по $t \in [0,t_*]$ для комплексных z в круге $|z| \le \beta$, $\beta < K_4^{-1} \|c_{00}\|^{-1}_{H^1}$. При фиксированном вещественном $z = b_0$ ряд сходится в $H^1(0,t_*)$, причем абсолютно.

Остается доказать аналогичное утверждение для ряда, формально представляющего $c(t,x,b_0)$.

В силу теоремы 1 для решения $c_i(t,x)$ задачи (57) с $c_0(t) = c_{0i}(t)$ справедлива оценка

$$\|c_i\|_{H^{1,2}(Q_{t_*})} \le K_5 \|c_{0i}\|_{H^1(0,t_*)}$$

с независящей от i, $c_{0i} \in H^1(0,t_*)$ $(c_{0i}(0) = 0)$ константой K_5. Поэтому ряд $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(t,x) b_0^i$ абсолютно сходится в $H^{1,2}(Q_{t_*})$ к некоторой функции $c(t,x,b_0)$, которая по построению $c_i(t,x)$ является в паре с $c_0(t,b_0)$ решением рассматриваемой задачи при $0 \le b_0 \le \beta$. Теорема доказана. □

В условиях теоремы имеется возможность приближенного построения $c(t,x)$ путем последовательного решения линейных задач.

Перейдем к вопросу о продолжимости решений. Известно, что уже в обыкновенных дифференциальных уравнениях с квадратичной нелинейностью возможен уход решений на бесконечность за конечное время. Реальна такая ситуация и в используемой модели при отсутствии ограничений на параметры. Поэтому обратимся к физическому смыслу слагаемых в (16). Первое интегральное слагаемое в правой части уравнения (16) в условиях вакуумирования камеры значительно меньше десорбционного потока $J(t) = b(t)q_0^2(t)$ — лишь малая часть водорода, десорбировавшегося с поверхности , вернется обратно на поверхность. При физически осмысленных наборах параметров сумма первых двух слагаемых в (16) отрицательна. Наихудший в смысле накопления водорода на поверхности вариант связан с отсутствием десорбционного оттока ($b_0 = 0$). Покажем, что в этом случае исключен уход решения на бесконечность. При $b_0 > 0$ количество водорода в мембране лишь уменьшается (рассматривается метод ТДС).

Теорема 5. *Пусть для некоторого момента времени $t_0 > 0$ в оценке (56) $B < 1$ $\forall t_* \in (0, t_0]$ независимо от непрерывно дифференцируемой реализации $T(t) \in [T^-, T^+]$. По следствию 3 из теоремы 1 при выборе B по формуле (55) это предположение выполнено при относительно малом $g^+ = g_0 \exp(-E_g/RT^+)$. Тогда для $b_0 = 0$ решение п. в. $c_0(t)$, $c(t, x)$ уравнения (58) (задачи (13)-(17)) продолжимо на $[0, +\infty)$, т. е. $c(t, x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$, $c_0(t) = c(t, 0) \in H^1(0, t_*)$ $\forall t_* < +\infty$.*

Доказательство. Выполнены все условия теоремы 3. Константа Липшица N для уравнения (58) ($b_0 = 0$) определяется по функции $r_1(t)$, и ее можно взять зависящей только от T^-, T^+ $\forall t_* \in (0, t_0]$. Выберем теперь отрезок $[0, t_*]$, определенный доказательством теоремы 3, для которого решение $c_0(t)$, $c(t, x)$ ($c_0(t) = c(t, 0)$) существует и единственно . Функция $c(t, x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$ для области Q_{t_*}, удовлетворяющей сильному условию ℓ-рога [12], равномерно непрерывна в Q_{t_*} и, следовательно, непрерывно продолжается на замыкание $\bar{Q}_{t_*}$. Более того, если фиксировать $c_0(t)$, проделать замены переменных (21), (23) и считать интегральное слагаемое в уравнении вида (24) известной функцией из $L_2(Q_{s_*})$, то вследствие теоремы 2.1[8,с.158] получаем $c(t, \cdot) \in H^1(0, \ell)$ $\forall t \in [0, t_*]$, причем $c(t, \cdot)$ непрерывно зависит от t в норме $H^1(0, \ell)$. Поскольку задача симметрична (в смысле следствия 1 из теоремы 1), то $c(t, x) = c(t, \ell - x)$, $z(t, x) = z(t, \ell - x)$ в $\bar{Q}_{t_*}$. Перенесем начало отсчета времени в $t_* - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — достаточно мало) и повторим для $\bar{c}(x) = c(t_* - \varepsilon, x)$, $\bar{z}(x) = z(t_* - \varepsilon, x)$ приведенные выше построения, которые не зависят от конкретизации симметричных начальных данных $\bar{c}(x)$, $\bar{z}(x) \in H^1(0, \ell)$ (вместо констант $\bar{c}$, $\bar{z}$). В области $(t_* - \varepsilon, t_*) \times (0, \ell)$ решения совпадут, что в силу [9,гл.3,$ 3] означает возможность продолжения решения исходной краевой задачи ($b_0 = 0$) на отрезок времени $[0, 2t_* - \varepsilon]$. Таким способом продолжаем решение на $[0, +\infty)$ ($\forall t_* < +\infty$ $c(t, x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$, $c_0(t) = c(t, 0) \in H^1(0, t_*)$), поскольку длина отрезка продолжения на каждом шаге не изменяется. Теорема доказана. □

§ 5. Метод проницаемости. Заключительные

замечания

Остановимся теперь на модификации полученных результатов применительно к методу проницаемости. В этом случае начальные данные $\bar{z}(x) = \psi(x)$, $\bar{c}(x) = \varphi(x)$ в (13), (14) (вместо констант $\bar{z}$, $\bar{c}$) определяются начальным насыщением мембраны водородом и не являются, вообще говоря, симметричными. Условие (15) отсутствует, но к интегро-дифференциальному уравнению вида (16) (следствие (5) - (7)) для входной стороны мембраны ($x = \ell$, $g(T(0))q_\ell(0) = \bar{c}(\ell)$) добавится аналогичное для $x = 0$ (см.(5)), в котором интегральное слагаемое заменено на заданную функцию времени $\mu s p_0(t)$, $g(T(0))q_0(0) = \bar{c}(0)$. Оценка (31) остается в силе, вместо двух уравнений (32) получим систему для трех переменных $c_0(t)$, $c_\ell(t)$, $w(t)$:

$$\begin{gathered}
\dot{c}_0(t) = g^{-1}(t)\dot{g}(t)c_0(t) - b(t)g^{-1}(t)c_0^2(t) + \\
+ g(t)D(t)\partial c/\partial x(t,0) + g(t)\mu s(t)p_0(t), \\
\dot{c}_\ell(t) = g^{-1}(t)\dot{g}(t)c_\ell(t) - b(t)g^{-1}(t)c_\ell^2(t) - \\
- g(t)D(t)\partial c/\partial x(t,\ell) + g(t)\mu s(t)\theta_1 \exp(-t/\theta_0)w(t), \\
\dot{w}(t) = b(t)g^{-2}(t)\exp(t/\theta_0)c_\ell^2(t), \\
c_0(0) = \bar{c}(0),\ c_\ell(0) = \bar{c}(\ell),\ w(0) = 0.
\end{gathered}$$

Вместо операторов F, G в (33) аналогичным образом определим

$$F(c_0, c_\ell)(t,x) = c(t,x), \qquad G_{0,\ell}(u)(t) = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0,\ell},$$

$$\Omega = \{\hat{c} = (c_0, c_\ell) \in H^1(0,t_*) \times H^1(0,t_*)| \ \ c_0(0) = \varphi(0), c_\ell(0) = \varphi(\ell)\},$$
$$\hat{GF} = (G_0F, G_\ell F) : \Omega \to L_2((0,t_*), R^2).$$

Тогда (см.(36), (37))

$$\|\hat{GF}(\hat{c}_1) - \hat{GF}(\hat{c}_2)\|_{L_2((0,t_*),R^2)} \le \hat{A}_3\|\hat{c}_1 - \hat{c}_2\|_{H^1((0,t_*),R^2)},$$

где константу $\hat{A}_3$ можно считать независящей от $t_* \in (0, t_0]$, $\hat{c}_i \in \Omega(t_*)$, $T(\cdot) \in C^1[0,t_*]$, $T(t) \in [T^-, T^+]$.

Решение п. в. $c(t,x) \in H^{1,2}(Q_{t_*})$ краевой задачи для метода проницаемости при малых t_* существует и единственно, поскольку теоремы 2, 3 доказаны в векторном варианте. Соответствующее условие $\hat{B} < 1$ имеет аналогичный физический смысл и, в частности, выполняется при относительно малом $g^+ = g(T^+)$.

Теоремы 4, 5 нетрудно перефразировать на случай двух уравнений вида (58) для $c_0(t)$ и $c_\ell(t)$, в одном из которых интегральное слагаемое заменено на регулируемую экспериментатором ограниченную непрерывную функцию времени $\mu s(t)p_0(t)$, $p_0(t) \in [p^-, p^+]$, $p^- \geq 0$, $p^+ < \infty$.

Таким образом, при переходе к методу проницаемости никаких дополнительных математических особенностей не появляется.

Для грубой ориентировки приведем диапазон основных параметров, который учитывался при численном моделировании метода проницаемости:

$$p_0 \sim 0.1 - 5\ , \quad D \sim 10^{-9} - 10^{-3\,2}/, \quad g \sim 10 - 10^{4\,-1},$$
$$s \sim 10^{-7} - 10^{-1}, \quad b \sim 10^{-20} - 10^{-10\,2}/, \quad a_i \sim 10^{-6} - 10^{-1\,-1},$$
$$\mu = 1.46 \cdot 10^{21}/^{2}\ .$$

При $p_0(t)$ =const кривая проницаемости (выходного десорбционного потока $J(t)$) возрастает, а затем асимптотически приближается к горизонтальной прямой. При ступенчатом $p_0 = \bar{p}_0 + (-1)^i \Delta p$ $(t \in [i\Delta t, (i+1)\Delta t])$ поток со временем входит в режим стационарных колебаний. Это согласуется с экспериментами.

Отметим следующую особенность рассматриваемой задачи с динамическими краевыми условиями. Решение для $t > 0$ однозначно определяется только начальными данными $c(0,x) = \varphi(x)$, $z(0,x) = \psi(x)$. При φ , $\psi \in H^1(0,\ell)$ и фиксированном $t > 0$ выполняются включения $c(t,\cdot)$, $z(t,\cdot) \in H^1(0,\ell)$. Поэтому целесообразно принять пространство $H^1(0,\ell) \times H^1(0,\ell)$ начальных функций φ , ψ в качестве фазового. В силу доказанной (в указанных ограничениях) единственности решения краевых задач для методов ТДС и проницаемости полугрупповое $(t \geq 0)$ свойство по времени здесь выполнено. Иными словами, получаем нелинейные полудинамические (определены только для $t \geq 0$) системы в фазовом пространстве $H^1(0,\ell) \times H^1(0,\ell)$. В случае непродолжимости на $[0,+\infty)$ — локальные, если не учитывать физически оправданные ограничения на параметры.

Таким образом, модель (1) - (8) является достаточно общей, а ее качественное исследование как нелинейной полудинамической системы в гильбертовом пространстве $H^1 \times H^1$ представляет интерес и с чисто математической точки зрения.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность И.Е. Габису за постановку задачи и содержательные обсуждения физического смысла модели.

Résumé

Mathematical justification of diffusion model with reversible trapping and dynamical boundary conditions is given. The dynamical boundary conditions are determined taking into account adsorption - desorption processes on surface.

Solvability problem of model equations is reduced to consideratoin of some class of functional-differentional equations similar to neutral type systems. The model is a significant example of semidynamical system in Hilbert spaces.

Литература

[1] *Водород в металлах*/ Под ред. Г. Алефельд, В. Фелькль. М.: Мир, 1981. Т.1, 506 с.; Т.2, 430 с.

[2] Гельд П. В., Мохрачева Л. П. *Водород и физические свойства металлов и сплавов.* М.: Наука, 1985. 231 с.

[3] *Взаимодействие водорода с металлами*/Под ред. А. П. Захаров. М.: Наука, 1987. 296 с.

[4] Габис И. Е., Компаниец Т. Н., Курдюмов А. А. *Поверхностные процессы и проникновение водорода сквозь металлы* // Взаимодействие водорода с металлами . С.177–206.

[5] Бекман И. Н., Габис И. Е., Компаниец Т. Н., Курдюмов А. А., Лясников В. Н. *Исследование водородопроницаемости в технологии производства изделий электронной техники*//Обзоры по электронной технике. Серия 7. Вып.1(1084). М., 1985. 66 с.

[6] Габис И. Е., Курдюмов А. А., Тихонов Н. А. *Установка для проведения комплексных исследований по взаимодействию газов с металлами.* //Вестник С.-Петербургского ун-та. Серия 4. Вып.2. 1993. С.77-79.

[7] Заика Ю. В., Габис И. Е. *Определение параметров водородопроницаемости металлов методом сопряженных уравнений* //Заводская лаборатория (диагностика материалов). 1996. N.1. С.18–26.

[8] Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 408 с.

[9] Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.:Наука, 1983. 424 с.

[10] Колмановский В. Б., Носов В. Р. *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.* М.:Наука, 1981. 448 с.

[11] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* М.: Мир, 1984. 421 с.

[12] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М.:Наука, 1975. 480 с.