Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 4, 1997

УДК 515

ПРОСТЕЙШИЙ ПРИМЕР ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО НЕ НОРМАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

К. В. Матюшичев

Плоскость Немыцкого, плоскость Тихонова, произведение стрелок — все эти примеры вполне регулярных не нормальных пространств хорошо известны. В данной заметке представлен пример подобного пространства, сочетающий в себе краткость, ясность и наглядность — самый простой из известных автору.

I. Описание пространства Z

Положим $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} \setminus \{(0,0)\}$. Топология вводится в Z заданием системы окрестностей:

1) все точки (x,y), $x > 0, y > 0$, объявляются изолированными;

2) окрестностью точки $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$, объявляется всякое множество вида $(R_{(x_0,0)} \setminus K) \cup \{(x_0,0)\}$, где $R_{(x_0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0, y \geq 0\}$, а $|K| < \aleph_0$. Аналогично для точек $(0,y), y \geq 0$.

Проверка аксиом системы окрестностей тривиальна.

II. Полная регулярность Z

Z, являясь, очевидно, T_1-пространством, вполне регулярно, так как все окрестности из п. I открыто-замкнуты.

III. Отсутствие нормальности в Z

Действительно, рассмотрим (очевидно, замкнутые) множества $X = \{(x,y) \in Z : y = 0\}$ и $Y = \{(x,y) \in Z : x = 0\}$. Пусть U, V открыты в Z и $X \subseteq U, Y \subseteq V$. Для любого натурального n найдется конечное множество K_n такое, что $R_{(0,n)} \setminus K_n \subseteq V$. Существует $x > 0$, отличное от абсциссы произвольной точки из $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_n$. Тогда любая окрестность точки $(x,0)$ пересекает V и $U \cap V \neq 0$, ч. и т. д.

IV. Замечания

1. Другие примеры подобных пространств см. в [1, 2, 3, 4, 5, 6]. В неявном виде данный выше пример содержится в [6].

2. Столь же просто можно доказать следующий факт: для любой непрерывной вещественной функции f на Z найдется $A \subseteq X \cup Y, |A| \leq \aleph_0$ такое, что f постоянна на $(X \cup Y) \setminus A$.

3. Из 2 следует, что если $f(X) = \{0\}$, то $f(Y \setminus A) = \{0\}$, где $|A| \leq \aleph_0$. Теперь легко чуть-чуть изменить конструкцию Z и получить пространство $\tilde{Z}$, содержащее замкнутые множества X_n (все — мощности континуума), $n \in \mathbb{N}$, такие, что непрерывная функция, равная нулю на X_1, равна нулю и на $X_n \setminus A_n$, где $|A_n| \leq \aleph_0, n \in \mathbb{N}$. Добавив к $\tilde{Z}$ точку и задав подходящим образом ее окрестности (так, чтобы любая из этих окрестностей содержала X_n для некоторых n), легко получить регулярное, но не вполне регулярное пространство. По этому поводу см. [7].

Résumé

Still another example of a completely regular nonnormal space is given. This one is marked by brevity, clarity and graphic representation, which may be of some interest to those who teach general topology to students.

References

[1] Александров П. С. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* М.: Наука, 1977. 368 с.

[2] Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. *Общая топология.* М.: Высшая школа, 1979. 336 с.

[3] Архангельский А. В., Пономарев В. И. *Основы общей топологии в задачах и упражнениях.* М.: Наука, 1974. 424 с.

[4] Келли Дж. Л. *Общая топология.* М.: Наука. 1968. 384 с.

[5] Федорчук В. В., Филиппов В. В. *Общая топология. Основные конструкции.* М.: Изд-во МГУ, 1988. 252 с.

[6] Энгелькинг Р. *Общая топология.* М.: Мир, 1986. 752 с.

[7] Mysior A. *A regular space which is not completely regular*// Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81. No 3. P. 852-853