Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 4, 1997

УДК 517.54

Я. Годуля, В. В. Старков

ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СЕМЕЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ЛОКАЛЬНО КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В [2,3] были введены и изучались линейно-инвариантные семейства гармонических локально K-квазиконформных в единичном круге функций. В этой статье продолжается исследование таких семейств. В частности, для функций f из этих семейств изучаются предельные множества $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f)$, исследован вопрос о том, когда предельные множества содержат единственную функцию.

В этой статье мы рассматриваем комплекснозначные гармонические в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функции $f(z)$, сохраняющие ориентацию (т. е. $J_f(z) > 0$ в Δ). Такие функции можно записать в виде

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(f) \bar{z}^n, \tag{1}$$

h и g — регулярные в Δ функции.

Для произвольной регулярной и локально однолистной в Δ функции $\varphi(z)$ обозначим

$$\varphi_a(z) = \frac{\varphi\left(\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - \varphi(a)}{\varphi'(a)(1-|a|^2)} = z + a_2(a) z^2 + \dots, \quad a \in \Delta.$$

Ch. Pommerenke [1] ввел понятие *порядка* такой функции φ:

$$\mathrm{ord}\varphi = \sup_{a\in\Delta} |a_2(a)| = \sup_{a\in\Delta} \frac{|\varphi_a''(0)|}{2}.$$

Универсальным линейно-инвариантным семейством $\mathcal{U}_\alpha$ *порядка* α в [1] называлось множество всех локально однолистных и регулярных в Δ функций $\varphi(z) = z + \ldots$ таких, что $\operatorname{ord}\varphi \le \alpha$; Ch. Pommerenke показал, что $\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$ при $\alpha < 1$, U_1 — класс выпуклых функций. Многие известные классы конформных отображений являются подклассами $\mathcal{U}_\alpha$ при различных α.

В [2] (краткий вариант этой статьи опубликован в [3]) рассматривались всевозможные гармонические локально гомеоморфные квазиконформные отображения (1), нормированные условиями

$$a_0(f) = 0, \quad a_1(f) + a_{-1}(f) = 1. \tag{2}$$

Каждое такое отображение попадает в класс $H(\alpha, K), \alpha \ge 1, K \ge 1$, состоящий из всех функций f, удовлетворяющих условиям 1)–3):

1) f гармонична и локально гомеоморфна в Δ и выполняются равенства (2);

2) f K-квазиконформна в Δ,

3) для функции $h(z)$, определенной равенством (1), $\dfrac{h(z)}{h'(0)} \in \mathcal{U}_\alpha$.

В [2] и [3] изучались семейства $H(\alpha, K)$ при $\alpha < \infty$, $K < \infty$. Семейства $H(\alpha, K)$ являются обобщением универсальных линейно-инвариантных семейств $\mathcal{U}_\alpha$ и (при условии нормировки (2)) содержат все K-квазиконформные функции из таких известных классов гармонических функций, как K_H (выпуклые функции, здесь $\alpha = 2$), C_H (функции, близкие к выпуклым, здесь $\alpha = 3$), S_H (однолистные функции). Обозначим

$$\partial_\theta f = \lim_{\rho \to +0} \frac{f(z + \rho e^{i\theta}) - f(z)}{\rho} = h'(z) e^{i\theta} + \overline{g'(z)} e^{-i\theta}$$

производную по направлению $e^{i\theta}$. В [2,3] показано, что $H(\alpha, K)$ являются секвенциально компактными семействами относительно равномерной сходимости внутри Δ и что $H(\alpha, K)$ — линейно-инвариантные семейства, т. е. для любой функции $f \in H(\alpha, K)$ и любых $a \in \Delta$ и вещественных θ

$$f_\theta(z, a) = \frac{f\left(\dfrac{z + a}{1 + \bar{a} z} e^{i\theta}\right) - f(a e^{i\theta})}{\partial_\theta f(a e^{i\theta})(1 - |a|^2)} = h_\theta(z, a) + \overline{g_\theta(z, a)} \in H(\alpha, K),$$

h_θ и g_θ регулярны в Δ.

В этой статье мы продолжаем исследования семейств $H(\alpha, K)$.

1^0. Предельные семейства.

По аналогии с [4] введем понятие *предельного семейства* для гармонических функций $f \in H(\alpha, K)$.

Определение 1. . *Пусть $f \in H(\alpha, K)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Обозначим $C(e^{i\theta}, f)$ множество всех функций $q(z)$, для каждой из которых существует такая последовательность положительных чисел $\xi_n \to 1^-$, что равномерно внутри Δ*

$$f_\theta(z, \xi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} q(z) = H(z) + \overline{G(z)},$$

H и G регулярны в Δ.

Заметим, что $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f) \neq \emptyset$. Действительно,

$$\frac{h_\theta(z, \xi)}{h'_\theta(0, \xi)} = \varphi(z, \xi, \theta) \in \mathcal{U}_\alpha.$$

Поскольку $\mathcal{U}_\alpha$ — компактное семейство и $\dfrac{1}{1+k} \leq |h'_\theta(0, \xi)| \leq \dfrac{1}{1-k}$ (см. [2,3]), то существует такая последовательность $\xi_n \to 1^-$, что $h_\theta(z, \xi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} H(z)$ равномерно внутри Δ, $\dfrac{H(z)}{H'(0)} \in \mathcal{U}_\alpha$. Но $|g'_\theta(z, \xi)| \leq k|h'_\theta(z, \xi)|$, $k = \dfrac{K-1}{K+1}$. Следовательно, множество функций $\{g_\theta(z, \xi) : \xi \in [0, 1)\}$ равномерно ограничено внутри Δ. Поэтому существует такая последовательность $\xi_n \in [0, 1)$, что равномерно внутри Δ

$$f_\theta(z, \xi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} H(z) + \overline{G(z)} \in H(\alpha, K).$$

Заметим также, что если $f \in H(\alpha, K)$, то и функция $F(z) = f(ze^{i\theta})/\partial_\theta f(0) \in H(\alpha, K)$ и $F(z, \xi) = f_\theta(z, \xi)$. Следовательно, $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f) = \mathrm{C}(1, F)$. Поэтому при изучении предельных семейств $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f)$ можно считать $e^{i\theta} = 1$.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{H}$ — компактное линейно-инвариантное семейство, $\mathcal{H} \subset H(\alpha, K)$ и пусть $f \in \mathcal{H}$. Тогда предельные семейства $C(e^{i\theta}, f)$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ образуют компактные связные подмножества замыкания $\mathcal{H}$. Если $x \in (-1, 1)$ и $q(z) \in C(e^{i\theta}, f)$, то*

$$q(z, x) = \frac{q(\frac{z+x}{1+xz}) - q(x)}{(1-x^2)\partial_0 q(x)} \in C(e^{i\theta}, f). \tag{3}$$

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство соответствующего утверждения в случае $K=1$ [4, теорема 3.1] с той лишь разницей, что за расстояние между функциями $f_1 = h_1 + \overline{g_1}$, $f_2 + \overline{g_2} \in H(\alpha, K)$ надо взять

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{|z|=1/2}(|h_1(z) - h_2(z)| + |g_1(z) - g_2(z)|),$$

h_1, h_2, g_1, g_2 — регулярные в Δ функции.

Однако предельные семейства $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f)$ не являются, вообще говоря, линейно-инвариантными семействами, т. к. (3) может не иметь места для $x \in \Delta$ (например, в случае $f(z) = z$). Из [5, с. 14–15] следует, что $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f)$ или имеет мощность континуума, или состоит из одной функции. Множество $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f)$ может быть достаточно широким; так, например, в случае $K = 1$ существует функция f_* из класса S однолистных и регулярных в Δ функций с нормировкой (2), для которой $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f_*) = S$ (см. [4, с. 229]). В [4] описаны предельные семейства $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f)$, $f \in \mathcal{U}_\alpha = H(\alpha, 1)$, состоящие из одной функции. Аналогичное утверждение справедливо и в $H(\alpha, K)$, $K > 1$.

Теорема 2. *Пусть $f \in H(\alpha, K)$. Если $C(e^{i\theta}, f)$ содержит единственную функцию q, то существует равномерный внутри Δ предел*

$$\lim_{\xi \to 1^-} f_\theta(z, \xi) = q(z) = q_c(z) + c_0(q_c(z) - q_c(\bar{z})), \tag{4}$$

где

$$q_c(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^c - 1\right], & c \neq 0,\ c \in \mathbb{C}, \\ \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}, & c = 0, \end{cases}$$

число c лежит в эллипсе

$$\frac{(\mathrm{Re}c)^2}{\alpha^2} + \frac{(\mathrm{Im}c)^2}{\alpha^2 - 1} \leq 1$$

(при $\alpha = 1$ этот эллипс вырождается в отрезок), а число $c_0 \in \mathbb{C}$ лежит в круге $\left|\dfrac{c_0}{c_0+1}\right| \leq k$.

Замечание. . В случае $K = 1$ теорема 2 доказана в [4, с. 288].

Доказательство. 1) Существование предела $\lim\limits_{\xi\to 1^-} f_\theta(z,\xi) = q(z)$ сразу следует из единственности функции q в семействе $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f)$. Отсюда вытекает существование пределов

$$\lim_{\xi\to 1^-} h_\theta(z,\xi) = H(z), \quad \lim_{\xi\to 1^-} g_\theta(z,\xi) = G(z), \tag{5}$$

т. к. в противном случае для разных последовательностей $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)} \to \to 1^-$ в качестве пределов в (5) получили бы разные регулярные функции

$$H_1(z) \neq H(z) \quad G_1(z) \neq G(z),$$

причем $H(z)+\overline{G(z)} = H_1(z)+\overline{G_1(z)} = q(z)$. Но, вследствие (2), все эти функции в нуле равны нулю, поэтому $H_1 \equiv H$, $G_1 \equiv G$. Теперь из (5) и теоремы Витали следует, что предел $\lim\limits_{\xi\to 1^-} f_\theta(z,\xi)$ — равномерный внутри Δ.

2) По теореме 1, для $x \in (-1,1)$ и $z \in \Delta$ имеет место тождество

$$q(z) = \frac{q\left(\dfrac{z+x}{1+xz}\right) - q(x)}{(1-x^2)\partial_0 q(x)}. \tag{6}$$

Отсюда, дважды применяя оператор ∂_0, получим

$$\partial_0^2 q(z) = \frac{1}{\partial_0 q(x)} \left[\frac{H''\left(\dfrac{z+x}{1+xz}\right)\dfrac{1-x^2}{1+xz} - H'\left(\dfrac{z+x}{1+xz}\right)2x}{(1+xz)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\overline{G''\left(\dfrac{z+x}{1+xz}\right)}\dfrac{1-x^2}{1+x\bar{z}} - \overline{G'\left(\dfrac{z+x}{1+xz}\right)}2x}{(1+x\bar{z})^3} \right],$$

$$\partial_0^2 q(0) = (1-x^2)\frac{\partial_0^2 q(x)}{\partial_0 q(x)} - 2x.$$

Обозначив $c = \dfrac{1}{2}\partial_0^2 q(0)$, получим

$$2\frac{c+x}{1-x^2} = \frac{\partial_0^2 q(x)}{\partial_0 q(x)}.$$

Интегрирование этого равенства по отрезку $[0, x]$ с учетом того, что $q(0) = 0,\ \partial_0 q(0) = a_1(q) + a_{-1}(q)$, дает:

$$\log \partial_0 q(x) = \int_0^x \frac{2(1+s)}{1-s^2}\, ds = \log \frac{(1+x)^{c-1}}{(1-x)^{c+1}},$$

$$q(x) = \int_0^x \partial_0 q(s)\, ds = \int_0^x \frac{(1+s)^{c-1}}{(1-s)^{c+1}}\, ds = q_c(x).$$

Функция $\psi(z) = q(z) - q_c(z)$ гармонична в Δ, и $\psi(x) = 0$ при $x \in (-1, 1)$. Все функции $q_c(z)$ обладают свойством:

$$\frac{q_c\left(\dfrac{z+x}{1+xz}\right) - q_c(x)}{(1-x^2)q_c'(x)} = q_c(z) \qquad\qquad x \in (-1,1), \qquad z \in \Delta.$$

Отсюда и из (6) следует, что

$$q(z) = q_c(z) + \psi(z) = \frac{q_c(z)q_c'(x)}{q_c'(x) + \partial_0\psi(x)} + \frac{\psi\left(\dfrac{z+x}{1+xz}\right) - \psi(x)}{(1-x^2)(g_c'(x) + \partial_0\psi(x))}.$$

Но $\psi(x) = 0$ для $x \in (-1, 1)$, следовательно, $\partial_0\psi(x) = 0$ и

$$q(z) = q_c(z) + \frac{\psi\left(\dfrac{z+x}{1+xz}\right)}{(1-x^2)q_c'(x)} \Longrightarrow \psi(z) = \psi\left(\frac{z+x}{1+xz}\right)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^c \tag{7}$$

для всех $z \in \Delta$. Обозначим $H_1 = H - q_c$. Продифференцируем (7) по x и подставим в полученное равенство $x = 0$

$$0 \equiv H_1'(z)(1-z^2) + \overline{G'(z)}(1-\bar{z}^2) - 2c(H_1(z) + \overline{G(z)}).$$

Отсюда получаем тождества

$$(1-z^2)H_1'(z) \equiv 2cH_1(z) + c_0, \tag{8}$$

$$(1-z^2)G'(z) \equiv 2\bar{c}G(z) - \bar{c}_0, \tag{9}$$

которые остаются справедливыми и в случае $c = 0$. В случае $c \neq 0$ общее решение линейных дифференциальных уравнений (8) и (9) имеет вид

$$H_1(z) = c_1\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c - \frac{c_0}{2c}, \qquad G(z) = c_2\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\bar{c}} + \frac{\bar{c}_0}{2\bar{c}},$$

c_1, c_2 — постоянные. Поскольку при $x \in (-1,1)$

$$0 = \psi(x) = (c_1 + \bar{c}_2)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^c,$$

то $\bar{c}_2 = -c_1$. Следовательно,

$$\psi(z) = H_1(z) + \overline{G(z)} = c_1\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c - \left(\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)^c\right] = c_0[q_c(z) - q_c(\bar{z})],$$

$c_0 = 2cc_1$;

$$q(z) = q_c(z) + \psi(z) = q_c(z)(1+c_0) - c_0 q_c(\bar{z}).$$

В силу компактности класса $H(\alpha, K)$, функция $q(z) \in H(\alpha, K)$. Поэтому $q_c \in \mathcal{U}_\alpha$, а это значит (см. [6]), что

$$\frac{(\mathrm{Re}c)^2}{\alpha^2} + \frac{(\mathrm{Im}c)^2}{\alpha^2 - 1} \leq 1.$$

Из K-квазиконформности функции $q(z)$ следует, что

$$\left|\frac{c_0}{1+c_0}\right| \leq k. \tag{10}$$

В случае $c = 0$ решения уравнений (8) и (9) запишутся в виде

$$H_1(z) = \frac{c_0}{2}\log\frac{1+z}{1-z}, \qquad G(z) = -\frac{\bar{c}_0}{2}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

Следовательно, в этом случае

$$q(z) = q_0(z) + \psi(z) = (1+c_0)q_0(z) - c_0 q_0(\bar{z}).$$

Причем, как и раньше, c_0 удовлетворяет неравенству (10). □

Заметим, что каждая из функций $q(z)$ вида (4) с c_0, удовлетворяющим неравенству $\left|\frac{c_0}{1+c_0}\right| \leq k$, представляет собой семейство $\mathrm{C}(1, q)$, т. е. семейство, содержащее единственную функцию.

Условие того, что $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f)$ состоит из единственной функции, описывается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть $f = h + \bar{g} \in H(\alpha, K)$, h и g — регулярные в Δ функции. Для того, чтобы $C(1, f)$ состояло из единственной функции, необходимо и достаточно, чтобы в любом угле Штольца с вершиной в 1 существовали конечные пределы:*

а) $\lim\limits_{\zeta\to 1} \dfrac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)}(1-\zeta) = c+1, \quad c \in \mathbb{C},$

б) $\lim\limits_{\zeta\to 1} \dfrac{g'(\zeta)}{h'(\zeta)} = A, \qquad |A| \le k.$

Доказательство. При $\theta = 0$ для функции $f_\theta(z,\xi)$ примем обозначение $f(z,\xi) = h(z,\xi) + \overline{g(z,\xi)}$, $h(z,\xi)$ и $g(z,\xi)$ регулярны в Δ по z. Если $\mathrm{C}(1, f)$ состоит из одной функции $q(z)$, то, по теореме 2, существует $\lim\limits_{\xi\to 1^-} f(z,\xi) = q(z) = a_1(q)q_c(z) + a_{-1}(q)q_c(\bar{z})$, здесь $a_1(q)$ и $a_{-1}(q)$ — некоторые числа, $a_1(q) + a_{-1}(q) = 1$. Причем (см. доказательство п.1 теоремы 2), $h(z,\xi) \underset{\xi\to 1^-}{\longrightarrow} a_1(q)q_c(z)$, $g(z,\xi) \underset{\xi\to 1^-}{\longrightarrow} a_{-1}(q)q_{\bar{c}}(z)$ равномерно внутри Δ. Следовательно, равномерно внутри Δ

$$\frac{h'\left(\dfrac{z+\xi}{1+z\xi}\right)}{h'(\xi) + \overline{g'(\xi)}} \underset{\xi\to 1^-}{\longrightarrow} a_1(q)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c, \tag{11}$$

$$\frac{\overline{g'\left(\dfrac{z+\xi}{1+z\xi}\right)}}{h'(\xi) + \overline{g'(\xi)}} \underset{\xi\to 1^-}{\longrightarrow} a_{-1}(q)\left(\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)^c, \quad \frac{\overline{g'\left(\overline{\dfrac{z+\xi}{1+z\xi}}\right)}}{h'\left(\dfrac{z+\xi}{1+z\xi}\right)} \underset{\xi\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{a_{-1}(q)}{a_1(q)}. \tag{12}$$

В (11) предел конечен, т. к. $q \in H(\alpha, K)$ и (см. [2,3]) $\dfrac{1}{1+k} \le |a_1(q)| \le \dfrac{1}{1-k}$. Если $|z| \le r(<1)$ и $\xi \longrightarrow 1^-$, то $\zeta = \dfrac{z+\xi}{1+z\xi} \longrightarrow 1$ в угле Штольца; причем величина угла произвольная, т. к. r — произвольное число из $(0,1)$. Поэтому из (11) и (12) получаем, соответственно, существование конечных пределов а) и б).

Обратно, пусть существуют конечные пределы а) и б). Из а) следует (см. [4, теорема 3.14]), что равномерно внутри Δ

$$h(z,\xi)\frac{h'(\xi) + \overline{g'(\xi)}}{h'(\xi)} \underset{\xi\to 1^-}{\longrightarrow} q_c(z). \tag{13}$$

Следовательно,

$$\frac{h'\left(\dfrac{z+\xi}{1+z\xi}\right)}{h'(\xi)(1+z\xi)^2} \underset{\xi\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{(1+z)^{c-1}}{(1-z)^{c+1}}. \tag{14}$$

Из б) вытекает, что равномерно внутри Δ

$$\frac{\overline{g'\left(\overline{\dfrac{z+\xi}{1+z\xi}}\right)}}{h'\left(\dfrac{z+\xi}{1+z\xi}\right)} \underset{\xi\to 1^-}{\longrightarrow} A.$$

Отсюда и из (14) получаем

$$\frac{\overline{g'\left(\overline{\dfrac{z+\xi}{1+z\xi}}\right)}}{h'(\xi)(1+z\xi)^2} \underset{\xi\to 1^-}{\longrightarrow} A\frac{(1+z)^{c-1}}{(1-z)^{c+1}},$$

т. е. равномерно внутри Δ

$$\overline{g'(z,\xi)}\frac{h'(\xi)+\overline{g'(\xi)}}{h'(\xi)} \underset{\xi\to 1^-}{\longrightarrow} Aq'_c(\bar{z}).$$

Интегрирование последнего с учетом (13) дает:

$$f(z,\xi) \underset{\xi\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{1+A}q_c(z) + \frac{A}{1+A}q_c(\bar{z}) = q(z).$$

Таким образом, $\mathrm{C}(1,f)$ состоит из единственной функции $q(z)$. □

Замечание. . При $K=1$ теорема 3 представляет собой известный [4, теорема 3.14] результат для регулярных функций.

2^0. **Некоторые оценки.**

В [2,3] были получены оценки ряда функционалов в $H(\alpha,K)$. Следующая теорема продолжает эту тему и является обобщением известного результата (см. [6]) на случай $K>1$.

Теорема 4. *Пусть* $f=h+\bar{g}\in H(\alpha,K)$, $f(z)\neq c$ *в* Δ. *Тогда для* $z\in\Delta$*:*

1) $\dfrac{|h'(z)|+|g'(z)|}{|f(z)-c|} \le \dfrac{2\alpha K}{1-|z|^2}$,

2) $\left|\log\left(1-\dfrac{f(z)}{c}\right)\right| \le \alpha K \log\dfrac{1+|z|}{1-|z|}$; здесь ветвь логарифма выбирается так, что $\log\left(1-\dfrac{f(0)}{c}\right)=0$.

Первое неравенство является точным.

Доказательство. Из линейной инвариантности семейства $H(\alpha,K)$ следует, что функция $f_\theta(z,a)\in H(\alpha,K)$ и не принимает значения

$$\frac{c-f(ae^{i\theta})}{(1-|a|^2)\partial_\theta f(ae^{i\theta})}.$$

Следовательно (см. [2,3]), справедливо точное в $H(\alpha,K)$ неравенство

$$\left|\frac{c-f(ae^{i\theta})}{(1-|a|^2)\partial_\theta f(ae^{i\theta})}\right| \ge \frac{1}{2\alpha K},$$

верное для любых $a\in\Delta$ и $\theta\in\mathbb{R}$. Обозначив $ae^{i\theta}=z$, получим точное неравенство

$$\left|\frac{\partial_\theta f(z)}{c-f(z)}\right| \le \frac{2\alpha K}{1-|z|^2}, \qquad z\in\Delta, \tag{15}$$

и

$$\frac{|h'(z)|+|g'(z)|}{|f(z)-c|} = \frac{\max\limits_{\theta\in\mathbb{R}}|\partial_\theta f(z)|}{|f(z)-|} \le \frac{2\alpha K}{1-|z|^2}.$$

Для получения неравенства 2) фиксируем $z=re^{i\theta}\in\Delta,\ \ r\in[0,1)$. По (15)

$$\left|\int_0^r \frac{\partial_\theta f(xe^{i\theta})}{f(xe^{i\theta})-c}dx\right| = \left|\int_0^r \frac{d[f(xe^{i\theta})-c]}{f(xe^{i\theta})-c}\right| = \left|\log\left(1-\frac{f(re^{i\theta})}{c}\right)\right| \le$$
$$\le \int_0^r \frac{2\alpha K}{1-x^2}dx = \alpha K\log\frac{1+r}{1-r}.$$

3^0. **Расширение $H(\alpha,K)$ посредством суперпозиции с однолистными функциями.**

Обозначим B множество всех таких однолистных и регулярных в Δ функций $\sigma(z)$, что $|\sigma(z)|<1$,

$$H_S(\alpha, K) = \left\{ F(z) = \frac{f(\sigma(z)) - f(\sigma(0))}{\partial_0(f \circ \sigma)(0)} : \quad f \in H(\alpha, K),\ \sigma \in \mathrm{B} \right\}. \quad (16)$$

Поскольку классу B принадлежит функция $\sigma(z) = z$, то $H_S(\alpha, K) \supset H(\alpha, K)$. Заметим, что функции $F \in H_S(\alpha, K)$ имеют нормировку (2).

Теорема 5. *$H_S(\alpha, K)$ — линейно-инвариантное семейство, причем $H_S(\alpha, K) \subset H(\beta, K)$, где $\beta = \max(\alpha, 2)$.*

Доказательство. Пусть $f = h + \bar{g} \in H(\alpha, K)$, функция $F = H + \bar{G} \in H_S(\alpha, K)$ имеет вид (16), тогда

$$H(z) = \frac{h(\sigma(z)) - h(\sigma(0))}{\partial_0(f \circ \sigma)(0)}, \qquad G(z) = \frac{g(\sigma(z)) - g(\sigma(0))}{\partial_0(f \circ \sigma)(0)}.$$

Следовательно, $\left|\frac{G'(z)}{H'(z)}\right| = \left|\frac{g'(\sigma(z))}{h'(\sigma(z))}\right| \leq k$ для $z \in \Delta$, т. е. $F(z)$ — гармоническое локально однолистное K-квазиконформное отображение. В [1, с. 118] доказано, что $\operatorname{ord}\frac{H'(z)}{H'(0)} = \beta = \max(\alpha, 2)$, если $h \in \mathcal{U}_\alpha$. Таким образом, $H_S(\alpha, K) \subset H(\beta, K)$. При $\sigma \in \mathrm{B}$, $a \in \Delta$, $\theta \in \mathbb{R}$ функция $\sigma_1(z) = \sigma\left(e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) \in \mathrm{B}$. Отсюда следует линейная инвариантность $H_S(\alpha, K)$. $\square$

Замечание. . При $K = 1$ теорема 5 дает известный результат Ch. Pommerenke [1, с. 118] для регулярных функций.

Следствие. . *$H_S(\alpha, K) = H(\alpha, K)$ при $\alpha \geq 2$.*

Résumé

In [2,3] harmonic locally K-quasiconformal families of functions defined in the unit disc were introduced. In this paper we continue the study of the boundary behaviour of maps form such families. In particular, for functions f from the family we investigate cluster sets $\mathrm{C}(e^{i\theta}, f)$ and consider the problem od degenerating of a cluster set to a point.

Список литературы

[1] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.I* // Math. Ann. 1964. Hf. 155. P. 108–154.

[2] Starkov V. V. *Harmonic locally quasiconformal mappings* // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect. A. 1995. V. 49. P. 41–58.

[3] Старков В. В. *Гармонические локально квазиконформные отображения* // Труды Петрозаводского госуниверситета. Сер. матем. 1993. Вып. 1. С. 61–69.

[4] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.II* // Math. Ann. 1964. Hf. 156. P. 226–262.

[5] Коллингвуд Э., Ловатер А. *Теория предельных множеств*. М:, 1971.

[6] Campbell D.M., Pfaltzgraff J.A. *Boundary behaviour and linear invariant families* // J. d'Analyse Math. 1976. V. 29. P. 67–92.