Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 4, 1997

УДК 517

К ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ В БОРНОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С КОНУСОМ

А. Т. Вересова, В. В. Мосягин

В статье рассматриваются некоторые классы операторов, действующих в борнологических векторных пространствах с конусом. Доказаны теоремы существования неподвижных точек у монотонных операторов, действующих в этих пространствах. Для доказательства теорем используются специфика конуса и дополнительные ограничения на монотонные операторы.

1. Пусть E — векторное пространство над полем скаляров Φ ($\Phi = \mathcal{C}$ или $\mathcal{R}$), β — векторная борнология на E. Векторное пространство E, наделенное векторной борнологией β, называется борнологическим векторным пространством (БВП) [1, 3].

В каждом борнологическом векторном пространстве E вводится понятие сходимости, которое зависит только от борнологии β этого пространства [1, 3].

Определение 1.1. *Пусть E — БВП. Последовательность $\{x_n\} \subset E$ называется борнологически сходящейся к нулю θ пространства E (или сходящейся к нулю θ в смысле Макки), если в E существует уравновешенное ограниченное множество B и нуль-последовательность скаляров $\{\lambda_n\}$ такие, что $x_n \in \lambda_n B$, $n = 1, 2, \ldots$.*

В этом случае будем писать

$$x_n \xrightarrow{M} \theta \qquad (M - \lim_{n\to\infty} x_n = \theta). \tag{1.1}$$

Последовательность $\{x_n\} \subset E$ назовем борнологически сходящейся к элементу $x \in E$, если $(x_n - x) \overset{M}{\to} \theta$; в этом случае пишем

$$x_n \overset{M}{\to} x \qquad (M - \lim_{n\to\infty} x_n = x). \tag{1.2}$$

Определение 1.2. *Пусть E_1, E_2 — два отделимых борнологических векторных пространства. Оператор F из E_1 в E_2 называется непрерывным в точке $x_0 \in E_1$, если какова бы ни была последовательность $x_n \in E_1$, $n = 1, 2, \ldots$, борнологически сходящаяся в пространстве E_1 к точке x_0, последовательность $F(x_n) \in E_2$, $n = 1, 2, \ldots$, борнологически сходится в E_2 к элементу $F(x_0)$.*

Иначе говоря, оператор F является непрерывным в точке x_0, если из $M - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ следует $M - \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$.

Определение 1.3. *Оператор F из E_1 в E_2 называется непрерывным на E_1, если он непрерывен в каждой точке пространства E_1.*

Каждая борнологически сходящаяся последовательность ограничена; кроме того, $Ax_n \overset{M}{\to} Ax$, если $x_n \overset{M}{\to} x$ и A — линейный ограниченный оператор из E_1 в E_2.

Определение 1.4. *Множество $V \subset E$ называется замкнутым в смысле Макки (M-замкнутым), если оно содержит пределы всех сходящихся в смысле Макки последовательностей из V.*

Определение 1.5. *БВП E называется полуполным, если оно отделимо и каждая последовательность Коши—Макки обладает пределом (необходимо единственным).*

2. Пусть E — вещественное отделимое полуполное БВП, θ — нуль пространства.

Определение 2.1. *M-замкнутое выпуклое множество $K \subset E$ называется конусом, если $x \in K$, $x \neq \theta$ влечет за собой $\alpha x \in K$ при $\alpha \geq 0$ и $(-x) \overline{\in} K$.*

Любой конус $K \subset E$ позволяет ввести в E полуупорядоченность: $x \geq y$, если $x - y \in K$. Элементы $x \geq \theta$ (то есть $x \in K$) называются положительными.

Использование полуупорядоченности при изучении операторов, действующих в E, опирается на знание свойств отношения $\geq$.

Предложение 2.1. *Пусть $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ — две борнологически сходящиеся (соответственно к точкам x', x'') последовательности в пространстве E, полуупорядоченном при помощи конуса K,*

$$x'_n \xrightarrow{M} x', \qquad x''_n \xrightarrow{M} x'',$$

причем

$$x'_n \le x''_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.1}$$

Тогда $x' \le x''$

Доказательство. Соотношение (2.1) означает, что $x''_n - x'_n \in K$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В силу M-замкнутости K предел $x'' - x'$ последовательности $x''_n - x'_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ также принадлежит K. Утверждение доказано. □

Наличие полуупорядочения в X позволяет ввести понятие мажоранты, миноранты, супремума и инфимума.

В каждом конкретном случае специфика конуса, при помощи которого вводится полуупорядочение в БВП E, может обеспечить наличие дополнительных свойств отношения $\ge$. Это обстоятельство стимулирует изучение различных классов конусов в E.

Ниже всюду через E будем обозначать вещественное отделимое полуполное БВП, полуупорядоченное при помощи конуса K.

Определение 2.2. *Конус K в E называется миниэдральным, если каждое конечное число элементов $z_1, z_2, \ldots, z_n \in E$ имеет точную верхнюю границу $z = sup\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, и сильно миниэдральным, если точная верхняя граница есть у любого ограниченного сверху множества.*

Определение 2.3. *Конус K в E называется правильным, если каждая неубывающая последовательность*

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots, \tag{2.2}$$

ограниченная сверху некоторым элементом

$$x_n \le y \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.3}$$

сходится в E в смысле Макки.

Предложение 2.2. *Если конус $K \subset E$ правильный, то каждая последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая соотношению*

$$x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge \ldots \ge u$$

при некотором $u \in E$, сходится в E в смысле Макки.

Доказательство очевидно.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.14 работы [2].

Теорема 1. *Пусть в пространстве E конус K правилен и миниэдрален. Тогда каждая ограниченная сверху последовательность $\{x_n\} \subset E$ имеет точную верхнюю грань.*

Метод доказательства теоремы 2.1 тот же, что и в [2].

Определение 2.4. *Конус $K \subset E$ называется вполне правильным, если каждая неубывающая последовательность $\{x_n\} \subset E$, такая, что $\{x_n\} \in \beta$, сходится в E в смысле Макки.*

Определение 2.5. *Конус $K \subset E$ называется нормальным, если из $x_n \leq y_n \leq z_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ и $x_n \overset{M}{\to} u, z_n \overset{M}{\to} u$ следует $y_n \overset{M}{\to} u$.*

3. Тот факт, что вещественное полуполное отделимое БВП E полуупорядочено при помощи некоторого конуса K, может использоваться при изучении операторов, действующих в E, лишь в том случае, когда эти операторы обладают свойствами, связанными с полуупорядоченностью.

Определение 3.1. *Оператор A, действующий в пространстве E, называется :*

положительным,если $A(K) \subset K$;

монотонным на множестве $D \subset E$, если из $x, y \in D, \quad x \geq y$ следует $A(x) \geq A(y)$.

Для нелинейных операторов указанные свойства независимы. Для линейного оператора из свойства положительности следует монотонность.

Множество элементов $x \in E$, удовлетворяющих неравенствам

$$v_0 \leq x \leq w_0,$$

называется конусным отрезком и обозначается через $\langle v_0, w_0 \rangle$.

Пусть для монотонного оператора A, действующего в E, могут быть указаны такие элементы v_0, w_0, что $v_0 \leq w_0$ и

$$A(v_0) \geq v_0, \qquad A(w_0) \leq w_0. \tag{3.1}$$

Тогда оператор A оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle v_0, w_0\rangle$. Действительно, неравенства $v_0 \le x \le w_0$ влекут за собой неравенства

$$v_0 \le A(v_0) \le A(x) \le A(w_0) \le w_0. \tag{3.2}$$

Построим последовательности

$$v_n = A(v_n - 1), \quad w_n = A(w_n - 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.3}$$

Первая из них в силу (3.1) монотонно возрастает и ограничена сверху, а вторая монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому указанные последовательности сходятся, если конус K правильный. Если оператор A непрерывен, то в равенствах (3.3) можно перейти к пределу. Значит,

$$v^* = A(v^*), \quad w^* = A(w^*), \tag{3.4}$$

где v^* — предел последовательности $\{v_n\}$, а w^* — предел последовательности $\{w_n\}$. При этом элементы v^*, w^* могут быть различными.

Приведенные рассуждения показывают, что для доказательства существования решений уравнения

$$x = A(x) \tag{3.5}$$

в пространстве E с непрерывным и монотонным оператором A и для построения сходящихся последовательных приближений достаточно установить существование элементов v_0, w_0, удовлетворяющих соотношениям (3.1). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть K — правильный конус в вещественном полуполном БВП E. Пусть непрерывный и монотонный на конусном отрезке $\langle v_0, w_0\rangle$ оператор A преобразует этот отрезок в себя.*

Тогда оператор A имеет на $\langle v_0, w_0\rangle$, по крайней мере, одну неподвижную точку. При этом последовательности (3.3) сходятся к неподвижным точкам оператора A.

Следующая теорема гарантирует существование неподвижной точки у разрывного оператора A, действующего в пространстве E.

Теорема 3 (принцип Биркгофа — Тарского). *Пусть конус K в пространстве E сильно миниэдрален.*

Тогда любой монотонный оператор A, оставляющий инвариантным конусный отрезок $\langle v_0, w_0\rangle$, имеет на $\langle v_0, w_0\rangle$, по крайней мере, одну неподвижную точку.

4. В этом пункте рассмотрим некоторые неравенства в борнологических векторных пространствах с конусом.

Теорема 4. *Пусть E — полуполное борнологическое векторное пространство, полуупорядоченное при помощи конуса K. Пусть действующие в E операторы A, B удовлетворяют условиям: H_1) если $x, y \in E$, то из $x \leq y$ следует $A(x) \leq B(y)$; H_2) уравнения $\varphi = g + A(\varphi), \psi = h + B(\psi)$ имеют единственные решения φ, ψ при произвольных $g, h \in E$, и эти решения могут быть получены как пределы (в смысле Макки) последовательностей соответствующих последовательных приближений.*

Тогда из неравенства

$$u - A(u) \leq v - B(v), \quad u, v \in E, \tag{4.1}$$

следует оценка

$$u \leq v. \tag{4.2}$$

Если в неравенстве (4.1) знак $\leq$ заменить противоположным, то неравенство (4.2) будет справедливо с противоположным знаком.

Доказательство. Обозначим через g и h элементы $u - A(u)$ и $v - B(v)$ соответственно, тогда

$$g \leq h \tag{4.3}$$

и по условию H_2

$$u = \lim_{n\to\infty} \varphi_n, \quad v = \lim_{n\to\infty} \psi_n, \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = g, \quad \varphi_n = 1 = g = A(\varphi_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots); \\ &\psi_0 = h, \quad \psi_n + 1 = h + B(\psi_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

По индукции докажем, что

$$\varphi_n \leq \psi_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.5}$$

Для $n = 0$ это справедливо по (4.3). Допустим, что (4.5) справедливо для $n = k$; тогда по условию H_1 и по соотношению (4.3)

$$\varphi_{k+1} = g + A(\varphi_k) \leq h + B(\psi_k) = \psi_{k+1}.$$

Пусть $n \to \infty$ в (4.5), тогда (в силу M-замкнутости конуса K) имеем $u \leq v$. $\square$

Résumé

In this paper we consider nonlinear operators in bornological vektor spaces with a cone.

Литература

[1] Радыно Я. В. *Линейные уравнения и борнология.* Минск: Изд-во БГУ, 1982. 200 с.

[2] Красносельский М. А. *Положительные решения операторных уравнений.* М.: Физматгиз, 1962. 394 с.

[3] Hogbe-Nlend H. *Bornologies and functional analysis.* Amsterdam: North-Holland publishing company, 1977. 144 p.