Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 4, 1997

УДК 511

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ГЕОМЕТРИИ ЧИСЕЛ

А. В. Малышев

Этот краткий обзор[1] содержит описание важнейших понятий геометрии чисел и ее главные предложения. Сюда не включена геометрия квадратичных форм — интересный, но специальный раздел теории чисел (и геометрии), стоящий на стыке геометрии чисел и теории квадратичных форм.

Оглавление

§ 1. Введение

В широком понимании геометрия чисел — приложение геометрических методов к теоретико-числовым проблемам. Но это слишком широкое, слишком неопределенное понимание предмета геометрии чисел. Как исторически сложившаяся дисциплина геометрия чисел имеет дело, в первую очередь, с задачей об арифметическом минимуме $m(F)$ некоторой вещественной функции

$$F = F(x) = F(x_1, x_2, \dots x_n)$$

от n переменных. Под $m(F)$ понимается величина

$$m(F) = \inf |F(x)|,$$

[1] Обзор А. В. Малышева подготовлен к печати Б. М. Широковым

где точная нижняя граница берется по всем целым точкам $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющим некоторым дополнительным условиям (например, условию $x \neq 0$, однородный арифметический минимум). Знание $m(F)$ позволяет нам судить об условиях существования решений диофантова неравенства

$$|F(x)| < c,$$

а к этому вопросу сводятся многие задачи теории чисел.

Геометрия чисел — как раздел теории чисел — сформировалась с выходом (1896 г.) основополагающей монографии Минковского [38][2]. По существу, монография посвящена ныне всем известной теореме Минковского о выпуклом теле и ее многочисленным приложениям.

Основная идея геометрии чисел (принадлежащая Минковскому) заключается в следующем[3]. Для оценки однородного арифметического минимума $m(F)$ важно знать соответствующую постоянную Эрмита $\gamma(F)$ — *наибольший нормированный арифметический минимум фукции* F. Но для вычисления постоянной Эрмита или для ее оценок возможна следующая геометрическая процедура. Пусть $\mathrm{M} = \mathrm{M}(F) \subset \mathbb{R}^n$ — множество вещественных точек ξ с условием

$$|F(\xi)| < 1.$$

Рассматривая M совместно с различными точечными решетками, сопоставляем множеству M некоторую вещественную постоянную — критический определитель $\Delta(\mathrm{M})$ множества M. Если F — лучевая функция (т. е. если M_F — звездное тело), то $\gamma(F)$ выражается через $\Delta(\mathrm{M})$ (и обратно). Если же, сверх того, F — выпуклая симметрическая функция, то $\Delta(\mathrm{M})$ (а следовательно, и $\gamma(F)$) выражается через плотность $\theta(\mathrm{M})$ *плотнейшей решетчатой упаковки* множества M и задача вычисления или оценки $\gamma(F)$ и $\Delta(\mathrm{M}_F)$ сводится к задаче вычисления или оценки $\theta(\mathrm{M})$. В частности, теорема Минковского о выпуклом теле равносильна геометрически очевидному утверждению: плотность упаковки не превышает 1.

Число книг по геометрии чисел невелико. Помимо упомянутой монографии [38] Минковский опубликовал (1907 г.) книгу [40]. Все

[2]Первоначально на титульном листе этой монографии было обозначено “Выпуск первый”. Второго выпуска, к сожалению, не последовало. Второе издание (1910 г.) было дополнено еще одним параграфом. Имеются более поздние перепечатки издания 1910 г.

[3]Разъяснение понятий и утверждений этого абзаца см. ниже, параграфы 2–6.

работы Минковского по геометрии чисел (и монографии, и статьи) переведены на английский язык и собраны в книге [31]. Современной учебной монографией по геометрии чисел является книга Касселса [8][4]. В 1969 г. вышла в свет большая монография Леккеркеркера [36], претендующая[5] на полный отчет об исследованиях по геометрии чисел вплоть до 1965 года (и, в частности, на полноту библиографии). Специальным вопросам геометрии чисел (упаковкам и покрытиям) посвящены книги Роджерса [16] и Фейеша Тота [22]. См. также монографии по диофантовым приближениям Коксма [35] и Касселса [7], содержащие разделы, посвященные геометрии чисел. Некоторые проблемы геометрии чисел рассмотрены в книге [30]. Хорошим дополнением к монографиям по геометрии чисел является энциклопедическая статья Келлера [34]. Среди многочисленных журнальных обзоров по геометрии чисел выделяется блестяще написанный обзор Главки [33]. Последний обзор по геометрии чисел, содержащий отчет о сравнительно новых исследованиях, принадлежит Груберу [29]. Библиография статей по геометрии чисел содержит свыше 2000 названий, пополняясь ежегодно несколькими десятками статей.

Наш обзор можно разбить на три части:

1) § 2–4 посвящены некоторым понятиям геометрии, имеющим важные приложения в дальнейшем, но, строго говоря, не принадлежащим к собственно геометрии чисел.

2) § 5–12 относятся к *однородной задаче*, занимающей в геометрии чисел центральное место.

3) В § 13 дан краткий обзор исследований по *неоднородной задаче* геометрии чисел; в § 14 формулируется проблема Маркова—Делоне, включающая в себя как однородную, так и неоднородную задачи геометрии чисел.

§ 2. Лучевые функции. Звездные и выпуклые тела

[4]К сожалению, книга Касселса, на мой взгляд, несколько рыхла композиционно (еще больше это относится к монографии [36]). Для первого чтения можно рекомендовать обзор Главки [33] (или наш обзор) и стр. 9–27, 31–39, 87–111, 134–205, 216–283, 300–312, 369–401 книги Касселса [8].

[5]Эти претензии не вполне обоснованы (по крайней мере, в отношении библиографии, особенно статей на русском языке).

Вещественная функция $F = F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданная на $\mathbb{R}^n$, называется *лучевой*, если

1) $F(x) \geq 0$;

2) $F(x)$ непрерывна;

3) $F(x)$ однородна: для любого вещественного числа $\lambda > 0$ имеет место равенство
$$F(\lambda x) = \lambda F(x).$$

Лучевым функциям можно привести во взаимно однозначное соответствие звездные тела. Открытое множество С мы называем *звездным телом* с центром в точке $O \in \mathbb{R}^n$, если для любой точки $x \in$ С отрезок $[0, x] \subset$ С; в частности, $O \in$ С. Открытое множество К мы называем *выпуклым телом*, если для любых $x, y \in$ К отрезок $[x, y] \subset$ К. Выпуклое тело К является звездным телом, причем центром можно считать любую точку тела К.

Соответствие между лучевыми функциями и звездными телами описывается следующими простыми утверждениями:

1) Если $F(x)$ — лучевая функция, то
$$\mathrm{C} = \mathrm{C}_F = \{x \mid F(x) < 1\} \tag{1}$$
— звездное тело. Обратно, если С— звездное тело с центром в начале координат, то найдется единственная лучевая функция F, для которой неравенство (1) определяет тело $\mathrm{C} = \mathrm{C}_F$.

2) Звездное тело С ограничено тогда и только тогда, когда соответствующая лучевая функция $F(x)$ **положительна**: $\forall x \neq 0 \quad F(x) > 0$.

3) Звездное тело С выпукло тогда и только тогда, когда соответствующая лучевая функция $F(x)$ **выпукла**: для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$
$$F(x + y) \leq F(x) + F(y) \tag{2}$$

Можно доказать, что звездное тело (и в частности, выпуклое тело) измеримо по Жордану.

§ 3. Точечные решетки

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы. Множество

$$\Lambda = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \ldots + \mathbb{Z}e_n = \{a \mid a = g_1 e_1 + g_2 e_2 + \ldots + g_n e_n,\ g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{Z}\}, \qquad (3)$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_n$ независимо друг от друга пробегают все целые числа, называется *решеткой* (точнее, n-мерной решеткой) *с базисом* $e_1, e_2, \ldots, e_n$. На решетку Λ можно смотреть как на свободную абелеву группу с конечным числом образующих. Данной решетке Λ отвечает бесконечное множество базисов; их общий вид: $(e_1, e_2, \ldots, e_n)U$, где U пробегает все целые матрицы определителя ± 1. Однако величина

$$d(\Lambda) = |\det(e_1, e_2, \ldots, e_n)| > 0, \qquad (4)$$

объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса, не зависит от выбора базиса; $d(\Lambda)$ называется *определителем решетки* Λ.

n-мерную точечную решетку можно охарактеризовать как существенно n-мерное дискретное точечное множество в $\mathbb{R}^n$, являющееся группой относительно сложения точек (векторов) в $\mathbb{R}^n$.

§ 4. Расположения. Упаковки и покрытия

Пусть $\mathrm{R} \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество, Λ — решетка в $\mathbb{R}^n$. Семейство множеств

$$\{\mathrm{R}, \Lambda\} = \{\mathrm{R} + a \mid a \in \Lambda\}, \qquad (5)$$

где a пробегает все точки решетки Λ, называется *расположением* множества R по решетке Λ. Расположение $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$ называется *упаковкой* множества R по решетке Λ, если множества $\mathrm{R} + a$, входящие в семейство $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$, попарно не пересекаются:

$$(a_1, a_2 \in \Lambda,\ a_1 \neq a_2) \Rightarrow (\mathrm{R} + a_1) \cap (\mathrm{R} + a_2) = \emptyset.$$

Расположение $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$ называется *покрытием* множества R по решетке Λ, если замыкания множеств $\mathrm{R} + a$, входящих в семейство $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$, в совокупности покрывают все пространство:

$$\bigcup_{a \in \Lambda} (\overline{\mathrm{R}} + a) = \mathbb{R}^n.$$

Расположение $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$, являющееся одновременно и упаковкой, и покрытием, называется *разбиением* пространства $\mathbb{R}^n$ множествами $\mathrm{R} + a,\ a \in \Lambda$.

Пусть R— ограниченное, измеримое по Лебегу множество с мерой $V(\mathrm{R})$. Ясно, что все множества расположения $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$ измеримы и что $V(\mathrm{R} + a) = V(\mathrm{R})$. Рассмотрим шар

$$\mathrm{C}_X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < X\}$$

радиуса $X \to +\infty$ с центром в начале O. Пусть

$$\mathrm{R} + a_1, \mathrm{R} + a_2, \ldots, \mathrm{R} + a_s, \qquad s = s(X),$$

— все те множества $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$, которые лежат в C_X. Доказывается, что существует предел

$$\rho(\mathrm{R}, \Lambda) = \lim_{X \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{s(X)} V(\mathrm{R} + a_i)}{V(\mathrm{C}_X)} = \lim_{X \to +\infty} V(\mathrm{R}) \frac{s(X)}{v_n X^n},$$

где

$$v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = V(\mathrm{C}_1)$$

— объем единичного шара $|x| < 1$. Величину $\rho(\mathrm{R}, \Lambda)$ называют *плотностью* расположения $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$ множества R по решетке Λ. Грубо говоря, это — “доля” пространства (с учетом перекрытий), занимаемого множествами $\mathrm{R} + a, a \in \Lambda$. Можно доказать, что

$$\rho(\mathrm{R}, \Lambda) = \frac{V(\mathbb{R})}{d(\Lambda)}. \tag{6}$$

Ясно, что если $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$ — упаковка, то

$$\rho(\mathrm{R}, \Lambda) \le 1, \tag{7}$$

так что в силу (6)

$$V(\mathrm{R}) \le d(\Lambda). \tag{8}$$

Если $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$ — покрытие, то

$$\rho(\mathrm{R}, \Lambda) \ge 1, \quad V(\mathrm{R}) \ge d(\Lambda). \tag{9}$$

Если $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$ — разбиение, то

$$\rho(\mathrm{R}, \Lambda) = 1, \quad V(\mathrm{R}) = d(\Lambda). \tag{10}$$

Пусть R— ограниченное, измеримое по Лебегу множество. Тогда для каждой решетки имеет смысл величина $\rho(\mathrm{R}, \Lambda)$. Рассмотрим точную верхнюю границу

$$\theta(\mathrm{R}) = \sup_{\Lambda} \rho(\mathrm{R}, \Lambda) = \frac{V(\mathrm{R})}{\inf_{\Lambda} d(\Lambda)}, \tag{11}$$

причем точные границы вычисляются по всем решеткам, для которых $\{\mathrm{R}, \Lambda\}$ — упаковка. Будем называть $\theta(\mathrm{R})$ *решетчатым упаковочным коэффициентом* (*плотностью плотнейшей решетчатой упаковки*) множества R. Заметим, что точная верхняя граница (11) может не достигаться. В силу (7)

$$\theta(\mathrm{R}) \leq 1. \tag{12}$$

Точно так же точную нижнюю границу

$$\tau(\mathrm{R}) = \inf_{\Lambda} \rho(\mathrm{R}, \Lambda) = \frac{V(\mathrm{R})}{\sup_{\Lambda} d(\Lambda)} \tag{13}$$

плотностей $\rho(\mathrm{R}, \Lambda)$, взятую по всем решетчатым покрытиям, будем называть *решетчатым коэффициентом покрытия (плотностью экономичнейшего решетчатого покрытия)* множеством R, хотя точная нижняя граница (13) может и не достигаться. В силу (9)

$$\tau(\mathrm{R}) \geq 1. \tag{14}$$

Рассматриваются (и это иногда полезно для задач геометрии чисел) и общие, не обязательно решетчатые, расположения. Пусть T — множество точек пространства $\mathbb{R}^n$ (как правило, это дискретное множество, более или менее равномерно распределенное по пространству $\mathbb{R}^n$). *Расположением* $\{\mathrm{R}, T\}$ множества R по T называем семейство множеств

$$\{\mathrm{R}, T\} = \{\mathrm{R} + a \mid a \in T\}. \tag{15}$$

Если множества $\mathrm{R}+a$ семейства (15) попарно не пересекаются, то мы говорим об *упаковке* R по T. Если $\cup_{a\in T}(\overline{\mathrm{R}} + a) = \mathbb{R}^n$, то говорим о *покрытии* R по T.

Пусть R— ограниченное, измеримое по Лебегу множество с мерой $V(\mathrm{R})$. В общем случае расположения $\{\mathrm{R}, T\}$ вопрос о существовании плотности $\rho(\mathrm{R}, T)$ расположения становится нетривиальным. Определяется: *нижняя плотность*

$$\rho^-(\mathrm{R}, T) = \limsup_{X\to\infty} \frac{\sum_{(\mathrm{R}+a_i)\subset \mathrm{C}_X} V(\mathrm{R}+a_i)}{V(\mathrm{C}_X)}$$

и *верхняя плотность*

$$\rho^+(\mathrm{R}, T) = \liminf_{X\to\infty} \frac{\sum_{(\mathrm{R}+a_i)\cap \mathrm{C}_X \neq \emptyset} V(\mathrm{R}+a_i)}{V(\mathrm{C}_X)}.$$

Если $\rho^+(\mathrm{R}, T) = \rho^-(\mathrm{R}, T) = \rho(\mathrm{R}, T)$, то $\rho(\mathrm{R}, T)$ называем *плотностью* расположения $\{\mathrm{R}, T\}$.

Подобно решетчатым упаковкам и покрытиям определяем:

$$\theta^*(\mathrm{R}) = \sup_T \rho^+(\mathrm{R}, T),$$

— *упаковочный коэффициент* R, где точная верхняя граница берется по всем упаковкам $\{\mathrm{R}, T\}$;

$$\tau^*(\mathrm{R}) = \inf_T \rho^-(\mathrm{R}, T),$$

— *коэффициент покрытия* R, где точная нижняя граница берется по всем покрытиям $\{\mathrm{R}, T\}$. Ясно, что для любого ограниченного измеримого множества R

$$\theta(\mathrm{R}) \le \theta^*(\mathrm{R}) \le 1 \le \tau^*(\mathrm{R}) \le \tau(\mathrm{R}). \tag{16}$$

Вопрос о совпадении $\theta(\mathrm{R})$ и $\theta^*(\mathrm{R})$ (а также $\tau(\mathrm{R})$ и $\tau^*(\mathrm{R})$) является очень сложным, даже для простейшего частного случая n-мерного шара $\mathrm{R} = \mathrm{C}_n = \{x \mid |x| < 1\}$. Предполагается, что для некоторого $n_0 \ge 3$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathrm{C}_n) &= \mathbb{T}^*(\mathrm{C}_n), \quad \text{если } n \le n_0; \\ \mathbb{T}(\mathrm{C}_n) &< \mathbb{T}^*(\mathrm{C}_n), \quad \text{если } n > n_0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Это доказано лишь для $n = 2$. Уже случай $n = 3$ не исследован до конца (ср. Фейеш Тот [22, гл.7, § 2]).

О нерешетчатых упаковках и покрытиях см.: Роджерс [16].

§ 5. Арифметический минимум лучевой функции. Критический определитель и критические решетки множества

Рассмотрения § 2–4 являются лишь введением в геометрию чисел. Собственно геометрия чисел начинается при совместном рассмотрении точечных решеток и множеств (или лучевых функций), а также связанных с ними решетчатых упаковок и покрытий. И здесь возникают важнейшие понятия геометрии чисел [6] — понятия критического определителя и критических решеток данного множества $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$.

Говорим, что точечная решетка $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ является *допустимой* для множества $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ или M-*допустимой*, если множество M не содержит точек решетки Λ, кроме, быть может, начала координат, т. е. если

$$\mathrm{M} \cap \Lambda \subset \{0\}.$$

Множество M, имеющее хотя бы одну допустимую решетку, называется множеством *конечного типа*; в противном случае M называется множеством *бесконечного типа*. Ясно, что всякое ограниченное множество является множеством конечного типа.

Пусть M— множество конечного типа. Точная нижняя граница

$$\Delta(\mathrm{M}) = \inf_{\Lambda\,-\,\mathfrak{M}\text{-допустима}} d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех M-допустимых решеток Λ называется *критическим определителем* множества M. Если M — множество бесконечного типа, то дополнительно определяем:

$$\Delta(\mathrm{M}) = +\infty.$$

Всякая M-допустимая решетка Λ, для которой

$$d(\Lambda) = \Delta(\mathrm{M}),$$

называется *критической решеткой* множества M. Ясно, что множество бесконечного типа не имеет критических решеток. Множество M конечного типа также может не иметь критических решеток, или

[6] Точнее говоря, понятия, относящиеся к однородной задаче — основному разделу геометрии чисел; однородной задаче посвящены § 5–12 нашего обзора.

иметь их конечное число или иметь их бесконечное множество (и счетной, и континуальной мощности). Условия существования критических решеток могут быть выведены из предложений Малера о компактности решеток. В частности, для нужд геометрии чисел вполне достаточно следующего утверждения:

всякое звездное тело S конечного типа с центром в начале O имеет хотя бы одну критическую решетку.

Подробности см.: Касселс [8, гл. 5, § 3–5]; Леккеркеркер [36, § 17].

Важность понятий критического определителя и критических решеток определяется их связью с понятием однородного арифметического минимума. Пусть $F = F(x)$ — лучевая функция, заданная на $\mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — точечная решетка (например, решетка $\mathbb{Z}^n$ целых точек). Точная нижняя граница[7]

$$m(F, \Lambda) = \inf_{\substack{a \in \Lambda \\ a \neq 0}} F(a) \tag{18}$$

значений $F(a)$ функции F в точках a решетки Λ, отличных от начала O, называется *минимумом* (точнее, *однородным арифметическим минимумом*) функции F в решетке Λ. Точная нижняя граница (18) может не достигаться. Легко доказать (Касселс [8, стр. 154]), что (18) заведомо достигается для положительных лучевых функций F, т. е. для ограниченных звездных тел (1).

Для оценки $m(F, \Lambda)$ сверху важно уметь вычислять или оценивать *постоянную Эрмита*

$$\gamma(F) = \sup_{\Lambda} \frac{m(F, \Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{\frac{1}{n}}} \tag{19}$$

лучевой функции F; точная верхняя граница берется по всем n-мерным точечным решеткам Λ; $\gamma(F)$ достигается на некоторой решетке Λ_0 (где $m(F, \Lambda)$, вообще говоря, может не достигаться). Из определения $\gamma(F)$ сразу следует, что

$$m(F, \Lambda) \leq \gamma(F)\{d(\Lambda)\}^{\frac{1}{n}}, \tag{20}$$

причем по любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такую решетку $\Lambda^{(0)} = \Lambda^{(0)}_{\varepsilon}$, что

$$m(F, \Lambda^{(0)}) > \{\gamma(F) - \varepsilon\}\{d(\Lambda)\}^{\frac{1}{n}},$$

[7]Некоторые авторы (см. Касселс [8]) обозначают $m(F, \Lambda)$ через $F(\Lambda)$.

иными словами, при данной решетке Λ (скажем, решетке целых точек $\mathbb{Z}^n$) неравенство типа (20) неулучшаемо, если вместе с F рассматривать и все лучевые функции, получающиеся из F невырожденной вещественной линейной однородной подстановкой переменных.

Связь постоянной Эрмита с понятием критического определителя устанавливается следующим просто доказываемым предложением[8].

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ — лучевая функция. Тогда*

$$\gamma(F) = \{\Delta(C_F)\}^{\frac{-1}{n}}, \tag{21}$$

где C_F — звездное тело, определяемое неравенством (1).

Если звездное тело C_F имеет конечный тип, то

$$0 < \Delta(\mathrm{C}_F) < +\infty,$$

ибо в этом случае существует критическая решетка (см. выше), так что из (21) выводим:

$$0 < \gamma(F) < +\infty. \tag{22}$$

Если C_F — звездное тело бесконечного типа, $\Delta(\mathrm{C}_F) = +\infty$, то (21) означает, что $\gamma(F) = 0$ и из (20) следует, что для любой решетки Λ

$$m(F, \Lambda) = 0,$$

так что для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $a \in \Lambda,\ a \neq 0$ с условием

$$F(a) < \varepsilon. \tag{23}$$

Поэтому определение типа данного звездного тела C_F является принципиально важной (и сложной) задачей. В частности, определение типа C_F для

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_n^2}, \qquad n \geq 5,$$

где под знаком корня стоит неопределенная форма (не все знаки одинаковы), привело бы к решению известной проблемы Дэвенпорта—Хейльброна (см. Леккеркеркер [36, стр. 347]).

[8] Если не оговорено противное, доказательства приводимых предложений можно найти в книге Касселса [8].

На $\gamma(F)$ можно смотреть как на абсолютный максимум функции

$$\mu(\Lambda) = \mu(F, \Lambda) = \frac{m(F, \Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{\frac{1}{n}}}$$

на множестве Z_n всех решеток $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Но на Z_n разными (эквивалентными) путями можно определить понятие близости решеток, превратив Z_n в топологическое (и даже метрическое) пространство. Тогда, наряду с абсолютным максимумом $\gamma(F)$ функции $\mu(\Lambda) = \mu(F, \Lambda)$, естественно рассматривать и локальные максимумы $\gamma^{(i)}(F)$. Решетки, отвечающие локальным максимумам функции $\mu(\Lambda)$ на Z_n, будем называть *экстремальными* (или *предельными*). Несколько о́бще, экстремальные решетки для данного множества M можно определять как точки локального условного минимума функции $d(\Lambda)$ на Z_n, предполагая, что решетка Λ допустима для M. Критические решетки множества M находятся среди экстремальных. Помимо $\gamma(F)$ (или $\Delta(\mathrm{M})$) рассматривается набор локальных постоянных Эрмита $\{\gamma^{(i)}(F)\}$ функции F (или набор экстремальных определителей $\{\Delta^{(i)}(\mathrm{M})\}$ множества M).

§ 6. Теоремы Блихфельдта и Минковского.// Теорема Минковского о системе// линейных однородных форм. Параллелоэдры

Связь между критическим определителем и плотностью решетчатой упаковки устанавливается следующим предложением, принадлежащим, по существу, Минковскому, но называемому теоремой Блихфельдта (или теоремой Биркгофа—Блихфельдта).

Теорема 2. *Пусть R— произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, $D\,R$ — соответствующее ему разностное множество:*

$$D\,R = \{\xi - \eta \mid \xi, \eta \in R\}.$$

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — решетка. Для того, чтобы расположение $\{R, \Lambda\}$ было упаковкой, необходимо и достаточно, чтобы решетка Λ была $D\,R$-допустимой.

Используя (11), отсюда сразу получаем:

Следствие. *Пусть R — ограниченное, измеримое по Лебегу множество. Тогда*

$$\theta(R) = \frac{V(R)}{\Delta(D\,R)}. \tag{24}$$

Если для заданного множества M можно найти *первообразное* ограниченное множество R с условием

$$\mathrm{M} = D\,\mathrm{R}, \tag{25}$$

то (24) можно переписать так:

$$\Delta(\mathrm{M}) = \frac{V(\mathrm{R})}{\theta(\mathrm{R})}. \tag{26}$$

К сожалению, представление (25) имеется далеко не всегда (в частности, потому, что разностное множество симметрично относительно начала). Если его нет, то ищут ограниченное измеримое множество R с условием

$$D\,\mathrm{R} \subset \mathrm{M}. \tag{27}$$

Тогда $\Delta(D\,\mathrm{R}) \leq \Delta(\mathrm{M})$, а из (24) выводим:

$$\Delta(\mathrm{M}) \geq \frac{V(\mathrm{R})}{\theta(\mathrm{R})}. \tag{28}$$

Так как имеет место тривиальное неравенство (12), то отсюда вытекает следующее предложение, позволяющее оценивать снизу критический определитель заданного множества.

Следствие. *Пусть M — произвольное заданное множество, R — измеримое по Лебегу (не обязательно ограниченное) множество меры $V(R)$ с условием* (27). *Тогда*

$$\Delta(M) \geq V(R). \tag{29}$$

Есть важный класс множеств, когда проблема отыскания оптимального R легко и исчерпывающе решается. Это симметрическое относительно O выпуклое тело K. Для него

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2}\mathrm{K}, \quad V(\mathrm{R}) = \frac{1}{2^n}V(\mathrm{K}), \quad D\,\mathrm{R} = \mathrm{K}, \quad \theta(\mathrm{R}) = \theta(\mathrm{K}),$$

нет множества R, удовлетворяющего (27) и имеющего объем, больший, чем множество $\frac{1}{2}\,\mathrm{K}$. Для $\mathrm{M} = \mathrm{K}$, $\mathrm{R} = \frac{1}{2}\,\mathrm{K}$ формула (26) превращается в следующее важнейшее предложение.

Теорема 3. *Пусть K — выпуклое, симметричное относительно начала O тело объемом $V(K)$. Тогда*

$$\Delta(K) = \frac{V(K)}{2^n\,\theta(K)}. \tag{30}$$

В частности,

$$\Delta(K) \geq 2^{-n} V(K). \tag{31}$$

Неравенство (31), являющееся одной из формулировок теоремы Минковского о выпуклом теле, есть прямое следствие формулы (30) и неравенства (12). На неравенство (31) можно смотреть так же, как на частный случай неравенства (29) при $\mathrm{M} = \mathrm{K}$, $\mathrm{R} = \frac{1}{2}\,\mathrm{K}$.

Неравенство Минковского (31) дает оценку снизу критического определителя $\Delta(\mathrm{K})$ выпуклого, симметричного относительно O тела K. Эта оценка, вообще говоря, неулучшаема. Например, для параллелепипеда

$$\mathrm{Q} = \{\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n \mid |\xi_1| < 1, |\xi_2| < 1, \ldots, |\xi_n| < 1\},$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис решетки Λ, неравенство (31) превращается в равенство, ибо Λ — решетка, допустимая для Q,

$$\Delta(\mathrm{Q}) = d(\Lambda), \quad V(\mathrm{Q}) = 2^n |\det(e_1, e_2, \ldots, e_n)| = 2^n d(\Lambda).$$

В силу (30) для того, чтобы неравенство (31) превратилось в равенство, необходимо и достаточно, чтобы $\theta(\mathrm{K}) = 1$. Выпуклое тело R с условием

$$\theta(R) = 1 \tag{32}$$

называется *параллелоэдром.* Для того, чтобы выпуклое тело R было параллелоэдром, необходимо и достаточно (см. § 4), чтобы нашлась такая решетка Λ, что расположение $\{R, \Lambda\}$ являлось бы разбиением пространства R^n. Параллелоэдры играют важную роль в геометрии чисел и в математической кристаллографии. Их исследование далеко не завершено. Доказано, что R — симметричный многогранник с числом граней не больше $2(2^n - 1)$. Типы параллелоэдров описаны лишь для $n \le 4$ (для $n = 2$ — два типа, для $n = 3$ — пять типов (Е. С. Федоров), для $n = 4$ — 51 тип (В. Н. Делоне)). Важнейший частный случай параллелоэдров — области Дирихле—Вороного. Пусть Λ — решетка, множество

$$\mathrm{D}_\Lambda = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \le |\xi - a| \quad \forall a \in \Lambda\} \tag{33}$$

называется *областью Дирихле—Вороного*[9] решетки Λ. Г. Ф. Вороной построил алгоритм отыскания типов областей D_Λ для каждого данного n. Другие варианты такого алгоритма принадлежат Е. П. Барановскому и С. С. Рышкову [17]. Эти авторы нашли все *общие* типы для $n = 5$ (их оказалось 221). Для завершения, в известном смысле, теории параллелоэдров было бы желательно доказать труднейшую гипотезу Вороного:

Всякий параллелоэдр есть аффинный образ некоторой области Дирихле — Вороного.

Эта гипотеза доказана Г. Ф. Вороным для так называемых *примитивных* параллелоэдров R, таких, что в разбиении $\{R, \Lambda\}$ в каждой вершине сходится ровно $n+1$ ребро (параллелоэдры *общего положения*). Некоторое обобщение этого результата принадлежит Щ. Л. Житомирскому. Подробности теории параллелоэдров, в частности, теории областей Дирихле—Вороного см.: В. Н. Делоне [4,5], С. С. Рышков, Е. П. Барановский [17] и цитированную там литературу.

В силу (21) неравенство (31) дает оценку сверху постоянной Эрмита $\gamma(F)$ выпуклой симметричной лучевой функции $F(x)$, а с ней и оценку сверху арифметического минимума $m(F, \Lambda)$. На этом основаны все приложения теоремы Минковского о выпуклом теле. Например, применяя (20), (21) и (31) к решетке $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ целых точек и лучевой функции

$$F(x) = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{1}{\beta_i} \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right| \right\},$$

приходим к следующей важной теореме Минковского о системе линейных однородных форм.

[9]Под областью Дирихле — Вороного иногда понимают открытое множество — внутренность множества (33). Область D_Λ можно сопоставлять не решетке, а положительно определенной форме f (отвечающей Λ): $\mathrm{D}_f = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f(\xi) \le f(\xi - a), \quad \forall a \in \mathbb{Z}^n\}$.

Теорема 4. *Пусть* $\beta_i > 0$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $|\det(\alpha_{ij})| = \Delta > 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. *Пусть*

$$\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n > \Delta. \tag{34}$$

Тогда найдутся такие целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *не равные одновременно нулю, что*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j\right| < \beta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{35}$$

Формулы (21) и (30) показывают, что для выпуклой симметричной функции $F(x)$ следующие три проблемы эквивалентны[10]:

1) проблема арифметических минимумов, точнее, задача отыскания $\gamma(F)$;

2) проблема нахождения критического определителя $\Delta(\mathrm{K}_F)$ тела K_F, определенного неравенством (1);

3) проблема плотнейших решетчатых упаковок тела K, точнее, задача отыскания $\theta(\mathrm{K}_F)$; при этом

$$\gamma(F) = \{\Delta(\mathrm{K}_F)\}^{\frac{-1}{n}} = 2\left\{\frac{\theta(\mathrm{K}_F)}{V(\mathrm{K}_F)}\right\}^{\frac{1}{n}}. \tag{36}$$

Частично (см. выше, (21) и (26)) такое сведение проблемы арифметических минимумов возможно и для общих лучевых функций.

В заключение заметим, что теоремы Минковского и Блихфельдта имеют многочисленные переформулировки, обобщения и уточнения (см. Касселс [8], Леккеркеркер [36]).

§ 7. О методе Блихфельдта

[10]Эта эквивалентность окажется еще более глубокой, если мы будем рассматривать локальные экстремумы $\gamma^{(i)}(F), \Delta^{(i)}(\mathrm{K}_F), \theta^{(i)}(\mathrm{K}_F)$ и отвечающие им экстремальные решетки $\Lambda^{(\gamma_i)}, \Lambda^{(\Delta_i)}, \Lambda^{(\theta_i)}$. Между этими решетками имеется полное соответствие (с точностью до гомотетии). Для соответствующих величин $\gamma^{(i)}(F), \Delta^{(i)}(\mathrm{K}_F), \theta^{(i)}(\mathrm{K}_F)$ имеет место формула типа (36).

Для оценки критического определителя $\Delta(\mathrm{M})$ данного множества M можно воспользоваться неравенством Минковского (31). Для этого надо вписать в M выпуклое, симметричное относительно O тело K возможно большего объема $V(\mathrm{K})$. Тогда из $\mathrm{K} \subset \mathrm{M}$ и из (31) выводим:

$$\Delta(\mathrm{M}) \geq \Delta(\mathrm{K}) \geq 2^{-n} V(\mathrm{K}). \tag{37}$$

Однако этот метод оценки не всегда эффективен, особенно для множеств M, не являющихся выпуклыми.

Имеется ряд методов для оценки или вычисления $\Delta(\mathrm{M})$ (см. Леккеркеркер [36, гл. 5]). Наиболее известным из них, общим и перспективным является метод Блихфельдта.

Метод Блихфельдта является сочетанием двух идей. Во-первых, для невыпуклых множеств M при оптимальном выборе множества R (оно должно удовлетворять условию (27) и иметь возможно большую меру $V(\mathrm{R})$) неравенство (29) дает, как правило, более сильную оценку, чем (37). Проблема отыскания по заданному M такого множества R непроста. Она до сих пор дискутируется в литературе. Последняя по времени публикация принадлежит Спону [47]. В ней рассматривается вопрос оптимального выбора R при данном M. Мы отсылаем читателя к этой статье и цитированной там литературе.

Во-первых, как для выпуклых, так и для невыпуклых множеств весьма плодотворной оказалась следующая идея. Вместо упаковок или покрытий (последние — для неоднородной задачи, см. § 13; решетчатых или нерешетчатых) множества M рассматриваем расположения гомотетически расширенных множеств $t\,\mathrm{M}$, приписывая им переменную плотность. Иначе говоря, рассматриваются не множества (или их характеристические функции), а финитные распределения $\varphi(x)$, связанные с этими множествами. При этом используется не сама теорема Блихфельдта, а ее обобщение на распределения $\varphi(x)$ (см.: Касселс [8, стр. 99, теорема 4]). Подробности о методе Блихфельдта (и литературу) см.: Леккеркеркер [36, § 33]).

Одним из вариантов реализации метода Блихфельдта является следующее предложение (Леккеркеркер [36, стр. 263, теорема 3]).

Пусть S и T — звездные тела с лучевыми функциями f и g соответственно:

$$S = \{x \mid f(x) < 1\}, \qquad T = \{x \mid g(x) < 1\},$$

причем T *ограничено (т. е.* g *— положительная лучевая функция). Рассмотрим финитную неотрицательную функцию* $\delta(\rho)$*:*

$$\delta(\rho) \geq 0, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \rho \geq 0, \quad \delta(\rho) = 0 \quad \text{при} \quad \rho > \rho_0.$$

Пусть для некоторых вещественных параметров $\alpha, \ \beta, \ \gamma > 0$ *при любом конечном наборе точек* $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ *из*

$$f(x_k - x_l) \geq \beta \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m, \ k \neq l) \tag{38}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ *следует*

$$\sum_{k=1}^{m} \delta\left([g(x - x_k)]^{\alpha}\right) \leq \gamma. \tag{39}$$

Тогда

$$\Delta(S) \geq \beta^{-n}(\gamma^{-1} I) V(T), \tag{40}$$

где

$$I = \int\limits_0^{\infty} \delta(\rho)\, d(\rho^{\frac{n}{\alpha}}) = \frac{n}{\alpha} \int\limits_0^{\rho_0} \rho^{\frac{n}{\alpha}-1} \delta(\rho)\, d\rho.$$

Возникает вопрос об *оптимизации* метода Блихфельдта, в частности, о выборе по S звездного тела T, функции $\delta(\rho)$ и параметров $\alpha, \ \beta, \ \gamma$ с условиями (39) с тем, чтобы оценка (40) была наилучшей.

§ 8. Классические задачи геометрии чисел

Описанные ниже диофантовы проблемы занимают центральное место в геометрии чисел (по крайней мере, в части однородных проблем). Они являются пробным камнем для сравнения возможностей и силы различных методов геометрии чисел.

К этим проблемам применима (и применялась — см. Минковский [38]) теорема Минковского о выпуклом теле — неравенства (31), (37) с учетом равенства (21). Получающиеся при этом оценки (см. ниже) в дальнейшем были заметно усилены с помощью других методов, в первую очередь, метода Блихфельдта. Бегло опишем результаты, полученные к настоящему времени, отсылая за подробностями и доказательствами к гл. 6 монографии Леккеркеркера [36] (см. также: Роджерс [16], Касселс [8]).

1^0. **Проблема одновременных диофантовых приближений.**

Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — вещественные числа. Ищем возможно близкие к ним рациональные числа $\dfrac{p_h}{q}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, $q > 0$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$. Теорема 4 Минковского о системе линейных однородных форм сразу же приводит к следующему утверждению:

Для любых вещественных чисел $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ *найдутся такие целые числа* $q \geq Q$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *,где* Q *сколь угодно велико, что*

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{41}$$

Уже Минковский [38], применяя вместо теоремы 4 неравенство (37) с подходяще подобранным выпуклым телом K, смог в (41) заменить 1 в числителе справа на $n/(n+1)$. Проблему одновременных диофантовых приближений можно сформулировать следующим образом:

Для данного n *найти* $c_n = \inf c$, *где точная нижняя граница берется по всем вещественным числам* c, *для которых система неравенств*

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| \leq \frac{c}{q^{1+\frac{1}{n}}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{42}$$

разрешима в целых числах $q \geq Q$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *при любых* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ *и* Q *(и затем выяснить, будет ли (42) разрешимо при* $c = c_n$*).*

Эта проблема решена лишь при $n = 1$. Тогда $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$; описаны θ_1, для которых (42) превращается в равенство при $n = 1$; установлено явление изоляции (ср. ниже, § 12); исследован спектр $\{c\}$. См. обзор А. В. Малышева [10]. При $n \geq 2$ для c_n известны только оценки. Лучшие результаты для произвольных n получены Споном [47]. См. также: Леккеркеркер [36, § 45].

2^0. **Проблема однородного арифметического минимума** $m(\Phi^{(p)}_{r,s})$ **формы** $\Phi^{(p)}_{r,s} = |L_1|^p + |L_2|^p + \cdots + |L_n|^p$.

Здесь $p > 0$ — вещественный параметр; $L_k = L_k(x) = L_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, r$, — вещественные линейные формы, $L_{r+l+s}(x) = \overline{L}_{r+l}(x)$

— комплексно сопряженные линейные формы, $l = 1, 2, \ldots, s$, $r + 2s = n$, $\det(L_1, L_2, \ldots, L_n) = \Delta \neq 0$;

$$\begin{aligned} \Phi_{r,s}^{(p)} &= \Phi_{r,s}^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^{n} |L_i(x)|^p, \\ m(\Phi_{r,s}^{(p)}) &= \inf_{\substack{x \in \mathbb{Z}^n \\ x \neq 0}} \Phi_{r,s}^{(p)}(x) = \min_{\substack{x \in \mathbb{Z}^n \\ x \neq 0}} \Phi_{r,s}^{(p)}(x). \end{aligned} \tag{43}$$

Пусть $p \geq 1$. Тогда

$$\mathrm{S}_{r,s}^{(p)} = \{x \mid \Phi_{r,s}^{(p)}(x) < 1\}$$

— симметричное выпуклое тело. Применение к нему теоремы 3 Минковского позволяет утверждать, что найдется такой целый вектор $x \neq 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n} |L_i(x)|^p \leq (c_{r,s}^{(p)} |\Delta|)^{\frac{p}{n}}, \tag{44}$$

где

$$c_{r,s}^{(p)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \frac{2^{2s/p}\Gamma(1 + \frac{n}{p})}{\{\Gamma(1 + \frac{1}{p})\}^r \{\Gamma(1 + \frac{2}{p})\}^s}. \tag{45}$$

С помощью теоремы 3 можно оценить $m(\Phi_{r,s}^{(p)})$ и при $0 < p < 1$.

Эти оценки (при разных $p > 0$) уточнялись различными авторами, использовавшими варианты метода Блихфельдта. Последние и самые сильные результаты: Главка [32], Ранкин [42]. См. также: Леккеркеркер [36, § 40] и цитированную там литературу.

В частном случае $n = r = 2$ мы имеем дело с *гипотезой Минковского* о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$, $p > 1$ (см.: А. В. Малышев [11] и цитированную там литературу) и ее обобщениями на $0 < p < 1$ (см.: Леккеркеркер [36, § 40, п. 4]).

2а. **Проблема Эрмита арифметических минимумов положительных квадратичных форм** (проблема плотнейших решетчатых упаковок единичных шаров).

Это частный случай проблемы 2^0 при $p = 2$, $n = r$, $s = 0$. Речь идет об оценках $m(f) = m(\Phi_{n,0}^{(2)})$ однородного арифметического минимума положительной квадратичной формы $f = f(x)$ определителя $d(f) \neq 0$ и постоянной Эрмита

$$\gamma_n = \sup_{f \in R} \frac{m(f)}{\sqrt[n]{d(f)}} = \{\gamma(F_n)\}^2, \tag{46}$$

где точная верхняя граница берется по множеству R всех положительно определенных квадратичных форм f.

Точные значения γ_n (и соответствующие им "оптимальные" или "критические" формы) известны лишь для $n \le 8$ (см.: Блихфельдт [26], Н. М. Ветчинкин [3]). Прямое приложение неравенства Минковского (31) (частный случай оценки (44)) приводит к оценке

$$\gamma_n \le \frac{4}{\pi}\left\{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\right\}^{\frac{2}{n}}. \tag{47}$$

Блихфельдт (1914 г.) усилил эту оценку до

$$\gamma_n \le \frac{2}{\pi}\left\{\Gamma\left(2+\frac{n}{2}\right)\right\}^{\frac{2}{n}}. \tag{48}$$

Оценка (48) также улучшалась (использовался метод Блихфельдта). См.: Роджерс [16] и цитированную там литературу. Асимптотически (при $n \to \infty$) результаты такие же, что и (48), а (47) асимптотически вдвое больше:

$$\frac{2}{\pi}\left\{\Gamma(2+\frac{n}{2})\right\}^{\frac{2}{n}} \sim \frac{1}{\pi e^n}. \tag{48a}$$

Лучшая оценка сейчас принадлежит В. И. Левенштейну [9][11]. Предполагается, что при $n \to \infty$

$$\gamma_n \sim \frac{1}{2\pi e^n}. \tag{49}$$

Оценка снизу для γ_n (см. § 10, теорема Главки) отвечает этой асимптотике. Дело за оценкой сверху, принципиально лучшей, чем (48) (и лучшей, чем оценка Кобатянского и В. И. Левенштейна).

Проблема Эрмита теперь трактуется существенно шире. Наряду с абсолютным экстремумом γ_n и соответствующими ему оптимальными формами, рассматриваются локальные экстремумы функции $\mu(f) = m(f)(d(f))^{-1/n}$ на множестве R положительных квадратичных форм и соответствующие им *экстремальные* (или *предельные*) формы, а также их обобщение — *совершенные* формы. Имеются в виду исследования А. Н. Коркина—Е. И. Золотарева, Г. Ф. Вороного и других авторов (см.: В. Н. Делоне [5], Е. П. Барановский [18]

[11] Еще более сильная содержится в работе Кобатянского и Левенштейна. Эта оценка асимптотически лучше (48a), но хуже (49).

и цитированную там обширную литературу, в значительной степени относящуюся к геометрии квадратичных форм).

3^0. **Проблема однородного арифметического минимума** $m(\Pi_{r,s})$ **произведения** $\Pi_{r,s} = \prod_{i=1}^n |L_i|$ **линейных однородных форм.**

Обозначения см. в п. 2^0. Имеется в виду

$$m(\Pi_{r,s}) = \inf_{\substack{x\in\mathbb{Z}^n \\ x\neq 0}} \Pi_{r,s}(x) = \inf_{\substack{x\in\mathbb{Z}^n \\ x\neq 0}} \prod_{i=1}^n |L_i(x)|.$$

По неравенству между средними арифметическим и геометрическим для любого $p > 0$

$$\prod_{i=1}^n |L_i| = \left\{ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |L_i|^p} \right\}^{n/p} \leq \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |L_i|^p \right\}^{n/p},$$

и проблема 3^0 сводится к проблеме 2^0. Применяя оценку (44) при $p = 1$, получаем, что в обозначениях п. 2^0 *найдутся такие целые числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *что*

$$\prod_{i=1}^n |L_i| = \prod_{i=1}^n |L_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \frac{n!}{n^n} |\Delta|. \tag{50}$$

Эта оценка улучшалась разными авторами, использовавшими метод Блихфельдта. Лучший результат (при $n = r$) принадлежит Роджерсу [43]. Для $n = 2$ и $n = 3$ известны неулучшаемые результаты; установлено явление изоляции (см. ниже, § 12, Суинертон-Дайер [48], Леккеркеркер [36, § 41]). Для $n = r = 4$ оценка, лучшая общей оценки [43], получена Норцием [41], а для $n = r = 5$ — Годуином [28].

Проблема 3^0 перспективна для дальнейших исследований. В частности, можно поставить задачу перенесения оценок (41), (42) и (48) на случай существования комплексно сопряженных полей ($s > 0, n = r + 2s$).

Минковский [38] вывел из (50) следующую оценку для дискриминанта $D = D(K)$ алгебраического числового поля $K = K/\mathbb{Q}, [K : \mathbb{Q}] = n,\ r + 2s = n$; $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(r)}$ — вещественные поля, $K^{(r+s+j)} = \overline{K^{(r+j)}}$, $j = 1, 2, \ldots, s$, — комплексно сопряженные поля:

$$|D| \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2s} \frac{n^{2n}}{(n!)^2}. \tag{51}$$

Эта оценка показывает, что $|D| > 1$ при $n > 1$, так что всегда (кроме $K = \mathbb{Q}$) существуют критические простые числа поля. Такое простое решение знаменитой проблемы сразу же утвердило геометрию чисел в гражданских правах как полноценный раздел теории чисел.

§ 9. Последовательные минимумы лучевой функции в решетке. Неравенство Роджерса—Шаботи. Проблема аномалии.// Вторая теорема Минковского о выпуклом теле

Пусть $F = F(x)$ — лучевая функция, определяющая в R^n неравенством (1) звездное тело C_F. Пусть Λ — решетка в R^n. Фиксируем индекс $k,\ 1 \le k \le n$.

Назовем *k-м последовательным минимумом* $m_k = m_k(F,\Lambda)$ функции F в решетке Λ точную нижнюю границу чисел $t \in \mathbb{R}$, для которых множество

$$t\mathrm{C}_F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) < t\}$$

содержит не менее k линейно независимых точек решетки Λ.

Ясно, что

$$m_1(F,\Lambda) = m(F,\Lambda) = \inf_{\substack{a\in\Lambda\\ a\neq 0}} F(a) \tag{52}$$

и что

$$0 \le m_1(F,\Lambda) \le m_2(F,\Lambda) \le \ldots \le m_n(F,\Lambda) < +\infty. \tag{53}$$

Из определения $m(F,\Lambda) = m_1(F,\Lambda)$ легко выводится неравенство

$$\{m(F,\Lambda)\}^n \Delta(\mathrm{C}_F) \le d(\Lambda),$$

т. е.

$$\frac{\{m_1(F,\Lambda)\}^n \Delta(\mathrm{C}_F)}{d(\Lambda)} \le 1. \tag{54}$$

Гораздо труднее оценить величину

$$\delta(F,\Lambda) = \frac{\Delta(\mathrm{C}_F)\prod_{i=1}^{n} m_i(F,\Lambda)}{d(\Lambda)}. \tag{55}$$

Для этого надо уметь вычислять или оценивать сверху *аномалию*

$$\alpha(F) = \sup_{\Lambda} \delta(F,\Lambda) \tag{56}$$

лучевой функции F (или звездного тела C_F). Здесь точная верхняя граница берется по всем n-мерным точечным решеткам. В силу (53) и теоремы 1

$$\alpha(F) \geq 1. \tag{57}$$

Глубокая оценка $\alpha(F)$ сверху принадлежит Роджерсу и Шаботи (доказательство см. Касселс [8, стр. 256]):

Теорема 5. *Пусть $F = F(x)$ — лучевая функция в R^n, $\alpha(F)$ — ее аномалия. Тогда*

$$\alpha(F) \leq 2^{(n-1)/2}. \tag{58}$$

Иначе говоря, для любой решетки имеет место неравенство

$$\Delta(C_F) \prod_{i=1}^{n} m_i(F, \Lambda) \leq 2^{(n-1)/2} d(\Lambda), \tag{59}$$

здесь C_F — звездное тело (1).

Этот результат не может быть улучшен в том смысле, что для любого n можно построить пример лучевой функции F, аномалия которой сколь угодно близка к $2^{(n-1)/2}$. Конструкция примера весьма не проста (см.: Касселс [8, стр. 257–261] и цитированную там литературу).

Очень важным для общей геометрии чисел представляется доказательство (или опровержение) следующего предположения.

Гипотеза об аномалии выпуклого тела. *Пусть F — симметричная выпуклая лучевая функция. Тогда*

$$\alpha(F) = 1. \tag{60}$$

Гипотеза (60) доказана для $n = 2$ (Шаботи) и $n = 3$ (Вудс), а также для частных случаев функции F (тела C_F): шара C_F, $F(x) = |x|$ (Минковский) и параллелоэдра C_F. См.: Вудс [49] и цитированную там литературу, Леккеркеркер [36, § 18].

Гипотетическое неравенство (60) (с определением (56),(55)) и *первая* теорема Минковского — неравенство (31) — сразу же влекут за собой следующую *вторую* теорему Минковского о выпуклом теле.

Теорема 6. *Пусть F — симметричная выпуклая лучевая функция в R^n, K_F — выпуклое тело, определенное неравенством (1), $V(K_F) <$*

$+\infty$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — *точечная решетка. Тогда*

$$V(K_F)\prod_{i=1}^{n} m_i(F,\Lambda) \le 2^n d(\Lambda). \tag{61}$$

Поскольку гипотеза (60) не доказана, неравенство (61) приходится доказывать другим, гораздо более сложным и менее прозрачным путем. Известно уже несколько доказательств (Минковский, Дэвенпорт и другие авторы). Одно из доказательств см.: Касселс [8, стр. 261–268]. (См.: также Даничич [27] и цитированную там литературу). Неравенство (61) уточняет неравенство (31), ибо (31) равносильно неравенству

$$V(\mathrm{K}_F)\{m_1(F,\Lambda)\}^n \le 2^n d(\Lambda).$$

Неравенство (61) имеет важные приложения к теории неоднородных минимумов, в частности, к ґтеоремам переносаЄ (см. ниже, § 13).

Понятие последовательных минимумов и основные результаты этого параграфа обобщаются со звездных тел на произвольные множества (см.: Главка [33]).

§ 10. Теоремы о среднем в пространстве решеток. Теорема Главки и ее уточнения. Проблема Рейнхальдта

Следующее предложение, принадлежащее Главке, позволяет оценить критический определитель сверху.

Теорема 7. *Для любого измеримого по Лебегу множества M меры $V(M)$*

$$\Delta(M) \le V(M). \tag{62}$$

При этом, если M — симметричное относительно O звездное тело, то

$$\Delta(M) \le \{2\zeta(n)\}^{-1} V(M). \tag{63}$$

Все доказательства теоремы Главки (и ее уточнения) включают в себя то или иное усреднение некоторой функции, заданной на пространстве решеток. Наиболее естественным представляется вывод (62) из следующей (интересной самой по себе) теоремы Зигеля.

Теорема 8. *Пусть $f(x)$ — интегрируемая по Лебегу функция, заданная на R^n, μ — инвариантная мера на пространстве решеток F данного определителя $d(\Lambda) = d,\ d > 0$. Тогда*

$$\frac{1}{\mu(F)} \int\limits_{\mathfrak{F}} \sum_{\substack{a \in \Lambda \\ a \neq 0}} f(a)\, d\mu(\Lambda) = \frac{1}{d} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx. \tag{64}$$

Доказательство теоремы 8 можно найти в статье Макбета и Роджерса [37]. Оценка (62) прямо следует из формулы (64), если в качестве $f(x)$ взять характеристическую функцию множества M. Тогда формула (64) превращается в формулу

$$\frac{1}{\mu(\mathrm{F})} \int\limits_{\mathfrak{F}} r(\mathrm{M}, \Lambda)\, d\mu(\Lambda) = \frac{V(\mathrm{M})}{d}, \quad r(\mathrm{M}, \Lambda) = \sum_{\substack{a \in \Lambda \cap \mathfrak{M} \\ a \neq 0}} 1,$$

и найдется решетка $\widetilde{\Lambda},\ d(\widetilde{\Lambda}) = d,$ для которой

$$r(\mathrm{M}, \widetilde{\Lambda}) \leq \frac{1}{d} V(\mathrm{M}).$$

В частности, если $d > V(\mathrm{M})$, то $r(\mathrm{M}, \widetilde{\Lambda}) = 0$ и решетка $\widetilde{\Lambda}$ определителя d является M-допустимой. Отсюда — неравенство (62).

В противоположность оценке снизу Минковского (31) оценка Главки (62) может быть улучшена. То же касается оценки (63). Лучшие в настоящее время (но далеко не окончательные) оценки сверху критического определителя $\Delta(\mathrm{M})$ измеримого множества $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ меры $V(\mathrm{M})$ принадлежат Роджерсу [44] и Шмидту [45,46]:

$$\Delta(\mathrm{M}) \leq \frac{15}{16} V(\mathrm{M}), \quad \text{если } n = 2, \tag{65}$$

$$\Delta(\mathrm{M}) \leq \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\Big)\Big(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\Big) V(\mathrm{M}), \quad \text{если } n > 2, \tag{66}$$

$$\Delta(\mathrm{M}) \leq \frac{V(\mathrm{M})}{n \log \sqrt{2} - c_1}, \quad \text{если } n > c_2, \tag{67}$$

здесь c_1 и c_2 — некоторые вычислимые постоянные. Для получения такого рода оценок, в основном, варьируются две идеи: 1) специальный выбор (Шмидт) функции $f(x)$; 2) рассмотрение моментов (Роджерс) функции $f(x)$:

$$\sum_{\substack{a \in \Lambda \\ a \neq 0}} f(a)$$

и получение для них формул типа (64).

Отыскание неулучшаемых оценок типа (62)–(63) является важной и очень сложной задачей геометрии чисел. Точнее, ее можно сформулировать следующим образом. Пусть $\mathrm{T} = \{\mathrm{T}\}$ — некоторый класс измеримых множеств T эвклидова пространства R^n (например, класс всех измеримых множеств; класс всех звездных множеств; класс $\mathrm{K}_n^{(s)}$ всех симметричных относительно O выпуклых множеств данного числа измерений n и т. д.) Пусть

$$q(\mathrm{T}) = \inf_{\mathfrak{T} \in \mathbb{T}} Q(\mathrm{T}), \qquad Q(\mathrm{T}) = \frac{V(\mathrm{T})}{\Delta(\mathrm{T})}.$$

Найти $q(\mathrm{T})$ для данного класса T — значит найти оценку

$$\Delta(\mathrm{T}) \leq \frac{1}{q(\mathrm{T})} V(\mathrm{T}), \tag{68}$$

неулучшаемую в классе T множества T.

Однако точное значение $q(\mathrm{T})$ неизвестно даже для простейших классов множеств. Например, оно неизвестно даже для класса $\mathrm{K}_2^{(s)}$ двумерных выпуклых симметричных относительно O областей. В этом случае известна *гипотеза Рейнхардта*:

$$q(\mathrm{K}_2^{(s)}) = Q(\mathrm{W}) = 3,6096,$$

где W — некоторая специальная область, “сглаженный восьмиугольник”. Эта гипотеза пока не доказана. Лучший результат (П. П. Таммела [21]; там же — литература по проблеме):

$$q(\mathrm{K}_2^{(s)}) \geq 3,570624.$$

См.: Касселс [8, гл. 6]; Роджерс [16]; Леккеркеркер [36, § 19, § 22, п. 2.]

§ 11. Об отыскании критических (и экстремальных) решеток ограниченного звездного тела

Итак, мы умеем оценивать критический определитель $\Delta(\mathrm{M})$ снизу (§ 6–7) и сверху (§ 10). Например, если $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^n$ — симметричное относительно O выпуклое тело, то

$$2^{-n} V(\mathrm{K}) \leq \Delta(\mathrm{K}) \leq \{2\zeta(n)\}^{-1} V(\mathrm{K}).$$

Подобные (но более сложные) оценки известны и для более общих тел М. Однако подчас бывает важно знать и точное значение Δ(М) для заданного множества М (скажем, для нормального тела данного алгебраического числового поля).

Если С — заданное ограниченное звездное тело, то, в принципе, существует алгоритм, позволяющий свести задачу отыскания всех критических (и даже всех экстремальных) решеток тела С к конечному числу задач на экстремум некоторой функции нескольких переменных при некоторых ограничениях. Действительно, по положительной лучевой функции $F(x)$ можно указать (см.: Касселс [8, стр. 185–186]) такую постоянную G, что

$$\Delta = \inf |\det(b_1, b_2, \ldots, b_n)|, \tag{69}$$

где точная нижняя граница берется по всем линейно независимым векторам $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ с дополнительными условиями

$$F(g_1b_1 + g_2b_2 + \ldots + g_nb_n) \geq 1, \quad |g_i| \leq G, \quad (g_1, g_2, \ldots, g_n) \neq 0; \tag{70}$$

здесь $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ пробегает все целые векторы с указанными условиями. Решетки $\Lambda = \Lambda[b_1, b_2, \ldots, b_n]$, на которых эта точная нижняя граница достигается, будут критическими (и эта процедура даст нам все критические решетки). Зная какую-либо критическую решетку Λ тела С, мы тотчас найдем Δ(С).

Заметим, что для геометрии чисел важны реально осуществимые алгоритмы (возможно, при использовании электронных вычислительных машин). Обычно же набор условий (70) слишком велик, чтобы экстремальная задача (69) была разрешима. Условия (70) могут быть существенно упрощены для выпуклых лучевых функций $F(x)$. Здесь возникают понятия пустого октаэдра (обобщенного октаэдра) решетки и заградительного ряда решетки (см.: Минковский [39]). В случае $n \leq 4$ (и даже $n = 5$) дальнейшая разработка приводит к уже реально осуществимым алгоритмам. См.: Касселс [8, стр. 199–202]; Леккеркеркер [36, § 31–32]. См. также: [24,25].

§ 12. Явления изоляции арифметических минимумов. Спектры минимумов

Было бы очень интересно выделить те классы неограниченных звездных тел С (или хотя бы некоторые из них), для которых возможно сведение задачи об отыскании Δ(С) к задаче (69)–(70). То, что это не всегда возможно, показывает *явление изоляции* арифметических минимумов (или, что то же, явление изоляции допустимых решеток), крайне интересное само по себе.

Пусть F — фиксированная лучевая функция. Рассмотрим величину

$$\mu(\Lambda) = \mu(F, \Lambda) = \frac{m(F, \Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}},$$

заданную на множестве (пространстве) $\mathcal{L}$ всех решеток Λ. Множество возможных значений $\mu(F)$,

$$\mathcal{M}(F) = \{\mu(F, \Lambda) | \Lambda \in \mathcal{L}\},$$

назовем *спектром Маркова* лучевой функции F. Ясно, что

$$\mathcal{M}(F) \subset [0, \gamma(F)]. \tag{71}$$

Говорим, что для лучевой функции F имеет место *явление изоляции*, если множество $\mathcal{M}(F)$ имеет хотя бы одну изолированную точку[12].

Легко доказывается, что если F — положительная лучевая функция (иначе говоря, если C_F — ограниченное звездное тело), то $\mu(F, \Lambda)$ — непрерывная функция Λ и

$$\mathcal{M}(F) = (0, \gamma(F)]. \tag{72}$$

Поэтому явление изоляции возможно лишь в случае неограниченных звездных тел C_F. Было бы крайне интересно найти условия, налагаемые на F, при которых оно возникает (или его заведомо нет). Это, по-видимому, очень трудная задача. Конечно, еще сложнее проблема точного и полного описания $\mathcal{M}(F)$ для данного F.

Наконец, важно уметь описывать для данного $\mu \in \mathcal{M}(F)$ все решетки Λ с условием

$$\mu(F, \Lambda) = \mu.$$

Явлению изоляции (и сходному явлению изоляции неоднородных минимумов — см. § 13) посвящено большое число работ. Все они носят

[12] Точнее, 1) для F имеет место явление изоляции, если $\gamma(F)$ — изолированная точка. Общее: 2) для F имеет место явление изоляции, если $\overline{\mathcal{M}(F)} \neq [0, \gamma(F)]$. Можно говорить и о локальной изоляции $\mu(F, \Lambda)$ в точке Λ, с точностью до линейных изоморфизмов F.

частный характер (см., например, гл. X монографии Касселса [8]; см. также: Леккеркеркер [36, § 43]). Наиболее исследованным (и то далеко не до конца) является простейший случай нетривиального характера

$$n = 2; \quad F_0(x) = |x_1 x_2|^{\frac{1}{2}}.$$

То, что здесь происходит явление изоляции, впервые заметили Коркин и Золотарев (и это был вообще первый пример изоляции минимумов). А. А. Марков доказал, что часть спектра $\mathcal{M}(F_0)$, лежащая правее $\sqrt[4]{\frac{4}{9}}$, дискретна

$$\mathcal{M}(F_0) \bigcap \left\{ \mu(F_0, \Lambda) > \sqrt[4]{\frac{4}{9}} \right\} = \left\{ \sqrt[4]{\frac{4}{9}}, \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \sqrt[4]{\frac{100}{221}}, \dots \right\} =$$

$$= \left\{ m_k = \sqrt[4]{\frac{1}{\frac{4}{9} - \frac{1}{Q_k^2}}} \;\middle|\; k = 1, 2, \dots \right\}, \tag{73}$$

где Q_k — возрастающая последовательность целых положительных чисел, обладающая тем свойством, что найдутся целые числа R_k и S_k с условием

$$Q_k^2 + R_k^2 + S_k^2 = 3 Q_k R_k S_k.$$

За каждой точкой m_k спектра (73) стоит единственная (с точностью до гиперболических поворотов — автоморфизмов F_0) решетка Λ_k, $d(\Lambda_k) = 1$, с условием $m(F_0, \Lambda_k) = m_k$. Известно также (Холл), что левее некоторого числа $\mu_0 = \mu_0(F_0)$ спектр $\mathcal{M}(F_0)$ сплошной:

$$\mathcal{M}(F_0) \bigcap \{ \mu(F_0, \Lambda) \le \mu_0 \} = [0, \mu_0]. \tag{74}$$

Найдено (Г. А. Фрейман) наибольшее значение μ_0 с условием (74) — *начало луча Холла.* Исследовалось и множество

$$\mathcal{M}(F_0) \bigcap \left[\mu_0, \sqrt[4]{\frac{4}{9}} \right].$$

См. обзор литературы А. В. Малышева [10].

Явление изоляции изучалось и для других F, в частности, для $\sqrt{|f(x,y,z)|}$, где f — вещественная неопределенная тернарная квадратичная форма (см.: Б. А. Венков [2]). См. также: Леккеркеркер [36, § 43].

Можно описать явление изоляции в терминах допустимых решеток данного множества (см. [33, стр. 50]). Это приводит к обобщению — со звездных тел на произвольные множества.

§ 13. О неоднородных задачах геометрии чисел

В § 5–12 мы описали классическую часть геометрии чисел, посвященную исследованию однородных минимумов. Большую роль в теории чисел играют и неоднородные диофантовы задачи. Однако геометрия неоднородных диофантовых задач не столь разработана. Возможно даже, что здесь нет полной аналогии с однородной задачей и что методы геометрии чисел здесь хотя и безусловно приложимы, не столь плодотворны и не столь адекватны, как в случае задачи об однородном минимуме. Дадим беглый обзор этого раздела геометрии чисел.

Пусть $F = F(x)$ — лучевая функция на R^n (можно рассматривать и более общие функции F); $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — решетка определителя $d(\Lambda)$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$; говорим, что $x \equiv x_0 \pmod{\Lambda}$, если $x - x_0 \in \Lambda$. Рассмотрим величины

$$l(x_0) = l(x_0; F, \Lambda) = \inf_{x \equiv x_0 \pmod{\Lambda}} F(x),$$

$$l = l(F, \Lambda) = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} l(x_0; F, \Lambda).$$

Точная верхняя граница берется по всем вещественным точкам (или по всем точкам фундаментального параллелепипеда решетки Λ). Величина $l(F, \Lambda)$ называется *неоднородным минимумом* функции F в решетке Λ. Этот “минимум” может и не достигаться.

Пусть C_F — звездное тело, определенное неравенством (1). Тогда $l(F, \Lambda)$ есть точная нижняя граница вещественных чисел $c > 0$, для которых расположение $\{c\mathrm{C}_F, \Lambda\}$ является покрытием:

$$\bigcup_{a \in \Lambda} (c\mathrm{C}_F + a) = \mathrm{R}^n.$$

Пусть $F = F(x)$ — заданная лучевая функция. Рассмотрим величины (аналоги постоянной Эрмита):

$$\sigma(F) = \inf_{\Lambda} \frac{l(F,\Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}}, \quad \Sigma(F) = \sup_{\Lambda} \frac{l(F,\Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}}.$$

Точная нижняя и верхняя границы берутся по всем решеткам $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Конечно, прямым аналогом $\gamma(F)$ является именно $\Sigma(F)$. Однако величина $\Sigma(F)$ обычно тривиальна в силу легко доказываемой теоремы Макбета (см.: Касселс [8, стр. 369–370]).

Теорема 9. *Пусть $F = F(x)$ — лучевая функция. Если множество C_F, определяемое (1), имеет конечный объем, то*

$$\Sigma(F) = +\infty. \tag{75}$$

С величиной $\Sigma(F)$ в одном частном случае F связана знаменитая

Неоднородная гипотеза Минковского. *Пусть*

$$F_n(x) = |x_1 x_2 \cdots x_n|^{1/n}.$$

Тогда

$$\Sigma(F_n) = \frac{1}{2}. \tag{76}$$

Этой гипотезе и ее аналогам посвящена добрая половина работ по неоднородной задаче геометрии чисел (см.: Касселс [8, стр. 390–401]; Леккеркеркер [36, гл. 7]). Неравенство

$$\Sigma(F_n) \geq \frac{1}{2} \tag{77}$$

тривиально. Доказано (Н. Г. Чеботарев), что

$$\Sigma(F_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{78}$$

Неравенство (78) уточнялось Морделлом, Девенпортом, Б. Ф. Скубенко и другими авторами. Историю вопроса, библиографию и самые сильные в настоящее время оценки $\Sigma(F_n)$ сверху см.: Х. Х. Мухсинов [13,14].

Для $n \leq 5$ неоднородная гипотеза Минковского доказана полностью (см.: Б. Ф. Скубенко [19], Бамба и Вудс [23]).

Возможен и другой подход к этой гипотезе. Говорим, что невырожденная вещественная квадратная матрица A есть $DOTU$-*матрица*, если найдутся такие вещественные диагональная D, ортогональная O, треугольная T матрицы и целая унимодулярная матрица U, что

$$A = DOTU. \tag{79}$$

Если верно (79), то для такой матрицы $A = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$ неоднородная гипотеза Минковского почти тривиальна: для любых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ найдется $x \in \mathbb{Z}^n$ с условием

$$\prod_{i=1}^{n} |L_i(x) + \beta_i| \leq \frac{|\Delta|}{2^n}, \qquad \Delta = \det A. \tag{80}$$

Доказано (Б. Ф. Скубенко [20]), что для каждого $n \geq 2880$ найдутся невырожденные вещественные матрицы, не являющиеся $DOTU$-матрицами. С другой стороны (Х. Н. Нарзулаев [15]) доказано, что для $n \leq 3$ всякая невырожденная квадратная вещественная матрица порядка n есть $DOTU$-матрица (это дает новое доказательство неоднородной гипотезы Минковского для $n = 2$ и $n = 3$).

Итак, на этом пути, как показывает цитированный результат Б. Ф. Скубенко, полного доказательства неоднородной гипотезы Минковского получить нельзя (хотя ее и можно доказать таким образом для каких-то малых n). Здесь возникает интересная сама по себе $DOTU$-проблема.

Найти такое целое число n_0, что [13]

а) если $n < n_0$, то всякая вещественная невырожденная матрица порядка n есть $DOTU$-матрица;

б) если $n \geq n_0$, то найдутся вещественные невырожденные матрицы порядка n, не являющиеся $DOTU$-матрицами.

Доказано (см. выше), что

$$3 < n_0 \leq 2880. \tag{81}$$

[13] Можно доказать, что если при n_0 есть не $DOTU$-матрицы, то то же верно и для $n_0 + 1$.

Первый шаг в исследованиях по этой проблеме — изучение случая $n = 4$ (здесь, по-видимому, все матрицы являются *DOTU*-матрицами). Важно также уменьшить верхнюю границу (81).

В общем случае величина $\sigma(F)$ представляется более содержательной, чем $\Sigma(F)$. Она тесно связана со значением плотности $\tau(\mathrm{C}_F)$ экономнейшего решетчатого покрытия телом C_F, $\mathrm{C}_F = \{x|F(x) < 1\}$ (см. § 4). Здесь приходится предполагать, что C_F ограничено; от этого, по-видимому, можно избавиться, соответствующим образом обобщая определение $\rho(\mathrm{C}_F, \Lambda)$. Из определений $\sigma(F)$ и $\Sigma(F)$ довольно прямо выводится следующая

Теорема 10. *Пусть F — положительная* [14] *лучевая функция. Тогда*

$$\sigma(F) = \left\{\frac{\tau(C_F)}{V(C_F)}\right\}^{1/n}. \tag{82}$$

Из (82) и (14) выводим:

$$\sigma(F) \geq \{V(\mathrm{C}_F)\}^{1/n}. \tag{83}$$

Неравенство (83) справедливо и без предположения ограниченности C_F.

Итак, задача о $\sigma(F)$ равносильна задаче о плотности $\tau(\mathrm{C}_F)$ экономнейшего решетчатого покрытия телом C_F. Наибольшее число работ здесь посвящено случаю, когда C_F — шар. См.: Роджерс [16], Е. П. Барановский [1], С. С. Рышков, Е. П. Барановский [17].

Важный раздел неоднородной проблематики геометрии чисел составляют так называемые *теоремы переноса.* Под теоремами переноса для данной лучевой функции F мы понимаем неравенства, связывающие неоднородный минимум $l(F, \Lambda)$ с последовательными однородными минимумами $m_i(F, \Lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (или с минимумами взаимной функции F^* относительно взаимной решетки Λ^* и т. д.). Простейшим примером теоремы переноса является следующее предложение:

Пусть F — симметричная выпуклая положительная лучевая функция; тогда для любой решетки Λ

$$\frac{1}{2} m_k(F, \Lambda) \leq l(F, \Lambda) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k(F, \Lambda). \tag{84}$$

[14] От предположения положительности F (т. е. ограниченности C_F), по-видимому, можно избавиться.

Некоторые подробности (в том числе доказательство (84)) см. в книге Касселса [8, стр. 380–390]. См. также: Леккеркеркер [36, § 13].

§ 14. Об общей задаче геометрии чисел

В заключение сформулируем общую задачу геометрии чисел (см. Б. Н. Делоне [6]), включающую в себя "однородную" и "неоднородную" задачи как частные случаи. Пусть $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^n$ — множество, а $\Lambda + x_0 \subset \mathbb{R}^n$ — сдвинутая решетка определителя $d(\Lambda + x_0) = d(\Lambda)$. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathrm{M}, \Lambda + x_0)$ — некоторое условие (предикат), которому удовлетворяет или не удовлетворяет пара $(\mathrm{M}, \Lambda + x_0)$ (например,

1) $\mathcal{P}$ есть свойство: $x_0 = 0,\ \mathrm{M} \cap (\Lambda + x_0) \subset 0$;

2) $\mathcal{P}$ есть свойство: $\mathrm{M} \cap (\Lambda + x_0) = \emptyset$

и т. д.). Говорим, что решетка $\Lambda + x_0$ является *$\mathcal{P}$-допустимой* для множества M(или $[\mathcal{P}, \mathrm{M}]$-допустимой), если верно $\mathcal{P}(\mathrm{M}, \Lambda + x_0)$. $[\mathcal{P}, \mathrm{M}]$-допустимая решетка $\widetilde{\Lambda} + \widetilde{x}_0$ определителя $d(\widetilde{\Lambda})$ называется *$\mathcal{P}$-экстремальной* для множества M (или $[\mathcal{P}, \mathrm{M}]$-экстремальной), если существует такая окрестность решетки $\widetilde{\Lambda} + \widetilde{x}_0$ в пространстве $\{\Lambda + x_0\}$ неоднородных решеток, что если $\Lambda + x_0$ принадлежит этой окрестности и является $[\mathcal{P}, \mathrm{M}]$-допустимой, то

$$d(\Lambda + x_0) \geq d(\widetilde{\Lambda} + \widetilde{x}_0).$$

Задача Маркова—Делоне ($\mathcal{P}$-задача геометрии чисел). *Найти все $\mathcal{P}$-экстремальные решетки данного множества M.*

Эта задача, включающая в себя все рассматривавшиеся в литературе задачи геометрии чисел, в общем виде не исследовалась. Пока не ясно, насколько плодотворным может быть такое общее исследование.

Résumé

This brief review conteins the discribtion of most important concept of geometry or numbers and its main application. It is not included the geometry of quadratic forms — interesting but the special part of a number theory (and a geometry of numbers) standing on joining point of the geomtry of numbers and the quadratic forms theory.

Литература

[1] Барановский Е. П. *Упаковки, покрытия, разбиения и некоторые другие расположения в пространствах постоянной кривизны*// ИН. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. М., 1969. С. 189–225.

[2] Венков Б. А. *Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных форм*// Изв. АН СССР. Серия матем. 1945. Т. 9. Ѓ 6. С. 429–494. То же// Избр. труды. Л. 1981. С. 201–263.

[3] Ветчинкин Н. М. *Единственность классов положительных квадратичных форм, на которых достигаются значения постоянных Эрмита при* $6 \leq n \leq 8$// Труды МИАН. 1980. Т. 152. С. 34–86.

[4] Делоне Б. Н. *Геометрия положительных квадратичных форм.1–2*// УМН. 1937. Вып. 3. С. 16–62; 1938. Вып. 4. С. 102–164.

[5] Делоне Б. Н. *Петербургская школа теории чисел.* М.;Л., 1947. 422 с.

[6] Делоне Б. Н. *О работе А. А. Маркова "О бинарных квадратичных формах положительного определителя"*// УМН. 1948. Т. 3. Вып. 5(27). С. 3–5.

[7] Касселс Дж. В. С. *Введение в теорию диофантовых приближений.* М., 1961. 213 с.

[8] Касселс Дж. В. С. *Введение в геометрию чисел.* М., 1965. 421 с.

[9] Левенштейн В. И. *О максимальной плотности заполнения n-мерного евклидова пространства равными шарами*// Матем. заметки. 1975. Т. 18. Ѓ 2. С. 301–311.

[10] Малышев А. В. *Спектры Маркова и Лагранжа (обзор литературы)*// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 67. С. 5–38.

[11] Малышев А. В. *О применении ЭВМ к доказательству одной гипотезы Минковского из геометрии чисел*// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 71. С. 163–180; 1979. Т. 82. С. 29–32.

[12] Марков А. А. *О бинарных квадратичных формах положительного определителя*// СПб, 1880; УМН. 1943. Т. 3. Вып. 5 (27). С. 7–51.

[13] Мухсинов Х. Х. *Уточнение оценок арифметического минимума произведения неоднородных линейных форм для больших размерностей*// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 106. С. 82–103.

[14] Мухсинов Х. Х. *К неоднородной гипотезе Минковского (письмо в редакцию)*// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1983. Т. 121. С. 195–196.

[15] Нарзулаев Х. Н. *О представлении унимодулярной матрицы в виде DOTU для* $n = 3$// Матем. заметки. 1975. Т. 18. Ґ 2. С. 213–221.

[16] Роджерс К. *Укладки и покрытия*. М., 1968. 134 с.

[17] Рышков С. С., Барановский Е. П. *C-типы n-мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий)*// Труды МИАН. Т. 137. М., 1976. 131 с.

[18] Рышков С. С., Барановский Е. П. *Классические методы теории решетчатых упаковок*// УМН. 1979. Т. 34. Вып. 4(208). С. 3–63.

[19] Скубенко Б. Ф. *Доказательство гипотезы Минковского о произведении n линейных однородных форм от n переменных для* $n \leq 5$// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 106. С. 134–136.

[20] Скубенко Б. Ф. *Существуют квадратные вещественные матрицы любого порядка* $n \geq 2880$*, не являющиеся DOTU-матрицами*// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 106. С. 134–136.

[21] Таммела П. *Оценка критического определителя двумерной выпуклой симметричной области*// Изв. вузов. Математика. 1970. Ґ 12(103). С. 103–107.

[22] Фейеш Тот Л. *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве*. М., 1958. 363 с.

[23] Bambah R. P., Woods A. C. *Minkowski's conjecture for* $n = 5$*; a theorem of Skubenko*// J. Number Theory. 1980. V. 12. P. 27–48.

[24] Bantegnie R. *Sur l'indice de certains reseaux de* $\mathbb{R}^4$ *permis pour octaédre*// Canad. J. Math. 1965. V. 17. P. 725–730.

[25] Bantegnie R. *"Problème des Oktaédres" en dimension 5*// Acta Arithm. 1968. V. 14. No 2. P. 185–202.

[26] Blichfeldt N. F. *The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables*// Math. Z. 1934–35. V. 39. No 1. P. 1–15.

[27] Danicic I. *An elementary proof of Minkowski's second inequality*// J. Austral. Math. Soc. 1969. V. 10. No 1–2. P. 177-181.

[28] Godwin N. J. *On the product of five homogeneous linear forms*// J. London Math. Soc. 1950. V. 25. No 4(100). P. 331–339.

[29] Gruber P. M. *Geometry of Numbers*// Contributions to geometry (proc. Geom. Symp. Siegen. 1978). Basel. 1979. P. 186–225.

[30] Hammer J. *Unsolved problems concerning lattice points*. London a. o. 1977. VI. 101 p.

[31] Hancock H. *Development of the Minkowski geometry of numbers*. New York, 1939. XXI. 839 p.

[32] Hlawka E. *Über Potenzsummen von Linearformen.I–II*// Sitzungsber. Acad. Wiss. Wien. math.nat. Kl. 11a. 1945. Bd. 154. No 1. S. 50–58; 1947. Bd. 156. No 5–6. S. 247–254.

[33] Hlawka E. *Grundbegriffe der Geometrie der Zahlen*// Jber. Deutsc. Math.-Verein. 1954. Bd. 57. S. 37–55.

[34] Keller O. H. *Geometrie der Zahlen (Ensycl. math.Wiss. Bd.1,2. No 27).* Leipzig, 1954. 84 s.

[35] Koksma J. F. *Diofantische Approximationen*. Berlin. 1936. VIII. 157 s.

[36] Lekkerkerker C. G. *Geometry of numbers*. Groningen; Amsterdam. 1969. VIII. 510 p.

[37] Macbeath A. M., Rogers C. A. *Siegel's mean value Theorem in the geometry of numbers*// Proc. Cambridge Philos. Soc. 1958. V. 54. P. 139–151.

[38] Minkowski H. *Geometry der Zahlen*. Leipzig; Berlin. 1910. VIII. 256 p.

[39] Minkowski H. *Dichteste gitterformicge Lagerung kongruenter Korper*// Nach. Koning. Ges. Wiss. Göttingen. 1904. S. 311–355; Ges. Abh. Bd. 2. Leipzig; Berlin. 1911. S. 3–42.

[40] Minkowski H. *Diophantsche Approximationen*. Leipzig; Berlin. 1907. VIII. 235 s.

[41] Nordzij P. *Über das Product von vier reellen, homogenen, linearen Formen*// Monatsh. Math. 1967. Bd. 71. No 5. S. 436–445.

[42] Rankin R. A. *On sums of powers of linear forms.I–II–III*// Ann. of Math.(2). 1949. V. 50. No 3. P. 691–704; Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 1948. V. 51. P. 846–853; Indag. math. 1948. V. 10. P. 274–281.

[43] Rodgers C. A. *The product of* n *real homogeneous linear forms*// Acta Mathem. 1950. V. 82. No 1–2. P. 185–208.

[44] Rodgers C. A. *Lattice coverings of space: the Minkowski - Hlawka theorem*// Proc. London math. soc. (3). 1958. V. 8. P. 447–465.

[45] Schmidt W. M. *Eine Verscharfung des Satzes von Minkowski - Hlawka*// Monatsh. Math. Bd. 60. S. 110–113.

[46] Schmidt W. M. *On the Minkowski - Hlawka Theorem*// Illinois J. Math. 1963. V. 7. P. 18–23; corr.: P. 714.

[47] Spohn W. G. *Blichfeld's theorem and simultaneous doiphantine approximations*// Amer. J. Math. 1968. V. 90. P. 885–894.

[48] Swinnerton-Dayer H. P. F. *Applications of computers to the geometry of numbers*// Comput. Algebra and Number Theory 3 (SIAM - AMS Proc. V. 4). Providence (R. I.). 1971. P. 55–62.

[49] Woods A. C. *The anomaly of convex bodies*// Proc. Cambridge Philos. Soc. 1956. V. 52. P. 406–423.