Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 4, 1997

УДК 62.50

СУБОПТИМАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НАБЛЮДЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ю. В. Заика, М. М. Кручек

Рассматривается динамическая система с запаздыванием и неопределенностью в начальных данных. Приводится алгоритм оценивания функционалов на решениях системы по результатам измерений. Методом динамического программирования строятся приближенно оптимальные весовые функции в интегральных операторах наблюдения с целью минимизации гарантированной оценки.

§ 1. Постановка задачи и необходимые преобразования

Круг задач теории управления и наблюдения в условиях неопределенности весьма обширен [1–3]. В данной статье рассматривается динамическая система в форме линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием и неопределенностью в начальных данных. Некоторые алгоритмы оценивания функционалов на решениях таких систем с возмущениями по результатам измерений представлены в [4–7]. При этом для обработки измерений используются интегральные операторы, что ориентировано на определенную помехоустойчивость оценивания. Естественно поставить задачу о выборе таких весовых функций в операторах наблюдения, которые бы минимизировали длину отрезка неопределенности значений оцениваемого функционала.

Перейдем к описанию математической модели наблюдения. Пусть движение объекта моделируется векторным функционально-дифференциальным уравнением [8,9]:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \sum_{j=0}^{N} A_j x(t-h_j) + \int\limits_{-h}^{0} A(\theta)x(t+\theta)d\theta + R(t)u(t), \tag{1}$$

$$t \geq 0,\ 0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_N = h,$$
$$x(0) = x^0,\ x(\tau) = x_0(\tau),\ \tau \in [-h, 0),$$
$$\widehat{x}_0 = (x^0, x_0(\cdot)) \in M_2 = R^n \times L_2([-h,0], R^n).$$

Матрицы A_j размерности $n\times n$ постоянны, элементы $A(t)$, $R(t)$ ($n\times n$, $n \times n_1$) кусочно непрерывны на рассматриваемом отрезке времени $[0, t_*]$ ($t_* \gg h$), управление или внешнее возмущение $u(t) \in R^{n_1}$ задано ($u \in L_2([0,t_*], R^{n_1})$). Неизвестные начальные данные $\widehat{x}_0 = (x^0, x_0(\cdot))$ состоят из начального вектора $x(0) = x^0$ и предыстории $x_0(\cdot)$. Поскольку предыстория влияет на движение $x(t)$ "в интегральном смысле", то в качестве фазового пространства примем M_2:

$$\widehat{x}_t = (x(t), x_t) = (x(t), x(t+\cdot)) \in M_2 = R^n \times L_2,$$
$$x_t(\theta) = x(t+\theta),\ \theta \in [-h, 0].$$

При этом для $x_0(\cdot) \in L_2([-h,0], R^n)$ не обязательно $x_0(0) = x^0$. Изменение значений $x_0(\tau)$ на множестве меры нуль в $[-h, 0]$ не меняет движения $x(t)$, $t \geq 0$. Зависимость от начальных данных обозначаем $x(t; \widehat{x}_0, 0)$, $\widehat{x}_t(\widehat{x}_0, 0)$. Равенство в (1) понимаем в смысле почти всюду на $[0, t_*]$. Решение $x(t)$ абсолютно непрерывно на $[0, t_*]$ (более того — принадлежит $H^1([0,t_*], R^n)$), поэтому удобно класс $x_t \in L_2([-h,0], R^n)$ отождествлять с некоторым его представителем, непрерывным на $[-t, 0] \cap [-h, 0]$. При этом $x_t(0) = x(t)$ для $t > 0$.

Информация о движении доставляется значениями (измерениями) вектор-функции

$$y(t) = Gx(t),\ t \geq 0, \quad rankG = m \quad (G - m \times n). \tag{2}$$

В приложениях обычно измеряется m компонент вектора $x(t)$, $m < n$.

Фиксируем натуральное $r \geq 1$ и рассмотрим функционал

$$J = p^{0\prime} x(rh) + \int\limits_{-h}^{0} p'(\tau)x(rh+\tau)d\tau = (\widehat{p}, \widehat{x}_{rh})_{M_2}, \tag{3}$$

$$rh \le t_*, \qquad \widehat{p} = (p^0, p(\cdot)) \in M_2.$$

Если $p(\cdot) = 0$ (нули линейных пространств обозначаем одним символом), то, варьируя $p^0 \in R^n$, получаем компоненты (проекции) положения $x(t)$ в момент времени $t = rh$. При $p^0 = 0$ имеем проекции x_{rh} в L_2 (интересующие нас коэффициенты Фурье). Таким образом, значения J имеют важный с точки зрения приложений смысл.

Далее, поскольку хранение континуума значений $y(t)$ затруднительно, считаем, что по мере поступления информации $y(t)$ на отрезке времени $[0, (r-1)h]$ вычисляются функционалы

$$J_i = \sum_{j=1}^{r-1} (\widehat{k}_{ij}, \widehat{y}_{ij})_{\tilde{M}_2} = \sum_{j=1}^{r-1} \left(k_{ij}^{0\,\prime} y(jh) + \int_{-h}^{0} k_{ij}'(\tau) y(jh+\tau) d\tau \right), \tag{4}$$

$$i = \overline{1,l}, \ \widehat{y}_{jh} = (y(jh), y(jh + \cdot)),$$

$$\widehat{k}_{ij} = (k_{ij}^0, k_{ij}(\cdot)) \in \tilde{M}_2 = R^m \times L_2([-h,0], R^m).$$

Некоторые векторные весовые коэффициенты k_{ij}^0 и $k_{ij}(\cdot)$ могут быть нулевыми, если измерения на соответствующем промежутке времени не проводятся или недостаточно надежны. Могут использоваться только дискретные измерения $y(jh)$, и тогда все $k_{ij}(\cdot) = 0$.

Чтобы задача оценивания J была содержательной, считаем выполненными априорные ограничения на неопределенность начальных данных:

$$(\widehat{x}_0, \widehat{x}_0)_Q = x^{0\prime} Q^0 x^0 + \int_{-h}^{0} x_0'(\tau) Q(\tau) x_0(\tau) d\tau \le \bar{\kappa}^2. \tag{5}$$

Матрица $Q(t)$ кусочно непрерывна, симметрична и положительно определена $\forall t \in [-h, 0]$ вместе с Q^0 (не обязательно $Q^0 = Q(-0)$).

Значения функционалов J, J_i определяются неизвестными начальными данными $\widehat{x}_0$. Поэтому для оценивания J по значениям J_i целесообразно получить представления $J = J(\widehat{x}_0)$, $J_i = J_i(\widehat{x}_0)$. В основе соответствующих преобразований следующее простое соображение: если, например, задан

$$J = (\widehat{p}, \widehat{x}_{rh})_{M_2} = (\widehat{p}, \mathcal{P}\widehat{x}_0)_{M_2},$$

то нужно найти оператор $\mathcal{P}$ и "перебросить его к аргументу $\widehat{p}$", определив сопряженный $\mathcal{P}^*$. Отметим, что представления $J_i(\widehat{x}_{rh})$ невозможны из-за неинтегрируемости (1) по убыванию времени.

Опуская технические детали [5–7], приходим к выражениям:

$$J = (\widehat{q}, \widehat{x}_0)_Q - \psi, \quad J_i = (\widehat{q}_i, \widehat{x}_0)_Q - \psi_i, \tag{6}$$

$$\widehat{q} = T^{*r}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p}, \quad \widehat{q}_i = \sum_{j=1}^{r-1} T^{*j}\widehat{Q}^{-1}G'\widehat{k}_{ij},$$

$$\psi = \int\limits_0^{rh} b'(\tau)R(\tau)u(\tau)\,d\tau,\ \psi_i = \int\limits_0^{(r-1)h} b_i'(\tau)R(\tau)u(\tau)\,d\tau.$$

Здесь $(\cdot,\cdot)_Q = (\cdot, \widehat{Q}\cdot)_{M_2}$ (см. (5)), $\widehat{Q} = (Q^0, Q(\cdot))$,

$$\widehat{Q}^{-1}\widehat{p} = (Q^{0^{-1}}p^0, Q^{-1}(\cdot)p(\cdot)), \quad G'\widehat{k}_{ij} = (G'k_{ij}^0, G'k_{ij}(\cdot)) \in M_2,$$

оператор $T^* : M_2 \to M_2$ определяется как сопряженный в смысле

$$(\widehat{a}, T\widehat{b})_Q = (T^*\widehat{a}, \widehat{b})_Q \quad \forall\, \widehat{a}, \widehat{b} \in M_2$$

к оператору сдвига $T : M_2 \to M_2$, $T\widehat{x}_0 = \widehat{x}_h(\widehat{x}_0, 0)$, для однородной системы (1) $(u(\cdot) = 0)$.

Значения $\widehat{c} = T^*\widehat{a}\ \forall \widehat{a} \in M_2$ вычисляются следующим образом. Следует проинтегрировать (по крайней мере, численно) справа налево на отрезке $[-h, 0]$ сопряженную систему

$$\frac{dV}{dt}(t) = -\sum_{j=0}^{N} A_j' V(t + h_j) - \int\limits_{-h}^{0} A'(t-\tau)V(\tau)d\tau + Q(t)a(t), \tag{7}$$

$$t \in [-h, 0], \qquad V(0) = -Q^0 a^0,$$

$$\tau \notin [-h, 0] \Rightarrow V(\tau) = 0,\ A(\tau) = 0.$$

Тогда

$$\widehat{c} = (c^0, c(\cdot)), \quad c^0 = -Q^{0^{-1}}V(-h),$$

$$c(t) = -Q^{-1}(t)(\sum_{j=0}^{N} A_j' V(t - h + h_j) +$$
$$+ \int\limits_{-h}^{0} A'(t - h - \tau)V(\tau)d\tau).$$

С помощью интегрирования (7), но с другими неоднородностями (вместо $Q(t)a(t)$) и начальными данными, можно выписать явные выражения для вектор-функций $b(\cdot)$, $b_i(\cdot)$ [5-7]. Делать этого не будем, поскольку для дальнейшего важно только, что числа ψ, ψ_i не зависят от $\widehat{x}_0$ и вычисляются по известной $u(\cdot)$. Если нет необходимости или возможности ознакомиться с соответствующей техникой, то без существенного ограничения общности можно считать $u(\cdot) = 0$ ($\psi = \psi_i = 0$).

Смысл представлений (6) в следующем. Функционалы J, J_i теперь явно представлены через входные данные $\widehat{x}_0$, $u(\cdot)$. Кроме того, вычисленные $\widehat{q}$, $\widehat{q}_i$, $b(\cdot)$, $b_i(\cdot)$ позволяют судить о чувствительности значений J, J_i к вариациям начальных данных $\hat{x}_0$ и управления (возмущения) $u(\cdot)$.

Перейдем теперь к уточнению задачи. Нас интересует алгоритм, позволяющий по любой допустимой (с учетом (5)) реализации $J_j = \gamma_j$ указать оценку возможных значений J:

$$|J - \varphi_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell)| \leq \varphi_2(\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell).$$

Поскольку $u(\cdot)$ известно, то вместо J, J_i можно рассматривать функционалы

$$I = J + \psi = (\widehat{q}, \widehat{x}_0)_Q, \quad I_i = J_i + \psi_i = (\widehat{q}_i, \widehat{x}_0)_Q, \quad (\widehat{x}_0, \widehat{x}_0)_Q \leq \bar{\kappa}^2. \quad (8)$$

Задача приобретает общую формулировку на языке функционального анализа: оценить заданный функционал по известным значениям других. В контексте задач вычислительной математики (интерполирование, квадратурные формулы, ...) проблема изучалась в [10].

Пусть в результате измерений $y(t)$ и подсчета J_i в силу (4) стали известны значения $I_i = \alpha_i$, $i = \overline{1, \ell}$. Тогда применительно к рассматриваемой в статье задаче имеет место точное неравенство [5–7]:

$$|I - I_*| \leq F_1 F_2. \quad (9)$$

Здесь

$$I_* = -\det \begin{pmatrix} 0 & \alpha' \\ \sigma & \Gamma_0 \end{pmatrix} / \det \Gamma_0, \ \Gamma_0 = \Gamma_0\{\widehat{q}_1, \ldots, \widehat{q}_l\},$$
$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)', \ \sigma = ((\widehat{q}, \widehat{q}_1)_Q, \ldots, (\widehat{q}, \widehat{q}_l)_Q)',$$
$$F_1^2 = \det \Gamma\{\widehat{q}, \widehat{q}_1, \ldots, \widehat{q}_l\} / \det \Gamma_0,$$

$$F_2^2 = (\widehat{x}_0, \widehat{x}_0)_Q + \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha' \\ \alpha & \Gamma_0 \end{pmatrix} / \det \Gamma_0,$$

$\Gamma\{\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_s\}$ — матрица Грама элементов $\widehat{d}_i \in M_2$ относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_Q = (\cdot, \widehat{Q})_{M_2}$.

Геометрический смысл F_1 — расстояние (в метрике, порожденной $(\cdot,\cdot)_Q$) от $\widehat{q}$ до линейной оболочки $\mathcal{L}\{\widehat{q}_1, \ldots, \widehat{q}_\ell\}$, F_2 — расстояние от реализовавшегося $\widehat{x}_0$ до $\mathcal{L}\{\widehat{q}_1, \ldots, \widehat{q}_\ell\}$. Поскольку $\widehat{x}_0$ неизвестен, то вместо (9) приходим к вычисляемой по α_j оценке

$$|I - I_*| \le F_1 F_3, \quad F_3^2 = \bar{\kappa}^2 + \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha' \\ \alpha & \Gamma_0 \end{pmatrix} / \det \Gamma_0. \tag{10}$$

Таким образом, один из функционалов (пусть J_1) целесообразно выбрать из условия $||\widehat{q} - \widehat{q}_1||_Q \to \min$. А остальные $J_2, \ldots, J_\ell$ — так, чтобы наиболее вероятные реализации $\widehat{x}_0$ были близки к $\mathcal{L}$. Если же вести речь только о гарантированном оценивании ($|I - I_*| \le F_1\bar{\kappa}$, $\max F_2 = \bar{\kappa}$), то задача $||\widehat{q} - \widehat{q}_1||_Q \to \min$ остается, а выбор $J_2, \ldots, J_\ell$ не влияет на F_1 и не является существенным. При систематическом использовании (10) вычислять каждый раз определители нерационально и в [5–7] указаны некоторые вычислительные упрощения. В данной статье сосредоточимся на задаче $F_1 \to \min$ на $\{\widehat{k}_{ij}\}$.

§ 2. Оптимизация оценивания

Из соображений §1 рассмотрим задачу

$$||T^{*r}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p} - S\widehat{K}||_Q \to \min\,. \tag{11}$$

Оптимальному выбору подлежит $\widehat{K} = (\widehat{k}_1, \ldots, \widehat{k}_{r-1}) \in \widetilde{M}_2^{r-1}$, оператор $S : \widetilde{M}_2^{r-1} \to M_2$ определяется формулой

$$S\widehat{K} = \sum_{j=1}^{r-1} T^{*j}\widehat{Q}^{-1}G'\widehat{k}_j.$$

Задача (11) означает, что нас интересует квазирешение операторного уравнения $S\widehat{K} = \widehat{q}$ ($\widehat{q} = T^{*r}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p}$) в пространстве $\widetilde{M}_2^{r-1}$. При этом в M_2 используем метрику, порожденную $(\cdot,\cdot)_Q$.

Стандартным образом доказывается (применяя лемму Гронуолла), что линейные операторы T, T^*: $M_2 \to M_2$ вполне непрерывны. Поэтому $S\widetilde{M}_2^{r-1}$ не замкнуто. Исключение составляет случай конечномерности S, но это свидетельствует о вырожденности исходной модели (1). Следовательно, разрешимость уравнения $S\widehat{K} = \widehat{q}$ не гарантируется. Более того, и задача (11) может не иметь решения. Здесь мы стакиваемся с типичными трудностями, связанными с решением некорректных задач (уравнение первого рода с вполне непрерывным оператором). Но констатация невозможности в общем случае явного решения задачи "не освобождает от ответственности" предложить разумный способ приближенного решения (11). Первое, о чем следует упомянуть, — наличие огромного числа публикаций по методам регуляризации некорректных задач. Нет никаких препятствий к их применению в (11). Оставляя этот общий путь как "вполне протоенный, но энергоемкий", попытаемся извлечь выгоду из специфики структуры оператора S.

Обозначим $\widehat{B} = \widehat{Q}^{-1}G' = ({Q^0}^{-1}G', Q^{-1}(\cdot)G')$ и заметим, что

$$S\widehat{K} = \sum_{j=1}^{r-1} T^{*j}\widehat{Q}^{-1}G'\widehat{k}_j =$$
$$= T^*(\widehat{B}\widehat{k}_1 + \ldots + T^*(\widehat{B}\widehat{k}_{r-3} + T^*(\widehat{B}\widehat{k}_{r-2} + T^*(\widehat{B}\widehat{k}_{r-1} + 0)))\ldots).$$

Рассмотрим дискретную динамическую систему в M_2:

$$X_1 = 0, \quad X_{i+1} = T^*X_i + T^*\widehat{B}\widehat{u}_i, \quad \widehat{u}_i \in \widetilde{M}_2. \tag{12}$$

Положим управления $\widehat{u}_1 = \widehat{k}_{r-1}, \ldots, \widehat{u}_{r-1} = \widehat{k}_1$. Тогда $X_r = S\widehat{K}$ и задача приобретает формулировку в терминах теории управления: выбором управлений $\widehat{u}_i$ перевести фазовую точку из нуля в $\widehat{q}$ за r шагов. В контексте теории управления вполне понятна причина невозможности в общем случае решить задачу $X_r = \widehat{q}$: каждая система управления имеет свое множество достижимости и в бесконечномерном случае рассчитывать на полную управляемость не приходится.

Заметим теперь, что для (12) достаточно исследовать управляемость в линейном многообразии $T^{*r}M_2 = \{\widehat{q} = T^{*r}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p} \,|\, \widehat{p} \in M_2\}$ за r шагов. К сожалению, за исключением вырожденного случая конечномерности T^*, $T^{*r}M_2$ не является подпространством M_2. С ростом r не только расширяются возможности управляемой системы в смысле расширения множества достижимости ($D_{r+1}(0) = \{X_{r+1}\} \supseteq$

$D_r(0) = \{X_r\}$), но и само целевое множество $T^{*r}M_2$ "движется навстречу" ($T^{*r+1}M_2 \subseteq T^{*r}M_2$). Так что задача $S\widehat{K} = \widehat{q}$, не имеющая решения при фиксированном r, может оказаться разрешимой при увеличении r, т. е. при увеличении времени наблюдения за системой (1). Здесь возникает вопрос: при каких условиях на A_j, $A(\cdot)$, $\widehat{Q}$, G возможно при некотором r поглощение расширяющимся множеством достижимости $D_r(0)$ сужающегося целевого множества $T^{*r}M_2$? Если $D_r(0) \supseteq T^{*r}M_2$, то в оценках (9), (10) можно добиться $F_1 = 0$ и тогда значения $J = (\widehat{p}, \widehat{x}_{rh})_{M_2}$ определяются точно $\forall p \in M_2$. Но последнее означает возможность по измерениям (2) однозначно восстановить $\widehat{x}_{rh}$ и, следовательно, движение системы (1) для $t \geq rh$. Такое свойство называется полной наблюдаемостью. Различные критерии наблюдаемости систем с последействием представлены в обзоре [11].

В приложениях сверхусилия для решения бесконечномерной задачи полного поглощения $D_r(0) \supseteq T^{*r}M_2$ не всегда оправданы, поскольку модель (1), (2) приближенно описывает реальный процесс. Поэтому вернемся к задаче оценивания $J = (\widehat{p}, \widehat{x}_{rh})_{M_2}$. Оценка достаточного числа таких функционалов (коэффициентов Фурье) дает приближенное представление о $\widehat{x}_{rh}$.

Пусть r, $\widehat{p}$ фиксированы. Не рассчитывая на точное решение двухточечной задачи управления $X_1 = 0$, $X_r = \widehat{q}$ (тогда можно добиться $F_1 = 0$ и $J = I_* - \psi\ \forall \widehat{x}_0$), обратимся к задаче $||X_r - \widehat{q}||_Q \to \min$. Но и эта задача некорректна. Множество достижимости (12) описывается как линейная оболочка

$$\mathcal{L}\{T^{*r-1}\widehat{B}\widetilde{M_2}, \ldots, T^{*}\widehat{B}\widetilde{M_2}\}.$$

Эта "сумма поворачивающихся под действием T^* плоскостей" в бесконечномерном случае незамкнута, и проекции $\widehat{q}$ на $\mathcal{L}$ (в M_2 с $(\cdot,\cdot)_Q$), которая и определяла бы оптимальный $\widehat{K}$, может не существовать. Поэтому перейдем к построению субоптимального $\widehat{K}$. Приставка ґсубЄ требует расшифровки, и ниже будет уточнен ее смысл.

Воспользуемся идеологией метода динамического программирования Р. Беллмана. Пусть перед последним шагом управления система (12) оказалась в состоянии X^0_{r-1}, которое будем считать неизвестным параметром. Как выбрать оптимальное $\widehat{u}_{r-1}$? Очевидно, оно должно решать задачу

$$||X_r - \widehat{q}||_Q \to \min, \quad X_r = T^*X^0_{r-1} + T^*\widehat{B}\widehat{u}_{r-1}.$$

Отказываясь от решения (квазирешения) некорректной задачи

$$T^*\widehat{B}\widehat{u}_{r-1} = \widehat{q} - T^* X^0_{r-1} \quad (\widehat{B} = \widehat{Q}^{-1}G')$$

с параметром X^0_{r-1}, обратимся к "близкой" задаче:

$$\|X_r - \widehat{q}\|_Q \le \|T^*\| \cdot \|X^0_{r-1} + \widehat{B}\widehat{u}_{r-1} - T^{*r-1}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p}\|_Q \to \min . \tag{13}$$

Вместо целевой функции минимизируем ее верхнюю оценку. Новая задача по сути — конечномерная задача о наименьших квадратах. Она имеет, и притом единственное, решение

$$\widehat{u}^0_{r-1}(X^0_{r-1}) = \widehat{N}(T^{*r-1}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p} - X^0_{r-1}), \quad \widehat{N} = (G\widehat{Q}^{-1}G')^{-1}G. \tag{14}$$

Напомним, что в силу принятых обозначений, которые легко расшифровываются по контексту, запись

$$(G\widehat{Q}^{-1}G')^{-1}G\widehat{a} \quad \forall \widehat{a} = (a^0, a(\cdot)) \in M_2$$

означает

$$(GQ^{0^{-1}}G', GQ^{-1}(\cdot)G')^{-1}G\widehat{a} =$$

$$= ((GQ^{0^{-1}}G')^{-1}Ga^0, (GQ^{-1}(\cdot)G')^{-1}Ga(\cdot)) \in \widetilde{M}_2.$$

Подчеркнем, что $\widehat{u}^0_{r-1}$ пока найдена как функция $\widehat{u}^0_{r-1}(X^0_{r-1})$ от неизвестного заранее начального состояния (12) на последнем шаге.

После подстановки (14) в (13) получаем оптимальное значение оценки:

$$\begin{aligned} &\|T^*\| \cdot \|X^0_{r-1} + \widehat{B}\widehat{u}^0_{r-1}(X^0_{r-1}) - T^{*r-1}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p}\|_Q = \\ &= \|T^*\| \cdot \|\widehat{M}X^0_{r-1} - \widehat{M}T^{*r-1}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p}\|_Q, \\ &\widehat{M} = \widehat{E} - \widehat{B}\widehat{N}, \quad \widehat{E} = (E_n, E_n) \quad (\widehat{E}\widehat{a} = \widehat{a} \in M_2). \end{aligned} \tag{15}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\widehat{M}^2 = \widehat{M}$, $(\widehat{B}\widehat{N})^2 = \widehat{B}\widehat{N}$, т.е. $\widehat{M}$, $\widehat{B}\widehat{N}{:}M_2 \to M_2$ являются ортопроекторами ($\widehat{B}\widehat{N}$ — на $\widehat{B}\widetilde{M}_2$, $\widehat{M}$ — на $(\widehat{B}\widetilde{M}_2)^\perp \subset M_2$ в терминах $(\cdot,\cdot)_Q$). Нормы $\widehat{M}$, $\widehat{B}\widehat{N}$ как операторов равны единице. Поэтому (15) оценивается величиной

$$\|T^*\| \cdot \|X^0_{r-1} - T^{*r-1}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p}\|_Q =$$

$$= \|T^*\| \cdot \|T^*X^0_{r-2} + T^*\widehat{B}\widehat{u}^0_{r-2} - T^{*r-1}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p}\|_Q \le$$

$$\le \|T^*\|^2 \cdot \|X^0_{r-2} + \widehat{B}\widehat{u}^0_{r-2} - T^{*r-2}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p}\|_Q.$$

Совершенно аналогично (13), (14) оптимизируем последнюю оценку:

$$\widehat{u}^0_{r-2}(X^0_{r-2}) = \widehat{N}(T^{*r-2}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p} - X^0_{r-2}).$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\widehat{u}^0_i(X^0_i) = \widehat{N}(T^{*i}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p} - X^0_i), \quad i = \overline{1, r-1}.$$

Начинаем теперь двигаться в обратном направлении. Начальное состояние X^0_1 известно ($X^0_1 = 0$). Поэтому $\widehat{u}^0_1 = \widehat{N}T^*\widehat{Q}^{-1}\widehat{p}$ и

$$X^0_2 = T^*\widehat{B}\widehat{N}T^*\widehat{Q}^{-1}\widehat{p}.$$

Подставляя в $\widehat{u}^0_2(X^0_2)$ значение X^0_2, имеем $\widehat{u}^0_2 = \widehat{N}T^*\widehat{M}T^*\widehat{Q}^{-1}\widehat{p}$ и т. д. Окончательно:

$$X^0_1 = 0, \quad X^0_j = T^{*j}\widehat{s} - T^*\left(\widehat{M}T^*\right)^{j-1}\widehat{s}, \quad \widehat{s} = \widehat{Q}^{-1}\widehat{p},\, j = \overline{2, r},$$

$$\widehat{u}^0_1 = \widehat{k}^0_{r-1} = \widehat{N}T^*\widehat{s}, \quad \widehat{u}^0_j = \widehat{k}^0_{r-j} = \widehat{N}T^*(\widehat{M}T^*)^{j-1}\widehat{s}, j = \overline{2, r-1}.$$

Таким образом, стратегия оптимизации на каждом шаге оценок позволяет получить решение в явном виде. Операцию T^* на базе интегрирования сопряженной системы (7) с различными $\widehat{a}$ считаем относительно элементарной. Такая стратегия является приближенной (субоптимальной). Значение критерия оптимальности при этом равно

$$\triangle^0 = \|\widehat{q} - X^0_r\|_Q = \|T^*(\widehat{M}T^*)^{r-1}\widehat{s}\|_Q.$$

В частности, если $\triangle^0 = 0$, то значения $J = (\widehat{p}, \widehat{x}_{rh})_{M_2}$ при использовании J_1 с $\widehat{k}_j = \widehat{k}^0_j$ определяются точно ($F_1 = 0,\ J = I_* - \psi$, $\ell = 1$).

§ 3. Выбор интегрального оператора наблюдения на начальном отрезке времени

В заключение статьи перейдем к исследованию следующей задачи. Предположим, что появилась дополнительная возможность проводить измерения (2) и на начальном отрезке времени $[-h, 0]$. Пусть операция J_1 из (4) ($\ell = 1$) фиксирована. Например, выбором $\widehat{K}_1 = \widehat{K}^0_1$

$(\widehat{k}_{1j} = \widehat{k}_j^0)$ согласно стратегии §2. По результатам дополнительных измерений определим

$$J_2 = (\widehat{k}_0, \widehat{y}_0)_{\widetilde{M}_2} = k_0^{0\prime} y(0) + \int_{-h}^{0} k_0'(\tau) y(\tau)\, d\tau.$$

Рассмотрения §2 были ориентированы на неопределенность начальных данных $(\widehat{x}_0, \widehat{x}_0)_Q \le \bar{\kappa}^2$. Если же теперь имеется дополнительная информация $J_2 = \alpha_2$, то исходная неопределенность, образно говоря, сужается до сечения эллипсоида плоскостью. Направляющий вектор таких сечений, естественно, влияет на точность оценивания.

Аналитически задача формулируется следующим образом. Рассмотрим оценку (10) при $\ell = 2$ и фиксированном J_1 согласно (4). Как выбрать $\widehat{k}_0$ в функционале J_2 с целью $F_1 = F_1(\widehat{k}_0) \to \min$? В частности, это позволит минимизировать погрешность гарантированного оценивания $(|I - I_*| \le F_1 \bar{\kappa})$.

Обратимся к представлениям J, J_1, J_2 на начальных данных:

$$\begin{aligned}
&J = I - \psi, \quad J_1 = I_1 - \psi_1, \quad I = (\widehat{q}, \widehat{x}_0)_Q, \quad I_1 = (\widehat{q}_1, \widehat{x}_0)_Q,\\
&\widehat{q} = T^{*r} \widehat{Q}^{-1} \widehat{p}, \quad \widehat{q}_1 = \sum_{j=1}^{r-1} T^{*j} \widehat{B} \widehat{k}_{1j},\\
&J_2 = I_2(\widehat{q}_2, \widehat{x}_0)_Q, \quad \widehat{q}_2 = \widehat{B}\widehat{k}_0, \quad \widehat{B} = \widehat{Q}^{-1} G'.
\end{aligned}$$

Числа $\psi = \psi(u(\cdot))$, $\psi_1 = \psi_1(u(\cdot))$ не зависят от $\widehat{x}_0$, и без ограничения общности можно считать $\psi = \psi_1 = 0$ $(u(\cdot) = 0)$.

Предполагаем, что $\widehat{q}_2 \ne \widehat{q}_1\ \forall \widehat{k}_0$. Иначе задача $F_1 \to \min$ преобразуется в $\|\widehat{q} - \widehat{q}_2\|_Q \to \min$, откуда $\widehat{k}_0^0 = \widehat{N}\widehat{q}$. Обозначим $\widehat{q}_0 = \widehat{q}$, $q_{ij} = (\widehat{q}_i, \widehat{q}_j)_Q$ и будем отождествлять $\widehat{B}$, G с соответствующими операторами $\widetilde{M}_2 \to M_2$, $M_2 \to \widetilde{M}_2$

$$\widehat{B}\widehat{k}_0 = ({Q^0}^{-1} G' k_0^0, {Q^0(\cdot)}^{-1} G' k_0(\cdot)), \quad G\widehat{a} = (Ga^0, Ga(\cdot)).$$

В M_2 рассматриваем $(\cdot,\cdot)_Q$, и тогда $\widehat{B}^* = G$. Вычислим F_1^2:

$$\begin{aligned}
&F_1^2 = q_{00} + (2q_{01}q_{12}q_{02} - q_{02}^2 q_{11} - q_{01}^2 q_{22}) \times\\
&\times (q_{11}q_{22} - q_{12}^2)^{-1} = q_{00} - q_{01}^2 q_{11}^{-1} -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(q_{02}-q_{12}q_{01}q_{11}^{-1})^2(q_{22}-q_{12}^2q_{11}^{-1})^{-1}=\\
&=q_{00}-q_{01}^2q_{11}^{-1}-[(\widehat{q},\widehat{B}\widehat{k}_0)_Q-\\
&-(\widehat{q}_1,\widehat{B}\widehat{k}_0)_Qq_{01}q_{11}^{-1}]^2\cdot[(\widehat{B}\widehat{k}_0,\widehat{B}\widehat{k}_0)_Q-\\
&-q_{11}^{-1}(\widehat{q}_1,\widehat{B}\widehat{k}_0)_Q^2]^{-1}=q_{00}-q_{01}^2q_{11}^{-1}-\\
&-(\widehat{k}_0,G\widehat{q}-q_{01}q_{11}^{-1}G\widehat{q}_1)^2_{\widetilde{M}_2}\times\\
&\times[(G\widehat{B}\widehat{k}_0,\widehat{k}_0)_{\widetilde{M}_2}-q_{11}^{-1}(\widehat{k}_0,G\widehat{q}_1)^2_{\widetilde{M}_2}]^{-1}.
\end{aligned}
$$

От $\widehat{k}_0$ зависит только последнее слагаемое, причем значение F_1 не изменится при замене $\widehat{k}_0$ на $\mu\widehat{k}_0$, $\mu =$const$\neq 0$. Вводя новое скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_P=(\cdot,\widehat{P}\cdot)_{\widetilde{M}_2}$, $\widehat{P}=G\widehat{B}=G\widehat{Q}^{-1}G'$, приходим к задаче:

$$
(\widehat{k}_0,\widehat{a})_P^2[1-(\widehat{k}_0,\widehat{b})_P^2]^{-1}\to\max_{\widehat{k}_0\in\widetilde{M}_2},\quad(\widehat{k}_0,\widehat{k}_0)_P=1. \tag{16}
$$

Здесь $\widehat{a}$ — элемент единичной длины ($(\widehat{a},\widehat{a})_P=1$), полученный нормированием

$$
(G\widehat{Q}^{-1}G')^{-1}(G\widehat{q}-q_{01}q_{11}^{-1}G\widehat{q}_1)=\widehat{N}(\widehat{q}-q_{01}q_{11}^{-1}\widehat{q}_1).
$$

Длина вектора $\widehat{b}=q_{11}^{-1/2}(G\widehat{Q}^{-1}G')^{-1}G\widehat{q}_1=q_{11}^{-1/2}\widehat{N}\widehat{q}_1\in\widetilde{M}_2$ меньше единицы:

$$
(\widehat{b},\widehat{b})_P=q_{11}^{-1}(\widehat{N}\widehat{q}_1,G\widehat{q}_1)_{\widetilde{M}_2}=q_{11}^{-1}(\widehat{B}\widehat{N}\widehat{q}_1,\widehat{q}_1)_Q<1.
$$

Последнее неравенство справедливо в силу $\widehat{q}_1\notin\widehat{B}\widetilde{M}_2$ и $(\widehat{B}\widehat{N})^2=\widehat{B}\widehat{N}$ ($\widehat{B}\widehat{N}$– ортопроектор на $\widehat{B}\widetilde{M}_2$ в терминах $(\cdot,\cdot)_Q$).

Оптимальный элемент $\widehat{k}_0$ следует искать в виде линейной комбинации $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, так как ненулевая ортогональная составляющая лишь уменьшит дробь в (16). Отобразим плоскость элементов $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_P$ на R^2. Совместим $\widehat{a}$ с ортом e_1, а вектор $\widehat{b}$ длины $(\widehat{b},\widehat{b})_P^{1/2}<1$ повернем относительно e_1 против часовой стрелки на угол $\sigma\in[0,\pi/2]$, $\cos\sigma=|(\widehat{a},\widehat{b})_P|$ (замена $\widehat{b}$ на $-\widehat{b}$ задачу (16) не меняет). Если $\widehat{k}_0$– решение (16), то и $-\widehat{k}_0$ тоже решение. Элемент

$\widehat{k}_0$ ищется с точностью до постоянного множителя. Поэтому достаточно искать вектор $\widehat{k}_0$ единичной длины, составляющий с $\widehat{b}$ угол $\beta \in [-\sigma, \pi - \sigma]$. В силу (16) этот угол определяется из условий

$$f(\beta) = \cos^2(\sigma + \beta)(1 - \xi \cos^2 \beta)^{-1} \to \max_{\beta}, \quad \xi = (\widehat{b}, \widehat{b})_P < 1.$$

Поскольку $f(-\sigma) = f(\pi - \sigma) \geq f(\beta)$ для $\beta \in [\sigma, \pi - \sigma]$, то максимум следует искать на отрезке $[-\sigma, \sigma]$, $\sigma \in [0, \pi/2]$. Если $\sigma = \pi/2$ $((\widehat{a}, \widehat{b})_P = 0)$, то $\beta = \pi/2$ и оптимальный элемент пропорционален $\widehat{a}$. В остальных случаях:

$$f(\sigma) < f(-\sigma), \quad f'(-\sigma) > 0, \quad f' = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_0 = \arg \max_{[-\sigma,\sigma]} f(\beta) = \mathrm{arctg}((\xi - 1)\mathrm{tg}\sigma) \in (-\sigma, 0).$$

По β_0 определяется вектор $\widehat{k}_0$ и соответствующий ему оптимальный элемент $\widehat{k}_0 \in \widetilde{M}_2$.

Решение такой задачи может пригодиться в следующей ситуации. Пусть нас интересует "$\widehat{p}$-я координата" $J = (\widehat{p}, \widehat{x}_t)_{M_2}$ фазового вектора и алгоритм определения ее возможных значений для $t = rh$ по наблюдениям на $[0, (r-1)h]$ не гарантирует необходимую точность оценивания. Увеличим r $(r \to r + 1)$. Рационально использовать на $[h, rh]$ уже построенную операцию обработки измерений, а на $[0, h]$ добавить новый функционал с оптимальным весовым элементом $\widehat{k}_0$.

Résumé

Dynamical time-delay system with uncertain initial data is considered. Algorithm of estimation of funcyionals on system's solutions by measurement's results is proved. Optimal weight functions in integral observation operators, that minimize garanteed estimation, are constracted approximately with the help of the dynamic programming method.

Литература

[1] Куржанский А. Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности* М.: Наука, 1977. 393 с.

[2] Куржанский А. Б. *Гарантированное оценивание распределенных процессов по результатам наблюдений*// Вестник МГУ. Серия 15. Выч. мат. и киберн. 1995. Ґ 1. С. 33–40.

[3] Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. *Control under Lack of Information.* Birkhauser, 1995. 320 p.

[4] Кирин Н. Е., Исраилов И., Отакулов С. *Задачи и методы оценивания управляемых систем.* Ташкент: Фан, 1993. 229 с.

[5] Заика Ю. В. *Оценивание функционалов на решениях возмущаемых систем с запаздыванием по неполной обратной связи*// Известия РАН. Теория и системы управления. 1995. Ґ 1. С. 99–108.

[6] Заика Ю. В. *Оценивание функционалов на решениях возмущаемых систем с запаздыванием* // Вопросы мех. и проц. управл. Вып. 17. 1996. С.-Петербург: Изд-во С.-Петербург. ун-та. С. 67–78.

[7] Заика Ю. В., Кручек М. М. *Среднеквадратичная оценка функционалов на решениях систем с запаздыванием и случайными возмущениями*// Труды Петрозаводского ун-та. Серия математика. Вып. 2. 1995. С. 19–30.

[8] Колмановский В. Б., Носов В. Р. *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием* М.: Наука, 1981. 448 с.

[9] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений* М.: Мир, 1984. 421 с.

[10] Жидков Н. П. *Линейные аппроксимации функционалов* М.: Изд-во МГУ, 1977. 262 с.

[11] Гринберг А. С., Лотоцкий В. А., Шкляр Б. Ш. *Управляемость и наблюдаемость динамических систем*// Автоматика и телемех. 1991. Ґ 1. С. 3–21.