Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 5, 1998

УДК 517.54

ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СЕМЕЙСТВА

Я. Годуля, В. В. Старков

Введение

В этом обзоре мы попытались описать результаты, полученные к настоящему времени, по линейно-инвариантным семействам функций. В главе 1 речь пойдет об аналитических локально однолистных в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функциях $f(z) = z + \dots$. Термин линейной инвариантности семейства $\mathfrak{M}$ введен Ch. Pommerenke [1] в 1964 году и означает, что наряду с каждой функцией $f \in \mathfrak{M}$ этому семейству принадлежит и функция

$$\frac{f(\phi(z)) - f(\phi(0))}{f'(\phi(0))\phi'(0)} = z + \cdots$$

при любом конформном автоморфизме $\phi(z)$ круга Δ. Интерес к линейно-инвариантным семействам вызван тем, что многие известные классы конформных отображений являются линейно-инвариантными семействами и обладают рядом свойств, общих для всех таких семейств. С другой стороны, введение универсальных линейно-инвариантных семейств $\mathcal{U}_\alpha$ (см. определение 1.3) позволило с общих позиций изучать свойства всех локально однолистных в Δ функций конечного порядка. Идея использования линейной инвариантности различных классов функций не нова, ее применял еще L. Bieberbach [2] при доказательстве теоремы искажения в классе однолистных функций. Однако в работах Ch. Pommerenke [1], [3] эта идея была поставлена во главу угла.

© Я. Годуля, В. В. Старков, 1997

В этой статье мы нигде не приводим доказательств утверждений и почти не говорим о методах, которыми они получены. Следует сказать, что здесь и не существует достаточно универсальных методов (как, например, в классе однолистных функций). Наша цель — собрать и систематизировать результаты, установить связь между ними. В частности, в главе 1 в §7, п. $2^0, 3^0$ обсуждаются результаты, вытекающие из связи между семействами $\mathcal{U}_\alpha$ и классом Блоха $\mathcal{B}$.

В главе 2, §8, п. 1^0 понятие линейной инвариантности переносится на функции, аналитические в области. В §9 говорится о линейно-инвариантных семействах функций, аналитических в поликруге; устанавливается их связь с классом Блоха. В §10 определяются и изучаются линейно-инвариантные семейства гармонических в Δ функций.

Некоторые параграфы разбиты на пункты соответственно более узким обсуждаемым в них вопросам.

Глава 1. Линейно-инвариантные семейства аналитических в круге функций

§ 1. Основные определения и общие вопросы

1^0. Понятие линейно-инвариантных семейств дано Ch. Pommerenke [1] с целью обобщения теории однолистных функций и переноса некоторых свойств однолистных функций на более широкие классы аналитических в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций. Обозначим $\mathfrak{L}$ множество всех конформных автоморфизмов $\phi(z) = e^{i\theta}\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$, $a \in \Delta, \theta \in \mathbb{R}$, единичного круга Δ .

Определение 1.1.[1]. *Множество $\mathfrak{M}$ аналитических в Δ функций $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(f) z^n$ называется ¤- ¤¤ (.-..), если для любой $f \in \mathfrak{M}$ выполнены 2 условия:*

1) $f'(z) \neq 0$ *для каждого* $z \in \Delta$ *(локальная однолистность);*

2) *для любого* $\phi \in \mathfrak{L}$

$$\Lambda[f(z)] = \frac{f(\phi(z)) - f(\phi(0))}{f'(\phi(0))\phi'(0)} = z + \cdots \in \mathfrak{M}. \tag{1.1}$$

Многие свойства л.-и.с. зависят от порядка этого семейства.

Определение 1.2.[1]. ***Ё***— *л.-и.с.* $\mathfrak{M}$ *называется число*

$$\text{ord } \mathfrak{M} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |a_2(f)|.$$

Пусть $f(z) = z + \cdots$ локально однолистна и аналитична в Δ; *порядком функции* $f(z)$ называется число

$$\text{ord } f = \text{ord } \mathfrak{M}[f],$$

где $\mathfrak{M}[f] = \{\Lambda_\phi[f(z)] : \phi \in \mathfrak{L}\}$ — л.-и.с., порожденное функцией f.

Определение 1.3.[1]. **є¤ -..** — α *называется объединение всех л.-и.с.* $\mathfrak{M}$, *для которых* ord $\mathfrak{M} \le \alpha$, *оно обозначается* $\mathcal{U}_\alpha$.

ПРИМЕРЫ линейно-инвариантных семейств.

a) Семейство LS всех аналитических и локально однолистных в Δ функций $f(z) = z + \cdots$.

b) Семейство $\mathfrak{S} \subset LS$ однолистных в Δ функций; ord $\mathfrak{S} = 2$ [2].

c) Семейство $C \subset \mathfrak{S}$ близких к выпуклым функциям [4]; ord $C = 2$ [5],[6].

d) Семейство $\mathcal{K} \subset \mathfrak{S}$ выпуклых функций (функций из $\mathfrak{S}$, для которых $f(\Delta)$ — выпуклая область; ord $\mathcal{K} = 1$ (см., например, [7, с.202])).

e) Семейство $\mathfrak{S}_p \subset LS$ функций, принимающих каждое значение в Δ не более p раз (p — натуральное).

f) Семейство $\mathfrak{G} \subset LS$ функций, отображающих Δ на универсальные накрывающие поверхности плоских областей.

g) Класс V_k функций с ограниченным граничным вращением ord $V_k = \frac{k}{2}$; классы функций, имеющих интегральное представление с комплексной мерой $\mathcal{U}^*_\alpha$, ord $\mathcal{U}^*_\alpha = \alpha$ [9] и $\mathcal{U}'_\alpha$, ord $\mathcal{U}'_\alpha = \alpha$ [10],[11]. Семейство $\mathcal{U}'_\alpha$ играет важную роль при исследовании экстремальных задач в $\mathcal{U}_\alpha$ (см. в §2: о $\max_{f \in \mathcal{U}_\alpha} |a_3(f)|$ и о точности оценки в теореме вращения в $\mathcal{U}_\alpha$). О классах V_k, $\mathcal{U}'_\alpha$ и $\mathcal{U}^*_\alpha$ см. в §6.

h) $\mathcal{U}_\alpha$, ord $\mathcal{U}_\alpha = \alpha$.

Далее будем рассматривать л.-и.с. $\mathfrak{M}$ только конечного порядка; это равносильно тому, что $\mathfrak{M}$ — нормальное семейство [1]. На множестве всех аналитических в Δ функций можно ввести метрику $\rho(f,g) = \max_{|z|=\frac{1}{2}} |f(z)-g(z)|$. Если $\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \alpha$, то и замыкание $\overline{\mathfrak{M}}$ этого семейства имеет порядок α и образует полное метрическое пространство.

2^0. Семейство LS является слишком широким. Поэтому для получения интересных свойств л.-и.с. на них накладываются дополнительные ограничения и прежде всего ограничения на $\operatorname{ord}\mathfrak{M}$. В связи с этим важной является следующая

Теорема 1.1. [1]. *Для л.-и.с. $\mathfrak{M}$*

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \sup_{f\in\mathfrak{M}}\sup_{z\in\Delta}\left|-\bar z + \frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|.$$

Для $f\in LS$

$$\operatorname{ord} f = \sup_{z\in\Delta}\left|-\bar z + \frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|.$$

Важнейшими л.-и.с. являются $\mathcal{U}_\alpha$. В [1] получены следующие свойства $\mathcal{U}_\alpha$.

Теорема 1.2. *$\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$ при $\alpha<1$, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{K}$ (класс выпуклых функций), $\mathcal{U}_\alpha = \{f\in LS:\ \operatorname{ord} f\le\alpha\}$. Кроме того, для любых функций $f_0, f_1\in\mathcal{U}_\alpha$ и любых $\lambda\in[0,1]$ функция*

$$\int_0^z (f_0'(s))^{1-\lambda}(f_1'(s))^{\lambda}\,ds\in\mathcal{U}_\alpha.$$

В [12] даны следующие эквивалентные определения $\mathcal{U}_\alpha$.

Обозначим $\mathfrak{M}'_\alpha$ — наибольшее л.-и.с., функции f которого удовлетворяют неравенству

$$|f'(z)|\le\frac{(1+|z|)^{\alpha-1}}{(1-|z|)^{\alpha+1}}$$

в некоторой окрестности нуля $\{z:\ |z|<\varepsilon_f(<1)\}$; $\mathcal{I}_\alpha$ — множество всех комплекснозначных функций $\mu(t)$ ограниченной вариации на $[0,2\pi)$ и таких, что $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1$ и $\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+a}{1+\bar a e^{it}}d\mu(t)\right|\le\alpha$ для всех $a\in\Delta$;

$$\mathfrak{M}_\alpha = \left\{f(z) = \int_0^z \exp\left[-2\int_0^{2\pi}\log(1-se^{it})\,d\mu(t)\right]ds:\quad \mu\in\mathcal{I}_\alpha\right\}.$$

$\overline{\mathfrak{M}_\alpha}$ — замыкание $\mathfrak{M}_\alpha$ в топологии равномерной сходимости внутри Δ.

Теорема 1.3. $\mathfrak{M}'_\alpha = \overline{\mathfrak{M}_\alpha} = \mathcal{U}_\alpha$.

В некоторых задачах в $\mathcal{U}_\alpha$ важно знать, как зависит от $r \in (0,1]$ порядок функции $f_r(z) = \frac{f(rz)}{r}$. D. M. Campbell [13] доказал такую теорему

Теорема 1.4. *Если* ord $f = \alpha$, *то* ord f_r — *непрерывно возрастающая функция на* $(0,1]$. *Более того,* ord f_r *строго возрастает при* r, *больших радиуса выпуклости функции* f *и*

$$\operatorname{ord} f_r \le (\alpha - 1)r + 1. \tag{1.2}$$

Отсюда следует инвариантность $\mathcal{U}_\alpha$ относительно преобразования сжатия, т. е. $f_r \in \mathcal{U}_\alpha$, если $f \in \mathcal{U}_\alpha$ и $r \in (0,1]$. D. M. Campbell также использовал (1.2) для оценки $\mathcal{U}_\beta$ — радиуса семейства $\mathcal{U}_\alpha$ (см. §2). Нами получена [125] точная оценка ord f_r для каждого $r \in (0,1]$:

$$\operatorname{ord} f_r \le \begin{cases} 1, & r \in (0, \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}], \\ \frac{1}{2}(\tau + \frac{1}{\tau}), & r \in [\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}, 1], \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\tau = r(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$.

Определение 1.4. *Семейство* $\mathfrak{M}$ *аналитических в* Δ *функций* — ¤ ¤, *если существует постоянная* K *такая, что*

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta}| \, d\theta \le K \quad \text{для всех} \quad r \in [0,1) \text{ и всех} \quad f \in \mathfrak{M}. \tag{1.4}$$

Каждое семейство аналитических функций ограниченной характеристики — нормальное, обратное неверно.

Далее будем обозначать $\mathfrak{B}$ множество всех аналитических и однолистных в Δ функций ϕ таких, что $|\phi(z)| < 1$. Очевидно, $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{B}$. Расширим множество операторов $\Lambda_\phi[f]$, $\phi\mathfrak{L}$ (см. (1.1)), допуская возможность $\phi \in \mathfrak{B}$. Для данного л.-и.с. $\mathfrak{M}$ обозначим

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\mathfrak{M}) = \{\Lambda_\phi[f(z)] = \frac{f(\phi(z)) - f(\phi(0))}{f'(\phi(0)\phi'(0)} = z + \cdots : \ f \in \mathfrak{M}, \ \phi \in \mathfrak{B}\}.$$

Если $g \in \mathfrak{N}$, $\phi \in \mathfrak{B}$, то $\Lambda_\phi[g] \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

Теорема 1.5. [1]. *Если* $\mathfrak{M}$ — *л.-и.с. порядка* α, *то* $\mathfrak{N}$ — *л.-и.с. порядка* $\max(\alpha, 2)$; *причем если* $\mathfrak{M}$ — *ограниченной характеристики, то и* $\mathfrak{N}$ — *ограниченной характеристики.*

Отсюда, в частности, следует, что $\mathcal{U}_\alpha = \mathfrak{N}(\mathcal{U}_\alpha)$ при $\alpha \geq 2$.

Поскольку и $\sup\limits_{z\in\Delta}\left|\dfrac{1-|z|^2}{2}\dfrac{f''(z)}{f'(z)} - \bar{z}\right| = \operatorname{ord} f$, и $\sup\limits_{z\in\Delta}[(1-|z|^2)^2 \quad \{f(z), z\}] = \sigma_f$ (здесь $\{f(z), z\} = \dfrac{f'''(z)}{f'(z)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$ — производная Шварца) являются инвариантами относительно преобразования (1.1), то интересно знать, каково соотношение между ними. Для всех $f \in \mathcal{U}_\alpha$ Ch. Pommerenke [1] получил точную оценку: $\alpha \leq \sqrt{1+\sigma_f/2}$. Обозначим $\sigma = \sup\limits_{f\in\mathcal{U}_\alpha} \sigma_f$; из полученного в [14] неравенства следует, что $\alpha \leq \sqrt{\sigma/2}$.

3^0. Пусть $f \in LS$, будем обозначать $F = F_f = f(\Delta)$ риманову поверхность, на которую f однолистно отображает Δ.

Обозначим $d_f(z)$ радиус наибольшего однолистного круга с центром в $f(z)$, лежащего на поверхности F_f. Пусть V — кривая на F, diam V — диаметр проекции кривой на плоскость $\mathbb{C}$, $l(V) = \int_V \, |dw|$ — длина проекции кривой V в предположении, что $l(V)$ существует. Пусть $w_1, w_2 \in F$, обозначим

$$d(w_1, w_2) = d_F(w_1, w_2) = \inf_V \operatorname{diam} V,$$

$$l(w_1, w_2) = l_F(w_1, w_2) = \inf_V l(V),$$

где V — всевозможные кривые на F, связывающие w_1 и w_2. d и l — метрики на F. Очевидно,

$$|w_1 - w_2| \leq d(w_1, w_2) \leq l(w_1, w_2) \qquad \forall w_1, w_2 \in F;$$

$$d_f(z_1) \leq d(f(z_1), f(z_2)) + d_f(z_2) \qquad \forall z_1, z_2 \in \Delta.$$

Неевклидовым сегментом между точками $z_1, z_2 \in \Delta$ называется замкнутая дуга окружности, ортогональной $\partial\Delta$ и соединяющей z_1 с z_2.

Ch. Pommerenke [1] получил ряд утверждений об образах неевклидовых сегментов S при отображениях функциями из л.-и. с. ограниченной характеристики.

Теорема 1.6. [1, с. 135].. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *л.-и. с. ограниченной характеристики. Тогда существует постоянная* $K = K(\mathfrak{M})$, *обладающая* *следующим свойством: если $z_1, z_2 \in \Delta$ и S — неевклидовый сегмент между z_1 и z_2, то для любой функции $f \in \mathfrak{M}$*

$$d(f(z_1), f(z_2)) \le \mathrm{diam}\, f(S) \le K d(f(z_1), f(z_2)),$$

$$l(f(z_1), f(z_2)) \le \int_S |f'(z)|\, dz \le K l(f(z_1), f(z_2)). \tag{1.5}$$

Левые части неравенств здесь следуют из определения d и l. Таким образом, среди всех кривых, соединяющих на F_f две точки, образ неевклидова сегмента имеет диаметр (длину) одного порядка с инфимумом диаметров (длин) по всем таким кривым. В классе $\mathfrak{S}$ (1.5) было доказано в [15]. Теорема 1.6 может быть обобщена на случай $z_1, z_2 \in \bar{\Delta} = \{z: \ |z| \le 1\}$ [1, с.136]. При этом если одна из точек z_1 или z_2 лежит на $\partial\Delta$, то выражения в неравенствах теоремы 1.6 надо понимать как пределы. Например, если $z_1 \in \Delta$, $z_2 \in \partial\Delta$ и C — соединяющая их кривая из Δ, то $\mathrm{diam}\, f(C) = \lim\limits_{C \ni \zeta \to z_2} \mathrm{diam}\, f(C_\zeta)$, где C_ζ — часть C между z_1 и z_2.

Теорема 1.7. [1, с. 137]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и. с. ограниченной характеристики и пусть $0 < \beta < 2\pi$. Тогда существует постоянная $K(\beta) = K(\beta, \mathfrak{M}) < \infty$ такая, что для любой аналитической в $\bar{\Delta}$ функции $f \in \mathfrak{M}$ выполняются неравенства*

$$\mathrm{diam}\, \{f(x): \ 0 \le x \le 1\} \le K(\beta) \mathrm{diam}\, \{f(e^{i\theta}): \ 0 \le \theta \le \beta\},$$

$$\int_0^1 |f'(x)|\, dx \le K(\beta) \int_0^\beta |f'(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

Теорема 1.8. [1, с. 147]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и. с. ограниченной характеристики, $f \in \mathfrak{M}$. Поперечное сечение J (см. §5, 1^0) римановой поверхности F разбивает F на две связные компоненты F_0 и F_1. Если $z_1, z_2 \in \Delta$ выбраны так, что $f(z_1), f(z_2) \in F_0$, а S — неевклидовый сегмент между z_1 и z_2, причем существует точка $z \in S$, в которой $f(z) \in F_1$, то*

$$\inf_{\omega \in J} d(\omega, f(z)) \le K_0 \min(\mathrm{diam}\, J, d_f(z)),$$

где K_0 зависит только от $\mathfrak{M}$.

Таким образом, если концевые точки $f(S)$ лежат в F_0, то $f(S)$ "не очень глубоко" проникает в F_1. А именно, глубина проникновения в F_1 точек из $f(S)$ тем меньше, чем ближе точка к границе F.

Ch. Pommerenke [1, с. 148] замечает, что если в этой теореме J — дуга окружности с центром в 0, радиусом ρ и центральным углом t, а F_1 не содержит точек, имеющих проекцию 0 на плоскости $\mathbb{C}$, то для всех $z \in S$ таких, что $f(z) \in F_1$, выполняется неравенство

$$\rho e^{-Kt} < |f(z)| < \rho e^{Kt}$$

с некоторой константой $K = K(\mathfrak{M})$.

Пусть $z_0 \in \Delta$, E — измеримое множество на $\partial\Delta$, функция $z^* = \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$ отображает E на множество $E^* \subset \partial\Delta$. Мера Лебега E^* называется *гармонической мерой* E в z_0.

Справедлива следующая

Теорема 1.9. [1, с. 143]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и. с. ограниченной характеристики и пусть $0 < \lambda < 2\pi$. Тогда существует постоянная $K(\lambda, \mathfrak{M})$ такая, что для любых $f \in \mathfrak{M}$, $z_0 \in \Delta$ и любой дуги L окружности $\partial\Delta$ с гармонической мерой λ в z_0 существует такой неевклидовый сегмент S, связывающий z_0 с точкой из L, что*

$$\int_S |f'(z)|\, dz \le K(\lambda) d_f(z_0).$$

Таким образом, расстояние $d_f(z_0)$ от $f(z_0)$ до границы римановой поверхности F_f одного порядка с длиной кривой $f(S)$, связывающей $f(z_0)$ с некоторой граничной точкой F_f. Оценка такого рода для однолистных функций получена М. Лаврентьевым [16]. Теорема 1.9 допускает обобщение на случай произвольного измеримого множества $L \subset \partial\Delta$, если в левой части неравенства вместо длины $f(S)$ записать диаметр $f(S)$.

Теорема 1.10. [1, с. 145]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и. с. ограниченной характеристики и $0 < \lambda \le 2\pi$, $f \in \mathfrak{M}$, $z_0 \in \Delta$ и $L \subset \partial\Delta$ — измеримое множество, гармоническая мера которого в z_0 равна λ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset L$ с гармонической мерой в z_0, не меньшей $\lambda - \varepsilon$, такое, что для любого неевклидова сегмента S, связывающего z_0 с произвольной точкой множества E*

$$\operatorname{diam} f(S) \le K(\mathfrak{M}, \varepsilon) d_f(z_0),$$

где $K(\mathfrak{M}, \varepsilon)$ зависит только от $\mathfrak{M}$ и ε.

Следствие1.1. [1, с. 146]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и. с. ограниченной характеристики и $0 < \varepsilon < 2\pi$, и пусть для некоторой функции $f \in \mathfrak{M}$*

сферическая площадь F_f конечна, т. е.

$$\Omega = \int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{|f'(re^{i\theta})|}{1+|f(re^{i\theta})|^2} \right)^2 d\theta < \infty. \tag{1.6}$$

Тогда существует такое множество $E \subset \partial\Delta$ с мерой Лебега $\geq 2\pi - \varepsilon$, что

$$\int_0^1 |f'(re^{i\theta})|^2 r\,dr \leq K(\varepsilon, \mathfrak{M}) \cdot \Omega \qquad \forall e^{i\theta} \in E.$$

Для функций класса $\mathfrak{S}$ это утверждение доказано в несколько ослабленном варианте в [16]; для $f \in \mathfrak{S}$ условие (1.6) выполнено всегда и $\Omega \leq 4\pi$.

Из следствия 1.1 получаем, что если для функции $f \in \mathfrak{M}$ выполнено (1.6), то для почти всех θ

$$\int_0^1 |f'(re^{i\theta})|^2\,dr < \infty.$$

Для нормальных л.-и. с. $\mathfrak{M}$ Ch. Pommerenke [1, лемма 2.3] доказал, что если для $f \in \mathfrak{M}$

$$\int_0^1 |f'(re^{i\theta})|^\lambda\,dr < \infty$$

при некотором $\lambda \in (0, \infty)$, то $f'(z) = o((1-|z|)^{-\frac{1}{\lambda}})$ для $z \to e^{i\theta}$ в любом угле Штольца с вершиной $e^{i\theta}$. Отсюда при выполнении условий следствия 1.1 получаем для п.в. θ:

$$f'(z) = o((1-|z|)^{-\frac{1}{2}})$$

при $z \to e^{i\theta}$ в угле Штольца. Для однолистных функций это доказали W. Seidel и J. L. Walsh [17].

Если для функции выполнено (1.4), то [7, с. 383] для п.в. θ существует конечный $\lim\limits_{z\to e^{i\theta}} f(z)$ в угле Штольца. Если для функции f из нормального семейства $\mathfrak{M}$ предположить существование конечного радиального предела $\lim\limits_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$, то можно получить следующее утверждение.

Теорема 1.11. [1, с.146]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и. с., $f \in \mathfrak{M}$. Если $f(re^{i\theta})$ стремится к конечному пределу при $r \to 1^-$, то для $z \to e^{i\theta}$ в угле Штольца*

$$f'(z) = o\left(\frac{1}{1-|z|}\right). \tag{1.7}$$

В связи с вопросами граничного поведения f' необходимо еще привести следующий результат Макарова [126], полученный им для класса Блоха $\mathcal{B}$, но формулируемый нами для $\mathcal{U}_\alpha$ благодаря связям (4.5), (4.6) класса Блоха с линейно-инвариантными семействами.

Теорема 1.12. *Если $f \in \mathcal{U}_\alpha$, то для почти всех $\theta \in \mathbb{R}$*

$$\lim \sup_{r \to 1^{-1}} |f'(re^{i\theta})| \exp\left\{\sqrt{\frac{\log\log(-\log(1-r)}{-\log(1-r)}}\log(1-r)\right\} \le e^{2(\operatorname{ord} f+1)}.$$

4^0. Для исследования граничных свойств л.-и. с. важна

Теорема 1.13. [1, с. 141]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и. с. ограниченной характеристики, $\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \alpha$. Тогда существует постоянная $\kappa(\mathfrak{M}) > 0$ такая, что для любой функции $f \in \mathfrak{M}$ и любых $z_1, z_2 \in \Delta$*

$$d(f(z_1), f(z_2)) \ge \kappa(\mathfrak{M})|z_1 - z_2|^\alpha;$$

для каждого поперечного сечения Q круга Δ, отделяющего 0 от z_1 и z_2, выполняется неравенство

$$\operatorname{diam} f(Q) \ge \kappa(\mathfrak{M})|z_1 - z_2|^\alpha.$$

Для функций $f \in \mathfrak{S}$ (тогда $\alpha = 2$) эти неравенства были получены М. Лаврентьевым [18, часть 1, с.21]. В неравенствах из теоремы 1.12 показатель степени α уменьшить, вообще говоря, нельзя. Это ясно из примера функции

$$k_0(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right] \in \mathcal{U}_\alpha;$$

$z_1 = \delta - 1,\ z_2 = 2\delta - 1,\ \delta \to 0^+$; $k_0 \in \mathfrak{S}_p$ при некотором натуральном p, поэтому (см. [1, с. 119]) эта функция удовлетворяет (1.4).

§ 2. Экстремальные задачи в линейно-инвариантных семействах конечного порядка

1^0. Экстремальные задачи в классах конформных отображений занимают важное место в теории однолистных и локально однолистных функций. Традиционными здесь являются задачи об оценке при фиксированном z_0 функционалов $|f^{(n)}(z_0)|$ (теоремы искажения), $\arg \dfrac{f(z_0)}{z_0}$ или $\arg f'(z_0)$ (теоремы вращения), оценке коэффициентов. Сначала сформулируем утверждения для функционалов общего вида. Обозначим $\mathfrak{A}$ нормированное пространство всех аналитических в Δ функций $f(z)$; $\|f\| = \max\limits_{|z|=\frac{1}{2}} |f(z)|$.

Теорема 2.1. [19]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — дифференцируемый по Фреше (см. [20, с. 469]) функционал на $\mathfrak{A}$, L_h — его дифференциал в $h \in \mathfrak{A}$. Если f_0 — экстремальная функция в задаче* $\max\limits_{f\in\mathcal{U}_\alpha} \mathrm{Re}\,\{\mathfrak{F}(f^{(n)})\}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, *и существует целое неотрицательное $k \geq 2 - n$ такое, что $L_{f_0^{(n)}}(z^k) \neq 0$, то* $\mathrm{ord}\, f_0 = \alpha$.

Теорема 2.2. [19]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — дифференцируемый по Фреше функционал на $\mathfrak{A}$. Если для граничной точки $\mathfrak{F}(f_0^{(n)})$ области значений $W_n = \{\mathfrak{F}(f(n)) : f \in \mathcal{U}_\alpha\}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, существует такая точка $\xi \notin W_n$, что $|\mathfrak{F}(f_0^{(n)}) - \xi| = \min_{f\in\mathcal{U}_\alpha} |F(f^{(n)}) - \xi|$ и дифференциал $L_{f_0^{(n)}}$ функционала $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию теоремы 2.1, то* $\mathrm{ord}\, f_0 = \alpha$.

Следствие 2.1. [19]. *Порядок экстремальной функции в задаче* $\max\limits_{f\in\mathcal{U}_\alpha} |a_n(f)|$, $n = 2, 3, \ldots$, *равен α.*

При $n = 3$ отсюда получается результат D. M. Campbell'а, J. A. Cima, J. A. Pfaltzgraff'а [21, теорема 6.2]. Для л.-и.с. многие экстремальные задачи решены Ch. Pommerenke.

Теорема 2.3. (искажения) [1, с. 115]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и.с.,* $\mathrm{ord}\, \mathfrak{M} = \alpha$; *обозначим $|z| = r$. Тогда для любой функции $f \in \mathfrak{M}$ и любых $z \in \Delta$*

$$|\log(1 - |z|^2) f'(z)| \leq \alpha \log \frac{1+z}{1-z}, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] \leq d(f(z), 0) \leq l(f(z), 0) \leq \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha} - 1\right], \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] \leq \frac{d(f(z), 0)}{(1 - |z|^2)|f'(z)|} \leq \frac{l(f(z), 0)}{(1 - |z|^2)|f'(z)|}$$
$$\leq \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha} - 1\right],$$

$$\frac{1}{2\alpha}(1-|z|^2)|f'(z)| \le d(f(z)) \le (1-|z|^2)|f'(z)|. \tag{2.3}$$

Неравенства не могут быть, вообще говоря, улучшены; равенство достигается для функции

$$k_\theta(z) = \frac{e^{i\theta}}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\right)^\alpha - 1\right], \qquad \theta \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

если $k_\theta \in \mathfrak{M}$ (ord $k_\theta = \alpha$).

Из (2.1) получаем оценку производной:

$$\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}} \le |f'(z)| \le \frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}}. \tag{2.5}$$

D. M. Campbell [22] доказал, что равенство в (2.5) и в неравенствах теоремы 2.3 (кроме правой части (2.3)) достигается *только* для функций k_θ. Правая часть неравенства (2.3) следует из леммы Шварца и потому справедлива для любой аналитической в Δ функции. Обозначим $z = h(w)$, $w \in F_f = F$ — обратную функцию к $w = f(z)$, $d_F(f(z)) = d_f(z)$. Тогда (2.3) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\alpha}\frac{|dw|}{d_F(w)} \le \frac{|h'(w)||dw|}{1-|h(w)|^2} \le \frac{|dw|}{d_F(w)},$$

откуда следует эквивалентность метрик $\dfrac{|h'(w)||dw|}{1-|h'(w)|^2}$ и $\dfrac{|dw|}{d_F(w)}$ на F [1, с. 116].

При $\alpha = 2$ из (2.2) получается классическая теорема искажения в $\mathfrak{S}$:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}.$$

В общем случае нельзя оценить $|f(z)|$ снизу положительным числом, т. к. f может иметь в Δ не единственный нуль (если функции л.-и.с. $\mathfrak{M}$ имеют в Δ только один нуль в точке $z = 0$, то вследствие линейной инвариантности они однолистны). Однако в некоторых специальных случаях D. M. Campbell [22] дал оценки $|f(z)|$ снизу.

Теорема 2.4. [22]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *л.-и.с.*, ord $\mathfrak{M} = \alpha$, R_u — *радиус однолистности* $\mathfrak{M}$, *т. е.*

$$R_u = \sup\{\rho : \ f \text{ однолистна в круге } \{z : \ |z| < \rho\} \ \ \forall f \in \mathfrak{M}\}.$$

Тогда для всех функций $f \in \mathfrak{M}$ *и любых* z, $|z| < R_u$, *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{\alpha}\right] \le \min\left(|f(z)|, \frac{|f(z)|}{(1-|z|^2)|f'(z)|}\right);$$

если $\alpha \le 2$ *и* $f \in \mathfrak{S} \cap \mathcal{U}_\alpha$, *то*

$$\frac{1}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{\alpha}\right] \le \frac{|f(z)|}{(1-|z|^2)|f'(z)|} \le \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\alpha}-1\right].$$

При $z \ne 0$ *равенство во всех неравенствах здесь достигается только для функций* k_θ *из (2.4).*

Следствие 2.2. [1]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *л.-и.с.,* $\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \alpha$. *Тогда для* $r \in (0,1)$

1) риманова поверхность $F(r) = \{f(z);\ |z| < r\}$ *содержит однолистный круг с центром в* 0 *и радиусом* $\frac{1}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right]$;

2) для любой функции $f \in \mathfrak{M}$ *и любых* $z_1, z_2 \in \Delta$

$$\left.\begin{array}{l} |\log[(1-|z_2|^2)|f'(z_2)|] - \log[(1-|z_1|^2)|f'(z_1)|]| \\ |2\arg(1-\bar z_1 z_2) + \arg f'(z_2) - \arg f'(z_1)| \end{array}\right\} \le$$

$$\le \alpha \log \frac{1+\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\bar z_1 z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\bar z_1 z_2}\right|}$$

и существует постоянная $K = K(\mathfrak{M})$ *такая, что*

$$l(f(z_1), f(z_2)) \le K(\mathfrak{M})(1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar z_1 z_2}\right|^{-\alpha})d_f(z_1).$$

Большая общность в определении л.-и.с. имеет и свои минусы, выражающиеся прежде всего в отсутствии достаточно универсальных методов. Здесь нет метода параметрических представлений; невозможно, ссылаясь на геометрические соображения, построить метод площадей, как в классе $\mathfrak{S}$ однолистных функций. Возможности применения вариационных методов тоже весьма ограничены. Следующий важный в некоторых экстремальных вопросах результат Ch. Pommerenke доказал, используя вариацию по $a \in \Delta$ функции $\Lambda_\phi[f]$ из (1.1), $\phi(z) = \dfrac{z+a}{1+\bar a z}$.

Теорема 2.5. [1, с. 131]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *компактное л.-и.с.*, $\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \alpha$. *Тогда*

a) *если* $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n(f)z^n \in \mathfrak{M}$ *и* $a_2(f) = \alpha$, *то* $a_3(f) = \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{3}$;

b) *для фиксированного* $z_0 \in \Delta$ $\max\limits_{f\in\mathfrak{M}} |f(z_0)|$ *достигается на функции* $h(z) = z + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, *удовлетворяющей уравнению*

$$(1-|z_0|^2)h'(z_0) = 1 + 2a_2 h(z_0).$$

Этому же уравнению удовлетворяет и функция $h \in \mathfrak{M}$, *если*

$$\min_{f\in\mathfrak{M}} |f(z_0)| = |h(z_0)| > 0.$$

Если функция $k_\theta \notin \mathfrak{M}$, то оценка производной (2.5) может быть уточнена следующим образом.

Теорема 2.6. [1, с. 128]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *л.-и.с.*, $\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \alpha$. *Для* $t \in (0,\infty)$ *обозначим*

$$\beta(t) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \max_{|z|=\tanh t} \frac{1}{2t} \log((1-|z|^2)|f'(z)|) = \tag{2.6}$$

$$= -\inf_{f\in\mathfrak{M}} \min_{|z|=\tanh t} \frac{1}{2t} \log((1-|z|^2)|f'(z)|).$$

Тогда для любых положительных t_1 *и* t_2

$$(t_1+t_2)\beta(t_1+t_2) \le t_1\beta(t_1) + t_2\beta(t_2);$$

существует $\lim\limits_{t\to\infty} \beta(t) = \beta(\infty)$ *и*

$$1 \le \beta(\infty) \le \beta(t) \le \alpha. \tag{2.7}$$

В каждом из неравенств (2.7) может реализовываться знак равенства. Если $\mathfrak{M}$ — *компактное семейство, то* $\beta(\infty) = \alpha$, *если и только если функция* k_θ *из (2.4) принадлежит* $\mathfrak{M}$.

(2.6) означает, что при $|z| = \tanh t$

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{\beta(t)} \le (1-|z|^2)|f'(z)| \le \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\beta(t)} \quad \text{для всех } f \in \mathfrak{M}$$

и что здесь $\beta(t)$ нельзя заменить на меньшее независимое от f число. D. M. Campbell и M. R. Ziegler [23] в дополнение к теореме 2.6 доказали, что $\beta(t)$ непрерывна и существует $\lim\limits_{t\to 0^+} \beta(t) = \alpha$, кроме того, для любого $\beta \in [1, \alpha]$ существует л.-и.с. $\mathfrak{M}$, для которого $\beta(\infty) = \beta$.

2^0. Трудной в л.-и.с. является проблема оценки коэффициентов. Для $\alpha > 1$ неизвестен даже порядок роста коэффициентов функций из $\mathcal{U}_\alpha$. Нет точной оценки и 3-го коэффициента. Однако в этом направлении были получены следующие результаты для функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{U}_\alpha$.

Ch. Pommerenke [1, с. 132] доказал, что в л.-и.с. $\mathfrak{M}$ порядка α для всех $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left|\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)\alpha^2 + \frac{1}{3}\right| \le \sup_{f\in\mathfrak{M}} |a_3 - \lambda a_2^2| \le \left|\frac{2}{3}-\lambda\right|\alpha^2 + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2} + \frac{1}{2}. \qquad (2.8)$$

Равенство в левой части здесь достигается для функций $f \in \mathcal{U}_\alpha$ с максимально возможным 2-м коэффициентом, т. е. с $|a_2| = \alpha$. D. M. Campbell, J. A. Cima и J. A. Pfaltzgraff [21] в 1971 г. высказали гипотезу: $\max\limits_{f\in\mathcal{U}_\alpha} |a_3| = \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{3}$. Однако [24] в 1984 г. эта гипотеза была опровергнута для всех $\alpha > 1$; было показано, что для л.-и.с. $\mathcal{U}'_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$

$$\max_{f\in\mathcal{U}'_\alpha} |a_3| = \frac{\alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2+3}}{3} > \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{3}$$

при $\alpha > 1$ (см. §6, теорема 6.8). Таким образом, предполагавшаяся экстремальной функция k_θ из (2.4) не является таковой. Далее в [14] доказано, что для $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\max_{f\in\mathcal{U}'_\alpha} |a_3 - \lambda a_2^2| = \frac{\alpha}{3}\sqrt{\alpha^2\left(1-\frac{2}{3}\lambda\right)^2 + 3(1-\lambda)} + \alpha^2\left|\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3}\right|;$$

это уточняет оценку слева в (2.8) для $\mathfrak{M} = \mathcal{U}_\alpha$.

Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$, обозначим

$$\log f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \qquad B_n = \max_{f \in \mathcal{U}_\alpha} |b_n|.$$

В [25] получена оценка логарифмических коэффициентов B_n, уточняющая оценку из [26].

Теорема 2.7. [25]. *Для всех натуральных n и для $\alpha > 1$*

1) $B_{n+1} \geq B_n \left(1 - \dfrac{1}{n(\alpha-1)}\right)$,

2) $\dfrac{(\alpha-1)(1+\frac{1}{n})}{\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \leq B_n \leq \dfrac{2(\alpha - \frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{n})^2)}{(2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})^{n-1}} < e\left(\alpha - \dfrac{1}{4\alpha}\right)$,

3) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} B_n$, *причем*

$$e(\alpha-1) \leq \lim_{n\to\infty} B_n \leq e\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Теорема 2.7 позволяет уточнить правую часть неравенства (2.8) для произвольных $\lambda \in \mathbb{C}$.

Следствие 2.3. [25]. *Для $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\alpha > 1$*

$$\max_{f\in\mathcal{U}_\alpha} |a_3 - \lambda a_2^2| \leq \left|\frac{2}{3} - \lambda\right| \alpha^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{1}{2\sqrt{3}\alpha}.$$

3^0. Для $x, q \in [0,1)$ обозначим

$$\Xi(x,q) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-q^2\xi^2}}{1-\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{1-q^2}\log\frac{\sqrt{1-q^2x^2} + x\sqrt{1-q^2}}{\sqrt{1-q^2x^2} - x\sqrt{1-q^2}} +$$
$$+ q\arcsin x.$$

Теорема 2.8. [1, с. 126]. *Если λ — вещественное число, то для функций $f \in \mathcal{U}_\alpha$ справедливы неравенства*

$$|\mathrm{Re}\,\{e^{-i\lambda}\log[(1-|z|^2)f'(z)]\}| \leq 2\alpha\Xi\left(|z|, \frac{|\sin\lambda|}{\alpha}\right) \quad \forall z \in \Delta, \qquad (2.9)$$

$$\left|\operatorname{Re}\left\{e^{-i\lambda}\left(\log\frac{1-|z_2|^2}{1-|z_1|^2}+2i\arg(1-\bar z_1 z_2)+\log\frac{f'(z_2)}{f'(z_1)}\right)\right\}\right|\le$$
$$\le 2\alpha\Xi\left(\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar z_1 z_2}\right|,\frac{|\sin\lambda|}{\alpha}\right)\quad\forall z_1,z_2\in\Delta. \tag{2.10}$$

Здесь и далее предполагается, как обычно, что $\log f'(z)$ *непрерывен в* Δ *и* $\log f'(0)=0$.

Из (2.1) получается оценка $|\arg f'(z)|$ в $\mathcal{U}_\alpha$:

$$|\arg f'(z)|\le\alpha\log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Из (2.9) при $\lambda=\pm\dfrac{\pi}{2}$ следует важное уточнение этой оценки.

Следствие 2.4. [1]. *Для каждой функции* $f\in\mathcal{U}_\alpha$ *и любого* $z\in\Delta$ *справедливо неравенство*

$$\sqrt{\alpha^2-1}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}\le\max_{f\in\mathcal{U}_\alpha}|\arg f'(z)|\le 2\alpha\Xi\left(|z|,\frac{1}{\alpha}\right)\le$$
$$\le\sqrt{\alpha^2-1}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}+2\arcsin|z|. \tag{2.11}$$

Левая часть неравенства (2.11) получается из рассмотрения конкретной функции

$$f(z)=\frac{1}{2i\sqrt{\alpha^2-1}}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{i\sqrt{\alpha^2-1}}-1\right]\in\mathcal{U}_\alpha. \tag{2.12}$$

Неравенство (2.10), в частности, дает возможность оценить разность $\arg f'(z_2)-\arg f'(z_1)$ в $\mathcal{U}_\alpha$.

D. M. Campbell и M. R. Ziegler [23] исследовали функцию

$$G(r)=G(r,\mathfrak{M})=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\max_{|z|=r}\arg f'(z)=-\inf_{f\in\mathfrak{M}}\min_{|z|=r}\arg f'(z),\quad r\in[0,1),$$

для л.-и.с. $\mathfrak{M}$ порядка α. Они доказали, что $G(r)$ — непрерывная неубывающая на $[0,1)$ функция, причем $G(r)\ge 2\arcsin r$ для всех $r\in[0,1)$; это неравенство превращается в равенство при $\operatorname{ord}\mathfrak{M}=1$. В частности, отсюда получается для любого л.-и.с. $\mathfrak{M}$

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}}\sup_{z\in\Delta}\arg f'(z)\ge\pi.$$

Для многих л.-и.с. функция $G(r)$ выписывается явно. Так,

$$G(r,\mathcal{K}) = 2\arcsin r \quad (\textit{см.}[85]),$$

$$G(r,\mathfrak{S}) = \begin{cases} 4\arcsin r, & \text{для} \quad r\in\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ \pi+\log\dfrac{r^2}{1-r^2}, & \text{для} \quad r\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right) \end{cases} \quad (\textit{см.}[7, \textit{c.}114]).$$

По аналогии с функцией $\beta(t)$ из теоремы 2.6 в [23] изучается функция

$$\gamma(t) = \frac{G(\tanh t)}{2t} = \sup_{f\in\mathfrak{M}}\max_{|z|=\tanh t}\frac{1}{2t}\arg f'(z).$$

Оказывается, что для л.-и.с. $\mathfrak{M}$ поведение функций $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ во многом различно. Так, например, $\beta(t)$ может быть константой, а $\gamma(t)$ — нет.

Теорема 2.9. [23]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и.с. порядка α, $t\in(0,\infty)$. Тогда 1) $\gamma(t)$ непрерывна в $(0,\infty)$ и*

$$\gamma(t) = -\inf_{f\in\mathfrak{M}}\min_{|z|=\tanh t}\frac{1}{2t}\arg f'(z);$$

2) существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma(t)=\gamma(\infty)\le\sqrt{\alpha^2-1}$; $\lim\limits_{t\to0^+}\gamma(t)=\alpha$, причем

$$0\le\gamma(\infty)\le\gamma(t)\le\alpha;$$

3) $(t_1+t_2)\gamma(t_1+t_2)\le t_1\gamma(t_1)+t_2\gamma(t_2)$, $\qquad t_1,t_2\in(0,\infty)$;
4) если $\alpha\ge1$ и $\gamma\in[0,\sqrt{\alpha^2-1}]$, то существует л.-и.с. $\mathfrak{M}$ такое, что $\operatorname{ord}\mathfrak{M}=\alpha$ *и* $\gamma(\infty)=\gamma$.

D. M. Campbell и M. R. Ziegler доказали, в частности, что $G'(0^+) = \lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{G(r)}{r} = 2\alpha$, и заметили, что левая оценка в (2.11) не является точной, т. к. иначе $G'(0^+)\ne2\alpha$. Более того, они привели пример функции f из класса Paatero (см. §6) $V_{2\alpha}\subset\mathcal{U}_\alpha$, для которой

$$\sqrt{\alpha^2-1}\log\frac{1+r}{1-r} < \arg f'(z)$$

при $0 < |z| < \frac{1}{\alpha}$; таким образом, доказали неточность левой оценки в (2.11) для этих z.

Можно показать, что левая оценка в (2.11) не является точной ни при каких $z \in \Delta$; более того, для л.-и.с. $\mathcal{U}'_\alpha$ порядка α $\quad G(r,\mathcal{U}'_\alpha) = 2\alpha\Xi(r, \dfrac{1}{\alpha})$. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2.10. (вращения) [1], [125]. *Для функций $f \in \mathcal{U}_\alpha$ справедлива точная для всех $z \in \Delta$ оценка*

$$|\arg f'(|z|)| \le 2\alpha\Xi\left(|z|, \frac{1}{\alpha}\right);$$

равенство достигается для функции

$$\frac{1}{(e^{-ix} - e^{-it})i\sqrt{\alpha^2-1}}\left[\left(\frac{1+ze^{-ix}}{1-ze^{-it}}\right)^{i\sqrt{\alpha^2-1}} - 1\right]$$

при $x = \arcsin\dfrac{|z|}{\alpha} + \arcsin\dfrac{1}{\alpha}$, $t = \pi + \arcsin\dfrac{|z|}{\alpha} - \arcsin\dfrac{1}{\alpha}$.

4^0. *Радиусом выпуклости* R_K компактного семейства $\mathfrak{M} \subset LS$ называется наибольшее из чисел ρ таких, что круг $\Delta_\rho = \{z : |z| < \rho\}$ однолистно отображается каждой функцией $f \in \mathfrak{M}$ на выпуклую область, т. е. $\mathcal{R}_K = \max\left\{\rho : \ \dfrac{f(\rho z)}{\rho} \in \mathcal{K} \ \ \forall \{ \in \mathfrak{M}\right\}$.

ТЕОРЕМА 2.11. [1, с. 133]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — компактное л.-и.с. порядка α. Тогда $\mathcal{R}_K = \alpha - \sqrt{\alpha^2-1}$.*

При $\alpha = 2$ отсюда получается классический результат для класса $\mathfrak{S} \subset \mathcal{U}_2$: $\quad \mathcal{R}_K = 2 - \sqrt{3}$ [7, с. 166]. Неожиданным является замечание D. M. Campbell'a [13] о том, что наименьшее значение радиуса выпуклости $2 - \sqrt{3}$ в $\mathcal{U}_2$ достигается не только на функции Кёбе $\dfrac{z}{(1-z)^2}$, экстремальной во многих задачах в $\mathfrak{S}$, но и для целой функции $g(z) = \dfrac{\exp[(2+\sqrt{3})z] - 1}{2+\sqrt{3}}$. Аналогично и в $\mathcal{U}_\alpha$ [22]: экстремальное значение $\mathcal{R}_K = \alpha - \sqrt{\alpha^2-1}$ достигается как на функции $k_\theta(z)$ из (2.4), так и на целой функции $\dfrac{\exp[(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})z] - 1}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}$. Из теоремы

2.11 также следует, что функция $f \in LS$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, если и только если $\operatorname{ord} f = 1$.

Радиусом звездообразности $\mathcal{R}_\star$ компактного семейства $\mathfrak{M} \subset LS$ называется наибольшее из чисел $\rho > 0$ таких, что круг Δ_ρ однолистно отображается каждой функцией $f \in \mathfrak{M}$ на область, звездообразную относительно нуля, т. е. $\mathcal{R}_\star = \max\left\{\rho : \dfrac{f(\rho z)}{\rho} \in S^*\right\}$, где S^* — класс звездообразных функций.

Ch. Pommerenke [1, с. 134] доказал, что для л.-и.с. $\mathfrak{M}$ порядка α радиус звездообразности $\mathcal{R}_\star \geq \frac{1}{\alpha}$. В связи с этим интересно заметить, что для всех функций $f \in \mathcal{U}_\alpha$ $\alpha f\left(\dfrac{z}{\alpha}\right) \in S^*$, а по неравенству (1.3) эти функции $\alpha f\left(\dfrac{z}{\alpha}\right) \in \mathcal{U}_{5/4}$. С другой стороны, $S^* \subset \mathcal{U}_2$, но S^* не содержится в $\mathcal{U}_\alpha$ при $\alpha < 2$. Это говорит о большом разрыве между классом S^* и звездообразными функциями $\left\{\alpha f\left(\dfrac{z}{\alpha}\right),\ f \in \mathcal{U}_\alpha\right\}$.

Нахождение радиуса однолистности $\mathcal{R}_u$ в $\mathfrak{M}$ (см. теорему 2.4) тесно связано с нахождением наибольшего круга $\{z : |z| < R_0\}$, в котором $\dfrac{f(z)}{z} \neq 0$ для всех $f \in \mathfrak{M}$. Ch. Pommerenke [1, с. 134] показал, что R_0 и $\mathcal{R}_u$ для любого компактного л.-и.с. связаны равенством

$$\mathcal{R}_u = \frac{R_0}{1 + \sqrt{1 - R_0^2}}. \tag{2.13}$$

С помощью (2.13) им была доказана

Теорема 2.12. [1, с. 135]. *Обозначим* $\xi_0 = \xi_0(\alpha)$ *решение уравнения* $\Xi\left(\xi_0, \dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{\pi}{\alpha}$, $\xi_1 = \dfrac{\xi_0}{1 + \sqrt{1 - \xi_0^2}}$. *Тогда радиусы* R_0 *и* $\mathcal{R}_u$ *для семейства* $\mathcal{U}_\alpha$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\xi_0(\alpha) \leq R_0 \leq \tanh \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}},$$

$$\xi_1(\alpha) \leq \mathcal{R}_u \leq \tanh \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}}.$$

При $\alpha \to \infty$ $\quad R_0 = \dfrac{\pi}{\alpha} + O\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$, $\mathcal{R}_u = \dfrac{\pi}{2\alpha} + O\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

Верхние оценки для R_0 и $\mathcal{R}_u$ получаются из рассмотрения конкретной функции (2.12). Заметим, что в классе однолистных функций $\mathfrak{S}$ $\mathcal{R}_\star = \tanh\frac{\pi}{4} = 0.65\ldots$ [27] (см. также [7, с. 167]); следовательно, в $\mathcal{U}_\alpha$

$$\mathcal{R}_u\cdot\tanh\frac{\pi}{4} \le \mathcal{R}_\star \Longrightarrow \frac{\pi\tanh\frac{\pi}{4}}{2\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \le \mathcal{R}_\star. \tag{2.14}$$

Из (2.14) получается некоторое улучшение асимптотики $\mathcal{R}_\star = = \frac{1.02\ldots}{\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$ $\alpha\to\infty$, по сравнению с вышеуказанным.

По аналогии с радиусами однолистности и выпуклости Campbell D. M. [13] ввел понятие $\mathcal{U}_\beta$-радиуса $\mathcal{R}(\beta)$ компактного семейства $\mathfrak{M}$:

$$\mathcal{R}(\beta) = \max\left\{\rho:\ \frac{f(\rho z)}{\rho}\in\mathcal{U}_\beta\ \ \forall f\in\mathfrak{M}\right\}.$$

Если $\beta\ge\alpha$, то $\mathcal{U}_\beta\supset\mathcal{U}_\alpha$. Поэтому при $\beta\ge\alpha$ $\mathcal{U}_\beta$-радиус семейства $\mathcal{U}_\alpha$ равен 1. Следовательно, интерес представляет только случай $\beta<\alpha$. D. M. Campbell доказал, что при $\beta\le\alpha$ $\mathcal{U}_\beta$-радиус семейства $\mathcal{U}_\alpha$ удовлетворяет неравенствам

$$\max(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}, \frac{\beta-1}{\alpha-1}) \le \mathcal{R}(\beta) \le (\beta+\sqrt{\beta^2-1})(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}).$$

С помощью теоремы 1.4 этот результат можно уточнить.

Теорема 2.13. *При $\beta\le\alpha$ $\mathcal{U}_\beta$-радиус семейства $\mathcal{U}_\alpha$ равен $(\beta+\sqrt{\beta^2-1})(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})$.*

Обозначим $\mathcal{R}_u(\alpha)$ радиус однолистности в семействе $\mathcal{U}_\alpha$. Из теоремы 2.13 получается качественный результат о $\mathcal{R}_u(\alpha)$.

Следствие 2.5. *Обозначим $\rho(\alpha) = (\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})\mathcal{R}_u(\alpha)$. Функция $\rho(\alpha)$ возрастает по $\alpha\in[1,\infty)$; $\rho(1)=1$, $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\rho(\alpha)=\pi$.*

В качестве следствия теоремы 2.13 получается также теорема 2.11.

G. Labelle и Q. I. Rahman [28] показали: если $f,g\in\mathcal{K}=\mathcal{U}_\infty$, то функция $\frac{1}{2}(f+g)$ выпукла в круге $\{z:|z|<r_{\mathcal{K}}\}$, где $r_{\mathcal{K}}$ не меньше наименьшего в $(0,1)$ корня уравнения $1-3r+2r^2-2r^3=0$; $r_{\mathcal{K}}\ge 0.395$. Метод доказательства этого результата D. M. Campbell переносит на выпуклую комбинацию функций из произвольного л.-и.с. конечного порядка. Им доказана

Теорема 2.14. [29]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *л.-и.с. порядка* α. *Для* $t \in \mathbb{R}$ *обозначим*

$$H_t(\mathfrak{M}) = \{h: \ h(z) = tf(z) + (1-t)g(z), \quad f, g \in \mathfrak{M}\},$$

$$\gamma(r,\theta) = \arg \frac{g'(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}, \qquad \gamma(0,0) = 0.$$

Тогда для любой функции $h \in H_t(\mathfrak{M})$ *и любого* $z \in \Delta$ *такого, что* $|\gamma(r,\theta)| < \pi$, *выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)}\right\} \geq \frac{(1+r^2)\cos\frac{\gamma}{2} - 2\alpha r}{(1-r^2)\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Эту теорему D. M. Campbell применял к различным л.-и.с. В частности, он получил

Следствие 2.6. [29]. a) *Для семейства* $H_{\frac{1}{2}}(\mathfrak{S})$ *радиус выпуклости* $r_{\mathcal{K}}$ *не меньше наименьшего положительного корня уравнения*

$$1 - 4r - 7r^2 + 8r^6 = 0,$$

таким образом, $r_{\mathcal{K}} \geq 0.185$.
b) *Для семейства* $H_{\frac{1}{2}}(V_k)$ (V_k — *класс функций с граничным вращением, не превосходящим* $k\pi$, *см.* §6) *радиус выпуклости* $r_{\mathcal{K}}$ *не меньше наименьшего положительного корня уравнения*

$$(1+r^2)\cos\frac{k}{\sin r} = kr.$$

c) *Для семейства* $H_{\frac{1}{2}}(\mathcal{U}_\alpha)$ *радиус выпуклости* $r_{\mathcal{K}}$ *не меньше наименьшего положительного корня уравнения*

$$(1+r^2)\cos\left[2\alpha\Xi\left(r,\frac{1}{\alpha}\right)\right] = 2\alpha r.$$

Q. I. Rahman и J. Szynal [30] рассматривали задачу о радиусе однолистности в классе $H_t(C)$ и получили точное значение радиуса для всех $t \in [0,1]$. Они доказали также следующую теорему.

Теорема 2.15. [30]. *Для* $t \in [0,1]$ *радиус звездообразности класса* $H_t(\mathcal{K})$ *равен* $\dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{1-t}}$.

Тем самым они получили отрицательный ответ на вопрос Hayman'a W. K.[31, задача 6.11] о звездообразности класса $H_t(\mathcal{K})$. В [32]

Campbell D. M. рассматривал обобщения семейств $H_t(\mathfrak{M})$

$$\mathfrak{H}_\lambda(\mathfrak{M}) = \left\{ F(z) = \sum_{k=1}^{m} t_k f_k(z) : \quad \sum_{k=1}^{m} t_k = 1,\ f_k \in \mathfrak{M} \ \ \forall k,\ |\arg t_k| \le \lambda \right\}.$$

Для $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2})$ он показал, что радиус выпуклости $r_{\mathcal{K}}$ семейства $\mathfrak{H}_\lambda(\mathfrak{M})$ не меньше положительного корня уравнения

$$1 + r^2 = 2\alpha r \sec(G(r, \mathfrak{M}) + \lambda)$$

(функция $G(r, \mathfrak{M})$ определена в 2^0). D. M. Campbell нашел также радиус однолистности семейства $\mathfrak{H}_\lambda(\mathfrak{S})$

$$r_u = \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\lambda}{4}\right).$$

Если л.-и.с. $\mathfrak{M}$ вместе с каждой функцией $f(z)$ содержит функцию $\overline{f(\bar{z})}$, то радиус однолистности семейства $\mathfrak{H}_0(\mathfrak{M})$ не превосходит $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ [32].

§ 3. Вопросы мажорации и подчинения

Определение 3.1.*Пусть F и f — аналитические в Δ функции. Говорят, что F ¤ функцию f в круге $\Delta_r = \{z : |z| \le r < 1\}$ (пишем $f << F$), если $|f(z)| \le |F(z)|$ в этом круге. Функция f* **подчинена** *функции F в круге Δ_r (пишем $f \prec F$), если существует аналитическая в Δ функция ϕ такая, что $f(z) = F(\phi(z))$ и $|\phi(z)| \le |z|$ в Δ_r.*

Например, $\exp\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{z}{1-z}\right) \prec \exp z$ в $\Delta_{1/2}$, т. к. $\left|\dfrac{1}{2}\dfrac{z}{1-z}\right| \le |z|$ в $\Delta_{1/2}$. Если $F \in LS$, то $f \prec F$ в Δ_R, если и только если $f \prec F$ в любом меньшем круге Δ_r, $r \in (0, R)$.

Первый результат в теории мажорации и подчинения получил M. Biernacki [33] в 1936 г. Для функций $F \in \mathfrak{S}$ он показал, что из подчиненности $f \prec F$ в Δ и $f'(0) \ge 0$ следует $f << F$ в $\Delta_{1/4}$. В 1951 г. Г. М. Голузин [7, с. 364] улучшил этот результат, показав, что здесь вместо $1/4$ можно поставить $\rho \in \left(0.35, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$. Наконец, в

1957 г. Tao Shah [34] доказал, что наилучшим значением постоянной ρ здесь является $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

T. H. MacGregor [35] получил следующий результат: если $f << F$ в Δ и $F \in \mathcal{K}(=\mathcal{U}_1)$, то $f' << F'$ в $\Delta_{1/3}$; если же $F \in \mathfrak{S}$ и $f << F$ в Δ, то $f' << F'$ в $\Delta_{2-\sqrt{3}}$. Его константы $1/3$ и $2-\sqrt{3}$ не улучшаемы.

Г. М. Голузин в 1951 г. [7, с. 364] доказал: если $F \in \mathfrak{S}$, $f'(0) \geq 0$, $f \prec F$ в Δ, то $f' << F'$ в $\Delta_{0.12\ldots}$, и предположил, что постоянная 0.12... здесь может быть заменена на точную $3-\sqrt{8}$. В 1957 г. Tao Shah [36] доказал справедливость этого предположения.

Z. Lewandowski [37] рассматривал задачу нахождения максимального $R > 0$ такого, что для каждой функции $F \in \mathfrak{S}$ из условия $f << F$ в Δ, $f'(0) \geq 0$, следует $f \prec F$ в Δ_R. Он показал, что $0.21 < R < 0.3$.

D. M. Campbell обобщил эти результаты (они были анонсированы в [38]) на случай $F \in \mathcal{U}_\alpha$. При этом оказалось, что в теории мажорации-подчинения не важна однолистность F, но важен порядок этой функции.

Теорема 3.1. [22,39]. *Если $F \in \mathcal{U}_\alpha$, $\alpha \in [1,\infty)$, и $f << F$ в Δ, то $f' << F'$ в Δ_ρ, где*

$$\rho = \rho(\alpha) = \frac{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}-1}{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}}+1} = \tanh\left[\frac{\log(\alpha+1)}{2\alpha}\right];$$

это значение $\rho(\alpha)$ не улучшаемо для каждого α. Более того, $|f'(z)| < |F'(z)|$ в Δ_ρ, если $f(z) \neq e^{i\theta}F(z)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Если же $F(z) \neq k_\theta(z)$ (см. (2.4)) и $f << F$ в Δ, то $f' << F'$ в Δ_r для некоторого $r > \rho(\alpha)$, причем r зависит только от F и не зависит от $f(z)$.

При $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ отсюда получаются ранее цитированные результаты T. H. MacGregor'а.

Теорема 3.2. [22,40]. *Пусть $F \in \mathcal{U}_\alpha$, $\alpha \in [1.65,\infty)$. Если $f \prec F$ в Δ и $f'(0) \geq 0$, то $f' << F'$ в круге $\{z : |z| \leq \alpha+1-\sqrt{\alpha^2+2\alpha}\}$, причем радиус этого круга не может быть увеличен. Более того, $|f'(z)| < |F'(z)|$ в круге $\{z : |z| < \alpha+1-\sqrt{\alpha^2+2\alpha}\}$, если f не тождественна F. Если $F(z) \neq k_\theta(z)$ (см. (2.4)) и $f \prec F$ в Δ, $f'(0) \geq 0$, то $f' << F'$ в круге Δ_r для некоторого $r > \alpha+1-\sqrt{\alpha^2+2\alpha}$, где r зависит только от F и не зависит от f.*

При $\alpha = 2$ отсюда, в частности, получается результат Tao Shah [36]. D. M. Campbell предположил, что теорема 3.2 справедлива для всех $\alpha \in [1,\infty)$. В 1984 г. R. W. Barnard и Ch. N. Kellogg [41] доказали эту гипотезу для $\alpha = 1$. При $\alpha \in (1, 1.65)$ вопрос остается открытым.

Теорема 3.3. [39]. *Пусть* $F \in \mathcal{U}_\alpha$, $\alpha \in [1,\infty)$. *Если* $f << F$ *в* Δ *и* $f'(0) \geq 0$, *то* $f \prec F$ *в* $\Delta_{\mathcal{R}(\alpha)}$, *где* $\mathcal{R}(\alpha) \leq \mathcal{R}_\in(\alpha)$, *а* $\mathcal{R}_\in(\alpha)$ — *единственный корень уравнения*

$$x(1+x)^\alpha - (1-x)^\alpha = 0$$

на $[0,1]$. *При* $\alpha \in [1, 2.88]$ $\mathcal{R}(\alpha) \geq \mathcal{R}_\infty(\alpha)$, *где* $\mathcal{R}_\infty(\alpha)$ *единственный на* $[0,1]$ *корень уравнения*

$$\frac{2x}{1+x^2} - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\alpha \left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2\alpha}\right]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

При $\alpha = 2$ отсюда, в частности, получается результат из [37] для класса $\mathfrak{S}$.

§ 4. Бинарные операции *Hornich*'а в множестве локально однолистных функций конечного порядка

Обозначим $X = \bigcup_{\alpha<\infty} \mathcal{U}_\alpha \subset LS$, $X \neq LS$. Бинарные операции

$$[f+g](z) = \int_0^z f'(s)g'(s)\,ds,$$

$$[af](z) = \int_0^z (f'(s))^a\,ds, \qquad a \in \mathbb{R},$$

введенные H. Hörnich'ем [42] превращают X в линейное пространство с нулем $e(z) \equiv z$. В [21] на пространстве X была введена норма

$$||f||_1 = \sup_{z\in\Delta}\left[(1-|z|)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\right] \tag{4.1}$$

и доказана

Теорема 4.1. *Если последовательность $\{f_n\}$ сходится в пространстве X с нормой (4.1), то она сходится равномерно внутри Δ.*

В этой же статье получены интересные соотношения:

$$\alpha - 1 \le ||f||_1 \le 2\alpha \qquad \forall f \in \mathcal{U}_\alpha, \tag{4.2}$$

$$|\text{ord } f - \text{ord } g| \le ||[f-g]||_1, \qquad f, g \in X.$$

Но особенно интересной и неожиданной представляется

Теорема 4.2. [21]. *Если $\alpha > 1$ и $f \in \mathcal{U}_\alpha$, то*

$$||f||_1 = 2\alpha \Longleftrightarrow \frac{|f''(0)|}{2} = \alpha.$$

После этой теоремы, с учетом (4.2), весьма естественной кажется высказанная в [21] гипотеза о том, что для $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(f) z^n \in \mathcal{U}_\alpha$ $\max_{f \in \mathcal{U}_\alpha} |a_3(f)|$ достигается для функции f_0 с $|a_2(f_0)| = \alpha$ и, следовательно, (см. теорему 2.5), $\max_{f \in \mathcal{U}_\alpha} |a_3(f)| = \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{3}$. Эту гипотезу косвенно подтверждал и пример класса $\mathfrak{S}$ однолистных функций. Однако оказалось, что в $\mathcal{U}_\alpha$ эта гипотеза неверна (см. §2, 2^0).

Далее вместо нормы (4.1) на X введем эквивалентную норму

$$||f|| = \sup_{z \in \Delta} \left[(1 - |z|^2) \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \right]. \tag{4.3}$$

Она инвариантна относительно замены $f'(z)$ на функцию $f'\left(\frac{z+\zeta}{1+z\overline{\zeta}}\right)$ для $\zeta \in \Delta$ и по этой причине кажется нам несколько предпочтительнее (4.1). Кроме того, в случае нормы (4.3) проще вычислять радиусы окрестностей.

Поскольку для локально однолистных функций f из выполнения условия

$$\sup_{z \in \Delta} \left[(1 - |z|^2) \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \right] \le 1 \tag{4.4}$$

следует однолистность f [43], то int $\mathfrak{S} \ne \emptyset$, т. к. $e(z) = z$ имеет окрестность, целиком лежащую в $\mathfrak{S}$. Из точности константы 1 [44] в критерии Becker'а (4.4) следует, что радиус наибольшей окрестности с центром в $e(z)$ равен 1. Из теоремы 1.1 следует, что $\operatorname{int} \mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$ при $\alpha > 1$ и $e(z)$ имеет окрестность в $\mathcal{U}_\alpha$ радиусом в точности $2(\alpha - 1)$.

Обозначим $\hat{\mathcal{U}}_\alpha = \{f \in \mathcal{U}_\alpha : \ \operatorname{ord} f = \alpha\}$. В [21] получены следующие топологические свойства исследуемых семейств:

1) $\mathcal{U}_\alpha$ выпуклы в X, $\operatorname{int} \mathcal{U}_1 = \emptyset$;

2) $\mathcal{U}_\alpha \setminus \hat{\mathcal{U}}_\alpha$ открыто в X;

3) множество $\hat{\mathcal{U}}_\alpha$ нигде не плотно;

4) X, $\mathcal{U}_\alpha$, $\hat{\mathcal{U}}_\alpha$, $\mathfrak{S}_p$, а также C и V_k (см. §6) не сепарабельны и не компактны;

5) $\mathcal{U}_\alpha$, $\mathfrak{S}_p$, V_k, C ограничены и замкнуты в X.

В [45] доказана полнота комплексного пространства X, таким образом, X — банахово пространство.

В [21] изучается подмножество $M \subset X$:

$$M = \left\{ f \in X : \ \limsup_{|z| \to 1^-} \left[(1 - |z|^2) \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \right] = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ f \in X : \ \lim_{|z| \to 1^-} \left[(1 - |z|^2) \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \right] = 0 \right\}.$$

Оказывается, что ни одно л.-и.с. из M не является компактом.

Теорема 4.3. [21]. *M — сепарабельно, для любой функции $f \in M$*

$$|||[\sigma^{-1} f(\sigma z) - \sigma_0^{-1} f(\sigma_0 z)]||| \underset{\sigma \to \sigma_0, \ \sigma \in \partial\Delta}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall \sigma_0 \in \partial\Delta,$$

$$\left\| \left[\frac{f(\rho z)}{\rho} - f(z) \right] \right\| \underset{\rho \to 1^-}{\longrightarrow} 0.$$

В X ни одно из утверждений теоремы 4.3, вообще говоря, неверно.

Обозначим Λ^* множество комплекснозначных непрерывных в $\mathbb{R}$ функций $\Psi(t)$, удовлетворяющих условию

$$\Psi(t+h) - 2\Psi(t) + \Psi(t-h)| \leq Ah, \qquad t \in \mathbb{R}, \ h > 0;$$

здесь A — некоторая константа, не зависящая от t и h. A. Zygmund [46, с. 263] доказал, что для аналитической в Δ и непрерывной в $\bar{\Delta}$ функции g

$$g(e^{i\theta}) \in \Lambda^* \Longleftrightarrow g''(z) = O\left(\frac{1}{1-|z|}\right).$$

Отсюда вытекает следующая

Теорема 4.4. [21]. *$f \in X$, если и только если существует аналитическая в Δ и непрерывная в $\bar{\Delta}$ функция g такая, что $g(e^{i\theta}) \in \Lambda^*$ и*

$$f(z) = \int_0^z \exp(g'(t) - g'(0))dt.$$

Пусть $\mathcal{B}$ — класс аналитических в Δ функций Блоха, т. е. таких функций F, для которых

$$||F||_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)|F'(z)| + |F(0)| < \infty.$$

В [21] замечено, что

$$f \in X \Longleftrightarrow \log f'(z) = F(z) - F(0) \in \mathcal{B}. \tag{4.5}$$

В дополнение к этому в [47] показано, что

$$2(\text{ord } f - 1) \le ||F(z) - F(0)||_{\mathcal{B}} \le 2(\text{ord } f + 1). \tag{4.6}$$

Неравенство (4.6) не может быть улучшено. Используя (4.5) и (4.6), можно получить (см. [47]) ряд новых результатов в классе $\mathcal{B}$ в терминах порядка соответствующей в (4.5) функции $f \in X$ (см. §7).

Обозначим

$$\mathcal{B}_0 = \{F \in \mathcal{B} : \lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)|F'(z)| = 0\}.$$

J. A. Cima и H. Stegbuchner [48] заметили, что (4.5) устанавливает гомеоморфизм между M и $\mathcal{B}_0$. Это дало им возможность описать двойственное пространство M^*, переформулируя в терминах M известный в $\mathcal{B}_0$ результат [49]. Обозначим CS множество всех аналитических в Δ функций g, для которых

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} |g'(re^{it})\, drdt < \infty.$$

Теорема 4.5. [48]. *Каждый функционал $\psi \in M^*$ имеет вид*

$$\psi_g(f) = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f'(re^{it}) g(e^{-it})\, dt, \tag{4.7}$$

где $g \in CS$; обратно, каждая функция $g \in CS$ порождает линейный функционал (4.7) в пространстве M;

$$\psi_g = \psi_h \Longleftrightarrow g(z) = h(z) + c, \qquad \text{где } \ c \in \mathbb{C}.$$

Опираясь на оценку коэффициентов в классе выпуклых функций $\mathcal{K}$, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.6. [21]. *Если $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in X$ и существует $\rho > 0$, для которого $[\rho f] \in \mathcal{U}_1 = \mathcal{K}$, то*

$$|a_n| \le \frac{1}{n!\rho^{n-1}} \prod_{k=0}^{n-2} (2 + k\rho), \qquad n = 2, 3, \cdots;$$

оценка точная для каждого $\rho > 0$.

Для функции $f \in X$ обозначим

$$Q(r, f) = \max_{\theta\in[0,2\pi]} |\arg f'(re^{i\theta})|.$$

В [50] показано, что

$$||f||_Q = \int_0^1 Q(r, f)\, dr$$

является нормой в пространстве X. Пространство X с нормой $||.||_Q$ обозначим X_Q (в отличие от X — пространства X с нормой (4.3)). Изучая топологические свойства пространства X_Q, Cima J. A. и Pfaltzgraff J. A. [50] доказали следующие утверждения:

1) топология в X_Q, так же как и в X, не слабее топологии равномерной сходимости внутри Δ; $\mathfrak{S}$ замкнуто в X_Q;

2) X_Q сепарабельно (в отличие от X);

3) пространство X_Q неполное (в отличие от X);

4) любое подмножество $\mathcal{U}_\alpha$ ограничено в X_Q, обратное неверно (аналог этого свойства в X: множество $A \subset X$ ограничено, если и только если $A \subset \mathcal{U}_\alpha$ при некотором $\alpha < \infty$);

5) $\mathcal{U}_\alpha$ линейно связно в X_Q для любого $\alpha < \infty$;

Таким образом, свойства пространств X и X_Q во многом различны.

§ 5. Граничные свойства линейно-инвариантных семейств и предельные семейства

1^0. Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с., т. е. $\operatorname{ord}\mathfrak{M} < \infty$. Пусть $f \in \mathfrak{M}$ и

$$f(z,\zeta) = \frac{f\left(\dfrac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) - f(\zeta)}{f'(\zeta)(1-|\zeta|^2)}, \qquad \zeta \in \Delta.$$

Тогда из (2.5) следует, что для любой последовательности $f(z,\zeta_n)$, $\zeta_n \to 1^-$, существует подпоследовательность, сходящаяся (равномерно внутри Δ) к функции из замыкания $\mathfrak{M}$. По аналогии с понятием предельного множества функции в точке (см. [51], [52]), в [3] вводится понятие предельного семейства ($\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$, $\mathfrak{C}(f)$) функции $f \in \mathfrak{M}$.

Определение 5.1.*Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с., $f \in \mathfrak{M}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Обозначим $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$ семейство всех функций g, для которых существует последовательность вещественных чисел $\zeta_n \to 1^-$ такая,что равномерно внутри Δ*

$$e^{-i\theta} f(e^{i\theta}z, e^{i\theta}\zeta_n) = e^{-i\theta}\frac{f\left(e^{i\theta}\dfrac{z+\zeta_n}{1+\zeta_n z}\right) - f(e^{i\theta}\zeta_n)}{f'(e^{i\theta}\zeta_n)(1-\zeta_n^2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(z). \qquad (5.1)$$

Обозначим $\mathfrak{C}(f)$ семейство всех функций g, для которых существуют вещественные последовательности θ_n и ζ_n, $\zeta_n \to 1^-$ такие, что

$$e^{-i\theta_n} f(e^{i\theta_n}z, e^{i\theta_n}\zeta_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(z).$$

Заметим, что (5.1) равносильно условию $\lim\limits_{n\to\infty} f(z, e^{i\theta}\zeta_n) = e^{i\theta} g(e^{-i\theta} z)$; $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f) = \mathfrak{C}(1, e^{-i\theta} f(ze^{i\theta}))$.

Теорема 5.1. [3, с. 226]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с., $f \in \mathfrak{M}$. Тогда семейства $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$ $(\theta \in [0, 2\pi))$ и $\mathfrak{C}(f)$ образуют компактные связные подмножества замкнутой оболочки $\mathfrak{M}$. Если $-1 < x < 1$ и $g \in \mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$ (или $g \in \mathfrak{C}(f)$), то*

$$g(z, x) = \frac{g\left(\dfrac{z+x}{1+xz}\right) - g(x)}{g'(x)(1-x^2)} \in \mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$$

(или соответственно $g(z, x) \in \mathfrak{C}(f)$).

Однако предельные семейства $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$ и $\mathfrak{C}(f)$ не являются, вообще говоря, л.-и.с. Так, например, если $f(z) = z \in \mathfrak{M}$, то предельные семейства $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f) = \mathfrak{C}(f)$ содержат единственную функцию $g(z) = \dfrac{z}{1-z}$, но $g(z, a) \neq g(z)$, если $a \notin (-1, 1)$.

Из [52, теорема 1.1] следует, что $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$ или имеет мощность континуума, или состоит из одной функции.

В [3, с. 229] построен пример однолистной функции f^* с вещественными коэффициентами, такой, что $\mathfrak{C}(1, f^*)$ содержит все функции из $\mathfrak{S}$ с вещественными коэффициентами. Отмечается, что то же справедливо и в $\mathfrak{S}$, т. е. существует функция $f_\star \in \mathfrak{S}$ такая, что $\mathfrak{C}(1, f_\star) = \mathfrak{S}$. Казалось бы, этот удивительный факт должен иметь большие приложения, потому что, обладая полной информацией о такой функции $f_\star$, можно после перехода к пределам в (5.1) трансформировать эту информацию на весь класс $\mathfrak{S}_1$. Однако в этом нас ограничивает отсутствие достаточной информации о $f_\star$.

В [3] Ch. Pommerenke описаны предельные семейства $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$, состоящие из одной функции, а также условия, при выполнении которых $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$ состоит из единственной функции.

Теорема 5.2. [3, с. 228]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с., $f \in \mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$ содержит единственную функцию g, то существует равномерный внутри Δ предел $\lim\limits_{\zeta\to 1^-} e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z, e^{i\theta}\zeta) = g(z)$. Причем функ-*

ция g имеет вид

$$g(z) = g_c(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^c - 1\right] & \text{для } c \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z} & \text{для } c = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$, *то* $|c - p| \le p$ *или* $|c + p| \le p$; *причем может реализовываться каждая из этих двух возможностей.*

Для функций из $\mathfrak{S}$ подобная теорема доказана в [53]. D. M. Campbell и J. A. Pfaltzgraff [54] доказали, что для функций $f \in V_k$ $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f) = \{g_c(z)\}$, где $c = c(\theta) = d\mu(\theta) - 1$, а $\mu(\theta)$ — функция из интегрального представления f (см. §6).

Теорема 5.3. [3, с. 255]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *нормальное л.-и.с.,* $f \in \mathfrak{M}$, $c \in \mathbb{C}$. $f(z,\zeta) \underset{\zeta\to 1^-}{\longrightarrow} g_c(z)$ *(см. (5.2)), если и только если*

$$(1-z)\frac{f''(z)}{f'(z)} \to c + 1 \tag{5.3}$$

при $z \to 1$ *в угле Штольца. Если существуют* $c \neq 0$ *и* $a \in \mathbb{C}$ *такие, что*

$$\frac{a - f(z)}{1 - z}\frac{1}{f'(z)} \to -\frac{1}{c} \tag{5.4}$$

при $z \to 1$ *в угле Штольца, то* $\lim\limits_{\zeta\to 1^-} f(z,\zeta) = g_c(z)$; *если* $\operatorname{Re} c < 0$, *то верно и обратное: из существования* $\lim\limits_{\zeta\to 1^-} f(z,\zeta) = g_c(z)$ *следует (5.4) с* $a = f(1) = \lim\limits_{z\to 1} f(z)$ *(здесь* $z \to 1$ *в угле Штольца, причем последний предел существует).*

Следствие 5.1. [3, с. 256]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *нормальное л.-и.с.,* $f \in \mathfrak{M}$ *и существует* $\lim\limits_{\zeta\to 1^-} f(z,\zeta) = g_c(z)$. *Тогда при* $z \to 1$ *в угле Штольца*

$$\frac{\log f'(z)}{\log\dfrac{1}{1-z}} \to c + 1.$$

Если при этом $z' \to 1$ *в угле Штольца так, что* $0 < b < \dfrac{1 - |z'|}{1 - |z|} < B$ *(*b *и* B — *некоторые константы), то*

$$\frac{(1-z')^{c+1} f'(z')}{(1-z)^{c+1} f'(z)} \to 1.$$

Если при тех же предположениях число $c < 0$, *то при* $x \in (0,1)$

$$1 \geq \frac{d_f(x)}{|f(1)-f(x)|} \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{для } -\infty < c \leq -1, \\ \sin(\frac{\pi}{2}|c|) & \text{для } -1 \leq c < 0. \end{cases}$$

В дополнение к теореме 5.3 D. M. Campbell и J. A. Pfaltzgraff [54] доказали, что для $f \in \mathcal{U}_\alpha$ условие $\mathfrak{C}(1,f) = \{g_c(z)\}$ выполнено, если и только если выполнено (5.3) и число $c = a + bi$ лежит в эллипсе

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\alpha^2 - 1} \leq 1$$

(при $\alpha = 1$ этот эллипс вырождается в отрезок $[-1,1]$).

Особый интерес представляет случай, когда $\mathfrak{C}(1,f) = \{g_c(z)\}$, $c = -1$.

Определение 5.2.[3, с. 257]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *нормальное л.-и.с.,* $f \in \mathfrak{M}$.

Если существует $\lim\limits_{\zeta \to 1^-} f(z,\zeta) = g_{-1}(z) = \dfrac{z}{1+z}$, *то* f *называется в* $z = 1$.

Если для некоторого $\omega \in \mathbb{C}$ *существует конечный* $\lim \arg \dfrac{\omega - f(z)}{1-z}$ *при* $z \to 1$ *в угле Штольца, то* f *называется* $z = 1$.

Пусть, как и раньше, $\mathfrak{B}$ — множество всех аналитических и однолистных в Δ функций ϕ таких, что $|\phi(z)| < 1$. Обозначим $\mathfrak{T}$ подмножество $\mathfrak{B}$ функций ϕ, для которых

$$\phi(z) \to 1, \qquad \arg \frac{1-\phi(z)}{1-z} \to 0$$

при $z \to 1$ в угле Штольца с вершиной в $z = 1$.

Определение 5.3.[3, с. 247]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *л.-и.с.;* $f, g \in \mathfrak{M}$. *Если найдутся функции* ϕ *и* ψ *из* $\mathfrak{T}$, *удовлетворяющие условию* $\Lambda_\phi[f(z)] = \Lambda_\psi[g(z)]$, *то будем говорить, что* f *и* g ¤ ¤¤ ¤—¤¤ $z = 1$, *и писать:* $f \sim g$ в $z = 1$.

Ch. Pommerenke доказал, что для нормальных семейств $\mathfrak{M}$ отношение $f \sim g$ в $z = 1$ является отношением эквивалентности. Он также дал определение, равносильное определению 5.3:

пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и.с., $f, g \in \mathfrak{M}$; будем писать $f \sim g$ в $z = 1$, если существуют комплексные a и b, $a \neq 0$, и существуют функции $\phi, \psi \in \mathfrak{T}$ такие, что $f(\phi(z)) = ag(\psi(z)) + b$.

Теорема 5.4. [3, с. 257]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с. и $f \in \mathfrak{M}$. Если f конформна в $z = 1$, то f полуконформна в $z = 1$. Функция f полуконформна в $z = 1$, если и только если существует конечный $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ и*

$$\frac{f(1) - f(z)}{(1 - z)f'(z)} \to 1 \tag{5.5}$$

при $z \to 1$ в угле Штольца (сравни с (5.4)). Чтобы f была конформна в $z = 1$, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих эквивалентных условий.

I. Функция f полуконформна в $z = 1$, и существует кривая $C \subset \Delta$, оканчивающаяся в $z = 1$, которая имеет в $z = 1$ не параллельную $\partial\Delta$ касательную, а $f(C)$ имеет касательную в концевой точке $f(1)$.

II. Существует точка $\omega \in \mathbb{C}$ такая, что каждая кривая $C \subset \Delta$, оканчивающаяся в $z = 1$ и имеющая в этой точке касательную, не параллельную $\partial\Delta$, отображается функцией $w = f(z)$ в кривую, которая оканчивается в ω и имеет в ней касательную. При этом угол между касательными в конечных точках ($z = 1$ и $w = \omega$) этих кривых не зависит от вида кривой C.

III. $f(z) \sim \dfrac{z}{1+z}$ в $z = 1$.

IY. Существует конечный $\lim\limits_{z\to 1} \arg f'(z)$ в угле Штольца.

Наконец, из существования конечного $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) \neq 0$ следует, что f конформна в $z = 1$.

В случае однолистных функций необходимость условия (5.5) для конформности доказана в [55]. В [56] показано, что условие (5.5) недостаточно для конформности, и доказано, что для конформности необходимо и достаточно выполнения условия I теоремы 5.4.

Из теоремы 5.4 легко получается известный результат [57] (более простое доказательство см. в [58]) для однолистных функций:

Следствие 5.2. *Пусть $f \in \mathfrak{S}$, $f(z)$ конформна в $z = 1$, если и только если выполнены следующие 3 условия:*

1) существует граничная точка ω_0 области $F = f(\Delta)$ и число $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\rho > 0$, при котором

$$W(\varepsilon, \rho) = \{w : \ |w - w_0| < \rho, \ \frac{\pi}{2} + \beta + \varepsilon < \arg(w - w_0) < \frac{3\pi}{2} + \beta - \varepsilon\} \subset F;$$

2) достижимой граничной точке w_0, определяемой $W(\varepsilon, \rho)$, соответствует на $\partial\Delta$ точка $z = 1$;
3) существуют такие последовательности граничных точек ω_k и ω'_k области F, что $\omega_k \to \omega_0$, $\omega'_k \to \omega_0$, $\arg(\omega'_k - \omega_0) \to \frac{\pi}{2} + \beta$, $\arg(\omega_k + \omega_0) \to \dfrac{3\pi}{2} + \beta$,

$$\left|\frac{\omega'_{k+1} - \omega_0}{\omega'_k - \omega_0}\right| \to 1, \qquad \left|\frac{\omega_{k+1} - \omega_0}{\omega_k - \omega_0}\right| \to 1.$$

Следующее утверждение показывает, что оператор $[\lambda f]$ (см. §4) сохраняет полуконформность на границе при $\lambda \in \mathbb{C}$ и сохраняет конформность на границе при вещественных λ.

Теорема 5.5. [54]. *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$. Если f полуконформна в $z = 1$, то и $[\lambda f]$ полуконформна в $z = 1$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Если f конформна в $z = 1$, то $[\lambda f]$ конформна в $z = 1$ для $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Причем в случае конформности существенно, что $\operatorname{Im} \lambda = 0$.

Наконец, приведем еще одно достаточное условие полуконформности в любой точке $\partial\Delta$.

Теорема 5.6. [54]. *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$ и для нее*

$$\limsup_{|z| \to 1^-} \left[(1 - |z|)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\right] = 0. \tag{5.6}$$

Тогда f ограничена в Δ и полуконформна в каждой точке $\partial\Delta$. Однако существуют функции из $\mathcal{U}_\alpha$, полуконформные во всех точках $\partial\Delta$, не удовлетворяющие (5.6).

В случае л.-и.с. ограниченной характеристики из полуконформности функции в $z = 1$ можно получить информацию о поведении этой функции не только в угле Штольца (см. теорему 5.4), но и некоторую информацию о $f(z)$ при произвольном приближении z к 1.

Теорема 5.7. [3, с. 260]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и.с. ограниченной характеристики, $f \in \mathfrak{M}$, f полуконформна в $z = 1$. Для $\zeta \in (0, 1)$ обозначим $Q(\zeta)$ поперечное сечение Δ, которое проходит через ζ и отображается функцией $w = f(z)$ на дугу окружности $\{w : |w - f(1)| = |f(\zeta) - f(1)|\}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\zeta_0 \in (0, 1)$ такое, что при $\zeta \in (\zeta_0, 1)$ и $z \in Q(\zeta)$*

$$1 - \varepsilon < \frac{|1 - z|}{1 - \zeta} < 1 + \varepsilon.$$

Для однолистных функций эту теорему получил A. Ostrowski [57], позже J. Ferrand [59] упростил ее доказательство.

Определение 5.4.*Область $T \subset \Delta$ называется $\between$ к Δ в точке $z = 1$, если $1 \in \partial T$ и в точке $z = 1$ у ∂T существует касательная, параллельная мнимой оси.*

Теорема 5.8. [3, с. 248]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с., $f, g \in \mathfrak{M}$ и $f \sim g$ в $z = 1$. Тогда $\mathfrak{C}(1, f) = \mathfrak{C}(1, g)$. Кроме того, для некоторой константы γ*

$$\liminf \arg f'(z) = \liminf \arg g'(z) + \gamma,$$

$$\limsup \arg f'(z) = \limsup \arg g'(z) + \gamma,$$

где $z \to 1$ или всюду по радиусу, или всюду в угле Штольца.

2^0. Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с. Фиксируем $f \in \mathfrak{M}$ и обозначим $\mathfrak{C}$ одно из компактных семейств $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$ или $\mathfrak{C}(f)$. Положим

$$\underline{\sigma} = \inf_{0 \le x < 1} \max_{g \in \mathfrak{C}} (1 - x^2)|g'(x)|, \overline{\sigma} = \sup_{0 \le x < 1} \min_{g \in \mathfrak{C}} (1 - x^2)|g'(x)|.$$

Так как $g'(0) = 1$, то $0 \le \underline{\sigma} \le 1, \quad 1 \le \overline{\sigma} \le \infty$.

Лемма 5.1.[3, с. 230]. *Существует только три возможности:*
I.$\underline{\sigma} = 0, \quad \overline{\sigma} = 1$: тогда существуют $\delta > 0$ и постоянная B такие, что для $0 \le x < 1$ и $g \in \mathfrak{C}$

$$(1 - x^2)|g'(x)| \le B(1 - x)^{\delta}.$$

II. $\underline{\sigma} = 1, \quad \overline{\sigma} = \infty$: тогда существуют $\delta > 0$ и постоянная $B > 0$ такие, что для $0 \le x < 1$ и $g \in \mathfrak{C}$

$$(1 - x^2)|g'(x)| \ge B(1 - x)^{-\delta}.$$

III. $\underline{\sigma} = \overline{\sigma} = 1$: тогда для $-1 < x < 1$

$$\min_{g \in \mathfrak{C}} (1 - x^2)|g'(x)| \le 1 \le \max_{g \in \mathfrak{C}} (1 - x^2)|g'(x)|.$$

Если $\mathfrak{C}$ содержит единственную функцию g_c (см. теорему 5.2), то в случае I $\mathrm{Re}\ c < 0, \quad \mathrm{Re}\ c > 0$ в случае II и $\mathrm{Re}\ c = 0$ в случае III.

D. M. Campbell и J. A. Pfaltzgraff исследовали устойчивость оператора $[\lambda f](z) = f_\lambda(z)$ (см. §4) в каждом из трех случаев леммы 5.1.

Теорема 5.9. [54]. *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$. Если для f реализуется случай I леммы 5.1, то и для f_λ реализуется I случай при $\lambda = \mu + i\nu$ таких, что $0 \le \mu \le 1$ и $|\nu| \le \dfrac{1-\mu}{\sqrt{\alpha^2-1}}$. Если для f реализуется II случай, то же верно и для f_λ при $\lambda = \mu + i\nu$ таких, что $1 \le \mu < \infty$, $|\nu| \le \dfrac{\mu-1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$. Если для f реализуется III случай, то существуют λ_1 и λ_2, $0 \le \lambda_1 \le 1 \le \lambda_2 < \infty$, такие, что для f_λ реализуются:*
случай I, если $0 \le \lambda < \lambda_1$;
случай III, если $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$;
случай II, если $\lambda_2 < \lambda < \infty$.

Кроме того, в [54] получена связь между $\mathfrak{C}(1, f)$ и $\mathfrak{C}(1, [\lambda f])$.

Лемма 5.2.[54]. *Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$g \in \mathfrak{C}(1, f) \Longleftrightarrow G(z) = \int_0^z (g'(s))^\lambda (1+s)^{2(\lambda-1)}\, ds \in \mathfrak{C}(1, [\lambda f]).$$

Заметим, что приведенные в теореме 5.9 оценки ν и μ неточные, так как опираются на неточную оценку $\arg f'(z)$ в $\mathcal{U}_\alpha$.

Определение 5.5.[3, с. 231]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с., $f \in \mathfrak{M}$. Функция f ¤¤ $e^{i\theta}$ ¤ —, если существует $x_1 \in (0,1)$ такое, что*

$$(1 - x_1^2)|g'(x_1)| < 1 \qquad \text{для всех } g \in \mathfrak{C}(e^{i\theta}, f). \tag{5.7}$$

Если (5.7) выполнено для всех $g \in \mathfrak{C}(f)$, будем говорить, что f —¤ ¤ ¤ — .

Таким образом, наличие у $f(z)$ в $e^{i\theta}$ свойства хорошей достижимости зависит не столько от самой f, сколько от $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$. Выполнение условия (5.7) означает, что реализуется I возможность леммы 5.1. Ch. Pommerenke отмечает, что определение 5.5 можно было бы изменить так, чтобы оно охватывало и II возможность леммы 5.1, однако при этом возникают некоторые дополнительные трудности.

Теорема 5.10. [3, с. 232]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с., $f \in \mathfrak{M}$.*
a) Если f имеет в $z = e^{i\theta}$ свойство хорошей достижимости, то существует $\delta = \delta(\theta, f) > 0$ и для любого угла Штольца W с вершиной в $z = 1$ существует постоянная $B(W) = B(W, f, \theta)$, такие, что для $z \in W$

$$\begin{aligned} f'(ze^{i\theta}, \zeta e^{i\theta})| &\le B(W)(1 - |z|^{\delta-1} \qquad \text{для всех } \zeta \in [0,1), \\ |g'(z)| &\le B(W)(1 - |z|)^{\delta-1} \qquad \text{для всех } g \in \mathfrak{C}(e^{i\theta}, f). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Существуют конечные угловые пределы

$$f(e^{i\theta},\zeta e^{i\theta}) = \lim_{z\to 1} f(ze^{i\theta},\zeta e^{i\theta}), \quad g(1) = \lim_{z\to 1} g(z), \tag{5.9}$$

причем первый — равномерный по $\zeta \in [0,1)$, второй — равномерный по $g \in \mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$.
б) Если f обладает свойством равномерно хорошей достижимости границы, то существует $\delta = \delta(f) > 0$ и для любого угла Штольца W с вершиной в $z = 1$ существует постоянная $B(W) = B(W, f)$, такие, что неравенства (5.8) выполняются для $z \in e^{i\theta}W \quad (0 \le \theta \le 2\pi), \quad \zeta \in [0,1), \quad g \in \mathfrak{C}(f)$. Существуют угловые пределы (5.9), причем первый — равномерный по $\zeta \in [0,1)$ и $\theta \in [0,2\pi]$, последний — равномерный по $g \in \mathfrak{C}(f)$.

Следствие 5.3. [3, с. 233]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с., функция $f \in \mathfrak{M}$ обладает свойством равномерно хорошей достижимости границы. Тогда f непрерывна в $\bar{\Delta}$ и существуют постоянные $\delta = \delta(f) > 0$ и $B = B(f)$ такие, что для $z_1, z_2 \in \bar{\Delta}$ выполняется условие Гельдера*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le B|z_1 - z_2|^{\delta}.$$

Используя лемму 5.1 D. M. Campbell и J. A. Pfaltzgraff [54] обобщили определение 5.5.

Определение 5.6.[54]. *Пусть E — дуга единичной окружности $\partial\Delta$, $\mathfrak{C}(E, f) = \cup_{\theta\in E}\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$. Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с.. Функция $f \in \mathfrak{M}$ имеет ¤ — —¤ E, если существует δ и постоянная B такие, что для любой функции $g \in \mathfrak{C}(E, f)$*

$$(1 - x^2)|g'(x)| \le B(1 - x)^{\delta} \qquad \text{для любого } x \in [0,1).$$

В крайних случаях ($E = \{e^{i\theta}\}$ и $E = \partial\Delta$) получаем здесь ситуацию из определения 5.5.

В [54] дано достаточное условие хорошей достижимости функции на дуге E.

Теорема 5.11. [54]. *Чтобы $f \in \mathcal{U}_\alpha$ была хорошо достижима на дуге $E \subset \partial\Delta$ достаточно, чтобы для $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$ реализовался I случай леммы 5.1 на конечном множестве точек $e^{i\theta} \in E$, а для остальных точек из E множество $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$ состояло только из одной функции $g_{c(\theta)}$, причем по всем таким функциям $g_{c(\theta)}$ $\sup \mathrm{Re}\, c(\theta) < 0$.*

Следствию 5.3 соответствует следующая

Теорема 5.12. [54]. *Если функция $f \in \mathcal{U}_\alpha$ имеет свойство хорошей достижимости на дуге $E \subset \partial\Delta$, то f удовлетворяет на E условию Гельдера с некоторыми положительными константами δ и B*

$$|f(z) - f(w)| \le B|z - w|^\delta, \qquad z, w \in E.$$

Из теорем 5.11 и 5.12 вытекает

Следствие 5.4. [54]. *Если $f \in V_k$ (определение см. в §6), то f непрерывна на $\partial\Delta$ за исключением не более чем $[\frac{k}{2} + 1]$ точек; кроме того, f удовлетворяет условию Гельдера на любой замкнутой дуге из $\partial\Delta$, не содержащей выше упомянутых не более чем $[\frac{k}{2} + 1]$ точек.*

Теорема 5.13. [3, с. 234]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с., функция $f \in \mathfrak{M}$ имеет в точке $z = 1$ свойство хорошей достижимости. Если $g \in \mathfrak{C}(1, f)$, т. е. $f(z, \zeta_n) \underset{\zeta_n \to 1^-}{\longrightarrow} g(z)$ равномерно внутри Δ, то $f(z, \zeta_n) \underset{\zeta_n \to 1^-}{\longrightarrow} g(z)$ равномерно в любом угле Штольца с вершиной в $z = 1$.*

Следствие 5.5. [3, с. 237]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и.с. ограниченной характеристики и $f \in \mathfrak{M}$. Множество точек $e^{i\theta}$, в которых f имеет свойство хорошей достижимости, всюду плотно в $\partial\Delta$.*

Для однолистной функции f свойство равномерно хорошей достижимости границы равносильно следующему метрическому свойству границы $f(\Delta)$.

Лемма 5.3.[3, с. 239]. *Пусть $f \in \mathfrak{S}$. Чтобы f имела свойство равномерно хорошей достижимости границы, необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывна в $\bar{\Delta}$ и для любых $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$ выполнялось условие*

$$\min[\operatorname{diam} f(L), \operatorname{diam} f(L')] \le Bd(f(e^{i\theta_1}), f(e^{i\theta_2})),$$

где $L = \{e^{i\theta} : \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$, $L' = \{e^{i\theta} : \theta_2 \le \theta \le \theta_1 + 2\pi\}$, а постоянная B зависела только от f.

Пусть $f \in \mathfrak{S}$ и область $f(\Delta)$ ограничена кривой Жордана J. L. Ahlfors [60] нашел необходимое и достаточное условие того, что f может быть продолжена до квазиконформного отображения всей

z-плоскости на всю w-плоскость: для любых $w_1, w_2 \in J$ должна существовать постоянная $B = B(f)$ такая, что

$$\min(\text{diam } J_0, \text{diam } J_1) \le B|w_1 - w_2|,$$

где J_0 и J_1 — части, на которые разбивается кривая J точками w_1 и w_2. Обозначим $\mathfrak{D}(K)$ $(1 \le K < \infty)$ подкласс $\mathfrak{S}$, состоящий из функций f, для которых

$$d(f(z_1), f(z_2)) \le K|f(z_1) - f(z_2)| \qquad \text{для всех } z_1, z_2 \in \Delta;$$

$\mathfrak{D} = \cup_{k\ge1}\mathfrak{D}(K)$. Таким образом, в $\mathfrak{D}(K)$ внутреннее расстояние $d(f(z_1), f(z_2))$ между точками $f(z_1)$ и $f(z_2)$ эквивалентно евклидову.

Теорема 5.14. [3, с. 241]. *Чтобы функцию $f \in \mathfrak{S}$ можно было продолжить до квазиконформного отображения $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$, необходимо и достаточно, чтобы f принадлежала $\mathfrak{D}$ и обладала свойством равномерно хорошей достижимости границы.*

В связи с теоремой 5.14 интересно знать свойства семейств $\mathfrak{D}(K)$.

Теорема 5.15. [3, с. 241], [61, с. 105]. *1) Каждое семейство $\mathfrak{D}(K)$ линейно-инвариантно и компактно*, $\operatorname{ord} \mathfrak{D}(K) < 2$.
2) Если $f \in \mathfrak{D}(K)$, то f непрерывна в $\bar{\Delta}$ со значениями в $\bar{\mathbb{C}}$, f однолистна в $\bar{\Delta}$ за исключением разве лишь точек $\partial\Delta$, в которых принимает значение ∞ (их не более $[2\pi K]$).
3) Для $f \in \mathfrak{D}(K)$ обозначим $\alpha = \operatorname{ord} f$, тогда

$$|f(z_1) - f(z_2)| \ge K_1|z_1 - z_2|^\alpha \qquad \text{для всех } z_1, z_2 \in \Delta,$$

где постоянная $K_1 > 0$ зависит только от K.
4) Для $f \in \mathfrak{D}(K)$ и $0 \le r \le \rho < 1$

$$|f'(\rho\zeta)| > \frac{1}{8}|f'(r\zeta)| \left(\frac{1-\rho}{1-r}\right)^{\alpha-1} \qquad \forall\zeta \in \partial\Delta. \tag{5.10}$$

Замечание. В действительности в [61] доказано большее — для функций $f \in \mathfrak{D}$ получена своеобразная теорема регулярности убывания $|f(z)|$: для любого $\zeta \in \partial\Delta$ величина $\dfrac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}|f'(r\zeta)|$ возрастает по $r \in [0, 1)$. Найден оптимальный (в том смысле, что нельзя уменьшить α) множитель $\dfrac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1-r)^{\alpha-1}}$ для $|f'(r\zeta)|$, обеспечивающий рост указанной величины (сравни с теоремой 5.19). То же верно и для функций из $\mathcal{U}_\alpha$; более того, в $\mathcal{U}_\alpha$ может быть доказана теорема регулярности убывания, подобная теореме регулярности роста из §5, 6^0. Заметим также, что в (5.10) вместо $1/8$ можно поставить точное значение $2^{-\alpha-1}$.

3^0. В случае III леммы 5.1 тоже можно дать геометрическую характеристику образа $f(\Delta) = F$ при дополнительных предположениях о $\mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$.

Определение 5.7.[3, с. 243]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с., $f \in \mathfrak{M}$. Если существует постоянная B такая, что для любой функции $g \in \mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$*

$$|g(x)| < B \qquad \text{для всех } x \in (-1,1),$$

то f имеет в $e^{i\theta}$.

Функции (2.12) имеют в $z = \pm 1$ свойство чистого накрытия. Введенный термин оправдывает следующая

Теорема 5.16. [3, с. 243]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — л.-и.с. ограниченной характеристики и функция $f \in \mathfrak{M}$ имеет в $e^{i\theta}$ свойство чистого накрытия. Тогда для любой функции $g \in \mathfrak{C}(e^{i\theta}, f)$*

$$\frac{1}{B_1} < (1-x^2)|g'(x)| < B_1 \qquad \text{для всех } x \in (-1,1), \tag{5.11}$$

где число B_1 зависит только от θ и f. Кроме того, существует постоянная B_2 такая, что для любого натурального n существуют: точка $w_n \in \mathbb{C}$; числа $0 < r_{n1} < \ldots < r_{nn} < 1$, $\lim\limits_{ntoo} r_{n1} = 1$; попарно не пересекающиеся круги $H_{n\nu} \subset F$ с центрами в $f(e^{i\theta} r_{n\nu})$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, такие, что проекции $H_{n\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ на плоскость полностью покрывают круги $\{w : |w - w_n| < B_2 d_f(e^{i\theta} r_{n\nu})\}$.

Таким образом, функции из $\mathfrak{S}_p$ не могут иметь в какой-либо точке свойство чистого накрытия. А из (5.11) следует, что реализуется случай III леммы 5.1, поэтому свойство чистого накрытия и хорошей достижимости — взаимно исключающие.

Следствие 5.6. [3, с. 246]. *Пусть $f \in LS$ и отображает Δ на универсальную накрывающую поверхность некоторой ограниченной конечносвязной области, не имеющей изолированных граничных точек.*

Тогда для каждой точки $e^{i\theta}$ выполняется одно из двух: или существует полуокрестность $e^{i\theta}$, в которой f однолистна, или f имеет в $e^{i\theta}$ свойство чистого накрытия.

Из теоремы 5.8 следует, что если $f \sim g$ в $z = 1$, то они одновременно имеют или не имеют в $z = 1$ свойство чистого накрытия; то же и для свойства хорошей достижимости. В отличие от свойств полуконформности и конформности (см. теорему 5.5) оператор $[\lambda f]$ не сохраняет свойство чистого накрытия в $z = 1$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$ [54].

4^0. Определение 5.8(см., например, [62, с. 267,305.]) *Аналитическая в Δ ¤¤ ¤ $\zeta \in \partial\Delta$ ¤¤ ¤¤ $c \in \mathbb{C}$, если существует кривая Жордана $\Gamma \subset \Delta$, оканчивающаяся в ζ и такая, что $f(z) \underset{\Gamma\ni z\to\zeta}{\longrightarrow} c$.* **ц** *$f$ ¤¤ $\zeta \in \partial\Delta$ ¤—¤ c, если $f(z) \to c$ при $z \to \zeta$ в любом угле Штольца с вершиной в ζ. Функция f имеет в точке $\zeta \in \partial\Delta$ конечную угловую производную c, если $f'(z) \to c \neq \infty$ при $z \to \zeta$ в любом угле Штольца.*

Теорема 5.17. [54]. *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$ и имеет в $\zeta \in \partial\Delta$ угловой предел c, причем $f(z) \neq c$ в Δ. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*
i) f имеет в ζ угловую производную $b \in \mathbb{C}$;
i') f' имеет в ζ асимптотическое значение b;
ii) $\dfrac{f(z)-c}{z-\zeta}$ имеет в ζ угловой предел b;
ii') $\dfrac{f(z)-c}{z-\zeta}$ имеет в ζ асимптотическое значение b.

Теорема 5.17 обобщает на случай $\mathcal{U}_\alpha$ результат Ch. Pommerenke [62, гл. 10] для класса $\mathfrak{S}$, однако в случае $\mathfrak{S}$ не требуется предполагать $f(z) \neq c$ — оно выполняется всегда. Доказательство теоремы 5.16 опирается на лемму, имеющую самостоятельный интерес.

Лемма 5.4.[54]. *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$ и $f(z) \neq c$ в Δ, тогда для всех $z \in \Delta$*

$$\left|\frac{f(z)-c}{(1-|z|^2)f'(z)}\right| \geq \frac{1}{2\alpha}, \qquad \left|\log(1-\frac{f(z)}{c})\right| \leq \alpha \log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Неравенства точные, экстремальной является функция k_θ из (2.4). Кроме того, функция $\dfrac{f(z)-c}{z-\zeta}$ — нормальная для всех $\zeta = e^{i\theta}$.

Требование $f(z) \neq c$ в лемме 5.4 существенно.

Определение 5.8.[54]. *Если f аналитична в Δ, то — f $e^{i\theta}$ называется супремум неотрицательных δ таких, что существует кривая $\Gamma \subset \Delta$, оканчивающаяся в $e^{i\theta}$ и лежащая в некотором угле Штольца, для которой*

$$\liminf_{\Gamma \ni z \to e^{i\theta}} [(1-|z|)^{\delta} |f(z)|] > 0.$$

Теорема 5.18. [54]. *Пусть $f \in LS$ и существует конечный $\lim\limits_{r\to 1^-} \arg f'(re^{i\theta})$ для некоторого $\theta \in [0, 2\pi)$. Если существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что при $z \to 1$ в угле Штольца*

$$(1-z)e^{i\theta}\frac{f''(ze^{i\theta})}{f'(ze^{i\theta})} \to c+1,$$

то угловой порядок f в $z = e^{i\theta}$ равен $\max(0, c)$.

Для функций класса V_k отсюда получается

Следствие 5.7. [54]. *Для $f \in V_k$ угловой порядок в $e^{i\theta}$ равен* $\max(0, d\mu(\theta) - 1)$, *где $\mu(t)$ — функция из интегрального представления f (см. §6, 3^0).*

5^0. В этом пункте речь пойдет о теореме регулярности в $\mathcal{U}_\alpha$. Для непрерывной в Δ функции ϕ обозначим $M(r, \phi) = \max\limits_{|z|=r} |\phi(z)|$.

Теорема 5.19. (регулярности). *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$. Тогда*
1) при каждом $\phi \in [0, 2\pi)$ величины $|f'(re^{i\theta})|\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ и
$M(r, f')\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ убывают по r на $[0, 1)$, причем убывание строгое, если $f \neq k_\theta$ (см. (2.4));
2) существуют постоянные $\delta^0 \in [0, 1]$ и $\phi_0 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\delta^0 = \lim_{r\to 1^-}\left[M(r, f) 2\alpha \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] = \lim_{r\to 1^-}\left[M(r, f')\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right] =$$

$$= \lim_{r\to 1^-}\left[|f'(re^{i\phi_0})|\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right] = \lim_{r\to 1^-}\left[|f(re^{i\phi_0})| 2\alpha \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] =$$

$$= \lim_{r\to 1^-}\left[M(r, f'')\frac{(1-r)^{\alpha+2}}{2^{\alpha-1}(\alpha+1)}\right] = \lim_{r\to 1^-}\left[|f''(re^{i\phi_0})|\frac{(1-r)^{\alpha+2}}{2^{\alpha-1}(\alpha+1)}\right] =$$

$$= \lim_{r\to 1^-}\left[\int_0^r M(\rho, f'')d\rho\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right] = \lim_{r\to 1^-}\left[\int_0^r |f''(\rho e^{i\phi_0})|d\rho\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right] =$$

$$= \lim_{r\to 1^-}\left[M(r, d(f(z),0)2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] = \lim_{r\to 1^-}\left[d(f(re^{i\phi_0},0)2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] =$$

$$= \lim_{r\to 1^-}\left[M(r, l(f(z),0)2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] = \lim_{r\to 1^-}\left[l(f(re^{i\phi_0},0)2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] =$$

$$= \lim_{r\to 1^-}\left[\max_{\phi}\int_0^r |f'(\rho e^{i\phi})|d\rho\, 2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] =$$

$$= \lim_{r\to 1^-}\left[\int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})|\, d\rho 2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right];$$

3) $\delta^0 = 1$ только для функции (2.4).

При $\alpha = 2$ для функций $f \in \mathfrak{S}$ п. 1), 3) и первые 4 равенства из п. 2) теоремы 5.19 представляют собой известные результаты ([63], [64], [65]). D. M. Campbell [22] доказал п. 1) и п. 3) теоремы 5.19; он также доказал 2-е и 4-е равенства п. 2) в случае $\alpha \le 2$ и $f \in \mathfrak{S}\cap\mathcal{U}_\alpha$; он предположил, что 2-е и 4-е равенства п. 2) выполнены для функций $f \in V_{2\alpha} \subset \mathcal{U}_\alpha$ $(V_{2\alpha} \ne \mathcal{U}_\alpha)$. В [66] доказан п. 2) теоремы 5.19 для всех функций $f \in \mathcal{U}_\alpha$. Теорема 5.19 характеризует регулярность роста исследуемых величин.

Для функций из $\mathfrak{S}\cap\mathcal{U}_\alpha$ D. M. Campbell'ом доказана также

Теорема 5.20. [22]. *Пусть $1 \le \alpha \le 2$ и $f \in \mathfrak{S}\cap\mathcal{U}_\alpha$, $\theta \in \mathbb{R}$ фиксировано. Тогда величины*

$$\left\{\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}-1\right]\right\}^{-1}|f(re^{i\theta})|,\quad \left\{\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}-1\right]\right\}^{-1}M(r,f)$$

убывают по $r \in [0,1)$, причем убывание строгое, если $f \ne k_\theta$. При $r \to 1^-$ пределы записанных величин равны 1 только для функции k_θ.

При $\alpha = 2$ эта теорема доказана W. K. Heyman'ом [64].

В связи с п.1) теоремы 5.19 отметим еще подобный результат Ch. Pommerenke, полученный им при доказательстве леммы 2.6 из [1]. Он доказал, что для $f \in \mathcal{U}_\alpha$ величина $M(r,f)\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{r(1+r)^{\alpha-1}}$ убывает по $r \in (0,1)$. Однако здесь всегда $M(r,f) = o((1-r)^{-\alpha-1})$ при $r \to 1^-$.

Число δ_0 из теоремы 5.19 называется *числом Хеймана функции* f, а число ϕ_0 — *направлением максимального роста функции* f. Возникает естественное разбиение $\mathcal{U}_\alpha$ на дизъюнгтные подклассы $\mathcal{U}_\alpha(\delta^0)$, $0 \leq \delta^0 \leq 1$; функциям из $\mathcal{U}_\alpha(\delta^0)$ соответствует число Хеймана δ^0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.9. [66]. **ю¤¤ ¤ (...)** *функции* $f \in \mathcal{U}_\alpha$ *называется каждое* $\theta \in [0, 2\pi)$ *такое, что*

$$\lim_{r \to 1^-} |f'(re^{i\theta})| \frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}} = \delta_\theta > 0.$$

При этом число δ_θ *называется* **ш¤ f, ¤ ... θ f.**

Есть функции (например, $f(z) = z$), не имеющие н.и.р. Функции класса $\mathcal{K} = \mathcal{U}_1$ и $\mathfrak{S}$ имеют не более одного н.и.р., которое совпадает с направлением их максимального роста [64]. Иная ситуация в $\mathcal{U}_\alpha$, $al > 1$.

ТЕОРЕМА 5.21. [67]. *Пусть* $\alpha_2 = 1.241\ldots$ — *единственный корень уравнения* $11\alpha^3 + 2\alpha^2 - 13\alpha - 8 = 0$ *на интервале* $(1, \infty)$; *для натуральных* $n \geq 3$

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{n^2e^2 - (e+1)^2} + n}{\sqrt{n^2e^2 - (e+1)^2} - n}, \quad g_{n,\alpha}(z) = \int_0^z (1 - s^n)^{-\alpha-1}\, ds.$$

Тогда при $\alpha \geq \alpha_n$ *функция* $g_{n,\alpha} \in \mathcal{U}_\alpha$ *и имеет ровно* n *н.и.р. При* $\alpha \geq 1 + \dfrac{2}{e-1}$ *функция*

$$g_{\infty,\alpha}(z) = \int_0^z \left(\frac{1 - e^{-\pi}}{1 - \exp\left(-\pi \dfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)} \right)^{\alpha+1} \frac{d\xi}{(1+\xi)^2} \in \mathcal{U}_\alpha$$

и имеет счетное множество н.и.р. С другой стороны, для $f \in \mathcal{U}_\alpha$ *множество н.и.р. не более чем счетно.*

В некоторых задачах важно иметь информацию о числах Хеймана функций $f(z,a)$, $a \in \Delta$, если $f \in \mathcal{U}_\alpha(\delta_0)$.

ТЕОРЕМА 5.22. [66]. *Пусть* $f \in \mathcal{U}_\alpha$.
1) Если $f \in \mathcal{U}_\alpha(0)$, *то* $f(z,a) \in \mathcal{U}_\alpha(0)$ *при всех* $a \in \Delta$.

2) Если $f \in \mathcal{U}_\alpha(\delta^0)$, $\delta^0 \in (0,1)$, то для любого $\delta \in [\delta^0, 1)$ существует $a \in \Delta$ такое, что $f(z,a) \in \mathcal{U}_\alpha(\delta)$.
3) Если $f \in \mathcal{U}_\alpha(\delta_0)$, $\delta^0 \in (0,1)$, $\alpha > 1$, и существует интервал $(x', x'') \subset [0, 2\pi)$, свободный от н.и.р. f, то для любого $\delta \in (0,1)$ существует $a \in \Delta$ такое, что $f(z,a) \in \mathcal{U}_\alpha(\delta)$.

Доказательство этой теоремы опирается на лемму, имеющую самостоятельный интерес.

Лемма 5.5.[66]. *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$, $a \in \Delta$. При фиксированном $\phi \in [0, 2\pi)$ обозначим $R(r) = \left|\dfrac{re^{i\phi} + a}{1 + \bar{a}re^{i\phi}}\right|$, $\gamma(r) = \arg\dfrac{re^{i\phi} + a}{1 + \bar{a}re^{i\phi}}$, $re^{i\phi} \neq -a$. Чтобы ϕ было н.и.р. для $f(z,a)$, необходимо и достаточно, чтобы $e^{i\phi} = \dfrac{e^{i\gamma} - a}{1 - \bar{a}e^{i\gamma}}$, где γ — н.и.р. функции f. При этом*

$$\lim_{r \to 1^-}\left[|f'(re^{i\gamma})|\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right] = \lim_{r \to 1^-}\left[|f'(R(r)e^{i\gamma(r)})|\frac{(1-R(r))^{\alpha+1}}{(1+R(r))^{\alpha-1}}\right].$$

Обозначим $\mathfrak{S}(\delta_0)$ подкласс функций из $\mathfrak{S}$, которым соответствует число Хеймана δ_0.

Следствие 5.8. [66]. *Если $\delta_0 > 0$, то для любой функции $f \in \mathfrak{S}(\delta_0)$ и любого $\delta \in (0,1)$ существует $a \in \Delta$ такое, что $f(z,a) \in \mathfrak{S}(\delta)$.*

Таким образом, для получения информации о функциях из $\mathfrak{S}(\delta_0)$, $\delta_0 \in (0,1)$, достаточно иметь соответствующую информацию о $\mathfrak{S}(\delta)$ с δ сколь угодно близким к 1, и знать, как трансформируется эта информация при преобразованиях (1.1).

Следствие 5.9. [66]. *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$. Для любого $\theta \in [0, 2\pi)$ и любой дуги окружности в широком смысле $\Gamma \subset \Delta$, ортогональной $\partial\Delta$, в точке $e^{i\theta}$ существует не зависящий от Γ предел*

$$\lim_{\Gamma \ni \zeta \to e^{i\theta}}\left[|f'(\zeta)|\frac{(1-|\zeta|)^{\alpha+1}}{(1+|\zeta|)^{\alpha-1}}\right] = \delta_\theta \in [0,1].$$

Это имеет место, в частности, и в классе $\mathfrak{S} \subset \mathcal{U}_2$. Следствие 5.9 перестает быть верным, если в нем убрать требование $\Gamma \perp \partial\Delta$.

Теорема 5.23. [66]. *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha(\delta^0)$, $\delta^0 > 0$; θ — одно из н.и.р. f, которому соответствует число Хеймана $\delta_\theta \in (0, \delta^0]$. Обозначим*

$\Phi(\zeta) = \arg f'(\rho(\zeta)e^{i\theta})$, где

$$\rho(\zeta) = \sqrt{\frac{(1-r_0^2)^2}{4r_0^4 C^2(\zeta)} - \frac{1}{r_0^2}} - \frac{1}{2C(\zeta)}\left(1 - \frac{1}{r_0^2}\right), \quad r_0 = \sin\eta,$$

$$C(\zeta) = \mathrm{Re}\,\{\zeta e^{-i\theta}\} - \mathrm{tg}\eta|\mathrm{Im}\,\{\zeta e^{-i\theta}\}|.$$

Тогда для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ *и любого* $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{f^{(n)}(\zeta)}{k_\theta^{(n)}(\zeta)} e^{-i\Phi(\zeta)} \underset{R\to 1^-}{\longrightarrow} \delta_\theta$$

равномерно в $\quad \Delta(R,\eta) = \{\zeta \in \Delta :\ \arg(1-\zeta e^{-i\theta}) < \eta,\ R < |\zeta| < 1\}.$

Таким образом, если у функции $f \in \mathcal{U}_\alpha$ есть н.и.р. θ, то поведение функций $f^{(n)}$ и $k_\theta^{(n)}$ мало отличается в угловой области $\Delta(R,\eta)$.

В случае $n = 0, 1$ теорема 5.23 в несколько более слабой формулировке доказана в [64, с. 131] для функций, $p-$листных в среднем по окружности в Δ (в частности, и для однолистных функций); более простое доказательство этого результата для функций класса $\mathfrak{S}$ дано Г. И. Мелентьевой [68, с. 136] с использованием метода площадей. Еще проще доказательство теоремы 5.23, использующее линейную инвариантность $\mathcal{U}_\alpha$ и теорему 5.22.

Следствие 5.10. [66]. *Пусть* $f \in \mathcal{U}_\alpha(\delta^0)$, $\quad \delta^0 > 0$; $\quad \theta$ *— н.и.р. функции* f, *ему соответствует число Хеймана* $\delta_\theta > 0$. *Тогда для каждого* $n = 2, 3, 4, \ldots$ *существует*

$$\lim_{r\to 1^-} [|f^{(n)}(re^{i\theta})|(1-r)^{\alpha+n}] = \delta_\theta 2^{\alpha-1}(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1).$$

Для функций класса $\mathfrak{S}$ этот результат был получен И. Е. Базилевичем [69].

Теорема 5.24. [66]. *Для любой функции* $f \in \mathcal{U}_\alpha(\delta^0)$ *и любого* $\delta \in [0, \delta^0]$ *существует семейство функций* $\psi(z|\lambda) \in \mathcal{U}_\alpha(\delta)$, $\quad \lambda \in (0,1)$, *такое, что* $\psi(z|\lambda) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} f(z)$ *равномерно внутри* Δ.

Теорема 5.24 неверна при $\delta > \delta^0$ ни для какой функции $f \in \mathcal{U}_\alpha(\delta^0)$. Для функций из $\mathfrak{S}(\delta^0)$ эта теорема была доказана в [70].

Следствие 5.11. [66]. *Если* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n \in \mathcal{U}_\alpha$ *и* $C_n(\delta) = \sup_{f \in \mathcal{U}_\alpha(\delta)} |c_n|$, *то* $C_n(\delta)$ $(0 \le \delta \le 1)$ — *невозрастающая функция.*

Если $f \in \mathcal{U}_\alpha(\delta^0)$, то интересно, как быстро $2\alpha M(r,f)\left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^\alpha$ может стремиться к δ^0 при $r \to 1^-$ (см. теорему 5.19).

Теорема 5.25. [66]. *Пусть* $\alpha \ge 2$. *Для любого* $\delta^0 \in [0,1)$ *и любой функции* $\varepsilon(r) > 0$, $r \in [0,1)$, *такой, что* $\varepsilon(r) \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} 0$, *существует* $f \in \mathcal{U}_\alpha(\delta^0)$, *для которой*

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{2\alpha M(r,f)\left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^\alpha - \delta^0}{\varepsilon(r)} = \infty.$$

Таким образом, величина $2\alpha M(r,f)\left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^\alpha$ может стремиться к δ^0 сколь угодно медленно. В классе $\mathfrak{S}$ теорема 5.25 была доказана Н. А. Широковым [71].

§ 6. Частные случаи линейно-инвариантных семейств. Подклассы $\mathcal{U}_\alpha$

1^0. Пусть $A \subset \mathbb{C}$; a, b, c, d — фиксированные комплексные числа. Далее в тексте будем придерживаться обозначения

$$\frac{aA+b}{cA+d} = \left\{ \frac{az+b}{cz+d},\ z \in A \right\}.$$

Обозначим $\mathfrak{G} \subset LS$ семейство функций $f(z)$, отображающих Δ на универсальную накрывающую поверхность некоторой области $G = G_f \subset \mathbb{C}$; для постоянной $K > 1$ обозначим $\mathfrak{G}_K \subset \mathfrak{G}$ — множество всех функций $f \in \mathfrak{G}$, для которых существуют точки $a, b \in \mathbb{C}$, $a \notin G_f$, $b \notin G_f$ такие, что

$$K^{-1}|b-a| \le d_f(z) \le |f(z)-a| \le K|b-a| \quad \forall z \in \Delta. \tag{6.1}$$

То есть для получения интересных свойств $\mathfrak{G}$ вводится ограничение (6.1) вместо ограничения на порядок семейства. В [1] получены следующие три теоремы.

Теорема 6.1. *Для любого $K > 1$ семейство $\mathfrak{G}_K$ или пусто, или линейно-инвариантно и нормально. Обратно, если $\mathfrak{M}$ — нормальное л.-и.с. и $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$, то $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}_K$ при некотором K.*

Функция $f \in \mathfrak{G}$ принадлежит классу Неванлинны (выполнено условие (1.4)), если и только если $E_f = \mathbb{C} \setminus G_f$ имеет положительную емкость (см.[72]). Этот результат дополняет

Теорема 6.2. *Семейство $\mathfrak{G}(\kappa)$ $(\kappa > 0)$ функций $f \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих для всех $a \in \Delta$ условию*

$$\operatorname{cap} \frac{d_f(a)}{E_f - f(a)} \geq \kappa,$$

является л.-и.с. ограниченной характеристики. Обратно, если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$ — л.-и.с. ограниченной характеристики, то $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}(\kappa)$ для некоторого $\kappa > 0$.

Наконец, сформулируем еще одно достаточное условие принадлежности функции классу Неванлинны.

Теорема 6.3. *Пусть $f \in \mathfrak{G}$, G_f конечносвязная и не имеет изолированных граничных точек. Тогда f принадлежит некоторому $\mathfrak{G}(\kappa)$, $\kappa > 0$.*

2^0. В этом пункте рассматриваются такие функции $f \in \mathcal{U}_\alpha$, у которых $f^{(n)} \in LS$ для любых натуральных n.

Определение 6.1.[73]. *Пусть f аналитична в Δ и удовлетворяет в Δ некоторому свойству $\mathcal{A}$. Это свойство $\mathcal{A}$ называется —, если оно предполагает, что $f'(0) \neq 0$; кроме того, если f имеет свойство $\mathcal{A}$, то и функция $bf(z) + c$ должна иметь свойство $\mathcal{A}$ для всех $b, c \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$.*

Будем говорить, что f имеет свойство $\mathfrak{S}$, если f однолистна в Δ; f имеет свойство $\mathcal{U}_\alpha$, если $\dfrac{f(z) - f(0)}{f'(0)} \in \mathcal{U}_\alpha$. Эти свойства являются допустимыми.

Если $\mathcal{A}$ — допустимое свойство, обозначим $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ множество всех аналитических в Δ функций $f(z) = z + \dots$ таких, что $f^{(n)}$ имеют свойство $\mathcal{A}$ для всех натуральных $n \geq 0$;

$$A = \mathcal{T}(\mathcal{A}) = \sup\{|a_2| : \ f \in \mathcal{T}(\mathcal{A})\}.$$

S. M. Shah и S. Y. Trimble [73] доказали, что $\frac{\pi}{2} \le A(\mathfrak{S}) < 1.7208$, $\frac{1}{2} \le A(\mathcal{U}_1) < 0.68379$. Ими также доказана

Теорема 6.4. [73]. *Если $\mathcal{A}$ — допустимое свойство и $A < \infty$, то для всех функций $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$*

1) f — целая трансцендентная функция 1-го порядка и конечного типа $\le 2A$;

2) $|f(z)| \le \dfrac{\exp(2A|z|) - 1}{2A}, \quad 0 \le |z| < \infty$;

3) $|f^{(n)}(z)| \le (2A)^{n-1} \exp(2A|z|), \quad z \in \mathbb{C}, \, |a_n| \le \dfrac{(2A)^{n-1}}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$

Теорема 6.4 справедлива для $f \in \mathcal{T}(\mathcal{U}_\alpha)$. Для семейства $\mathcal{T}(\mathcal{U}_\alpha)$ D. M. Campbell [13] доказал, что

$$\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2} \le A(\mathcal{U}_\alpha) \le \alpha. \tag{6.2}$$

Таким образом, $A(\mathcal{U}_\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \to \infty$. В действительности, можно доказать (см. [125]), что в правой части (6.2) неравенство строгое для всех $\alpha \ge 1$.

В [13] исследовано поведение $\mathcal{U}_\beta$-радиусов производных $f^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ для произвольной аналитической функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Теорема 6.5. [13]. *Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, R — радиус сходимости ряда; обозначим $r_n = r_n(\beta)$ — $\mathcal{U}_\beta$-радиус функции $f^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда*

$$\liminf_{n\to\infty} n r_n \le 2\beta R, \qquad \frac{R \log 2}{2 + \sqrt{3}} \le \limsup_{n\to\infty} n r_n.$$

Если существует такое натуральное N, что $a_{n+1} \ne 0$ для всех $n \ge N$, то

$$\liminf_{n\to\infty} n \sqrt[n]{r_N r_{N+1} \cdots r_n} \le 2\beta e R.$$

Если существует такое натуральное N, что последовательность $\left\{\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right\}_{n=N}^{\infty}$ не убывает, то

$$\frac{R\log 2}{2+\sqrt{3}} \le \liminf_{n\to\infty} nt_n \le \limsup_{n\to\infty} nr_n \le 2\beta R.$$

Аналогичный результат в случае, когда r_n — радиусы однолистности функций $f^{(n)}$, ранее получен в [74].

Теорема 6.6. [13]. *Пусть f — аналитическая в Δ функция. Если существует такое натуральное N, что для всех целых $n \ge N$*

$$F_n(z) = \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(0)}{f^{(n+1)}(0)} \in \mathcal{U}_{kn^{1-\varepsilon}},$$

где $k > 0$, $\varepsilon > 0$ и $kN^{1-\varepsilon} \ge 1$, то f — целая трансцендентная функция.

Эта теорема обобщает результаты S. M. Shah и S. Y. Trimble. В частности, при $\varepsilon = 1$, $k = 1$ получается результат из [73] в случае $F_n \in \mathcal{U}_1 = \mathcal{K}$; при $\varepsilon = 1$ получается результат из [75] в случае $F_n \in \mathfrak{S}$.

В [13] исследована также зависимость порядка, левого порядка и типа целой трансцендентной функции от поведения $\mathcal{U}_\beta$-радиусов функций $f^{(n)}$.

3^0. Этот и последующий пункты §6 посвящены л.-и.с., имеющим интегральное представление. Из хорошо известных семейств мы остановимся только на трех: классе выпуклых функций $\mathcal{K}$ (см. §1, 1^0), классе почти выпуклых функций C и классах функций с ограниченным граничным вращением V_k, $k \ge 2$. При этом мы преследуем цель: сравнить основные характеристики этих классов (теоремы искажения и вращения, оценки коэффициентов) с соответствующими характеристиками в $\mathcal{U}_\alpha$. Мы оставляем в стороне многие свойства этих и других л.-и.с. (так же, как и класса $\mathfrak{S}$), ибо в этом направлении существует обширная литература (см., например [76]). Кроме этого, мы уделяем внимание важному в некоторых задачах в $\mathcal{U}_\alpha$ классу $\mathcal{U}'_\alpha$, имеющему интегральное представление с комплексной мерой, а также классу $\mathcal{U}^*_\alpha$.

В классе выпуклых функций $\mathcal{K}$ известно следующее интегральное представление: $f \in \mathcal{K}$, если и только если существует не убывающая на $[0, 2\pi]$ функция $\mu(t)$ с полной вариацией 1, для которой

$$f'(z) = \exp[-2\int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{-it})\, d\mu(t)]. \tag{6.3}$$

Подобное интегральное представление имеет место и в V_k, $k \geq 2$ [8], [77]: $f \in V_k$, если и только если выполняется (6.3) с некоторой вещественной функцией ограниченной вариации $\mu(t)$, удовлетворяющей условию

$$\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1, \qquad \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \leq \frac{k}{2}. \tag{6.4}$$

Функции класса V_k имеют простой геометрический смысл [8]: $f \in V_k$, если и только если для каждого $r \in (0,1)$ полная вариация угла наклона касательной к образу окружности $\{z : |z| = r\}$ не превосходит $k\pi$. Поэтому V_k называют классами функций с ограниченным граничным вращением. Из геометрического смысла V_k следует их линейная инвариантность [78], а из оценки 2-го коэффициента: $|a_2| \leq k/2$ (это следует из (6.3) и (6.4)), получаем ord $V_k = k/2$; $V_2 = \mathcal{K} = \mathcal{U}_1$.

Класс C почти выпуклых функций [4] является подклассом $\mathfrak{S}$, он состоит из всех функций вида

$$f(z) = \int_0^z g'(s)p(s)\, ds,$$

где $g \in \mathcal{K}$, $p(z) = 1 + b_1 + \ldots$ — любая аналитическая в Δ функция указанного вида, для которой существует $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ такое, что $\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}p(z)\} > 0$ в Δ. Z. Lewandowski [79], [80] доказал, что функции из C, и только они, обладают тем свойством, что дополнение однолистной области $f(\Delta)$ является объединением лучей, не имеющих общих точек, кроме, может быть, начальной. Отсюда, в частности, следует линейная инвариантность C, а из того, что $z(1-z)^{-2} \in C \subset \mathfrak{S}$, следует: ord $C = 2$.

К определению класса $\mathcal{U}'_\alpha$ приводит следующая задача. Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha$, можно ли f' записать как

$$\prod_{j=1}^{n} (g'_j(z))^{\alpha_j}, \qquad g_j \in \mathcal{K}, \qquad \alpha_j \in \mathbb{C}, \tag{6.5}$$

или как предел функций вида (6.5)? Ответ на этот вопрос положительный, т. к. $f'(z) = \lim_{r\to 1^-} f'(rz)$, причем можно брать $\alpha_j > 0$. Однако при этом в (6.5) α_j и g_j взаимосвязаны; g_j, вообще говоря, зависят от α_j для каждого j. Если же фиксировать набор $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \cdots, n$, а в качестве g_j брать любые функции из $\mathcal{K}$, то из теоремы 1.1 следует, что функция (6.5) будет производной некоторой функции из $\mathcal{U}_\alpha$, если и только если

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j - 1\right| + \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \le \alpha. \tag{6.6}$$

Обозначим $\mathcal{U}'_\alpha$ замыкание множества функций вида (6.5), для которых g_j — произвольные функции из $\mathcal{K}$, а α_j удовлетворяют (6.6). Таким образом, $\mathcal{U}'_\alpha$ компактен в топологии равномерной сходимости внутри Δ, $\mathcal{U}'_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$. В $\mathcal{U}'_\alpha$ имеет место интегральное представление (6.3) с комплекснозначной функцией ограниченной вариации $\mu(t)$, удовлетворяющей условию

$$\left|\int_0^{2\pi} d\mu(t) - 1\right| + \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \le \alpha \tag{6.7}$$

((6.6) — дискретный аналог (6.7)). В [10] (см. также [11]) доказано, что $\mathcal{U}'_\alpha$ — л.-и.с. порядка α, $\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$ при $\alpha < 1$, $\mathcal{U}'_1 = \mathcal{U}_1 = \mathcal{K}$. В $\mathcal{U}'_\alpha$ получены вариационные формулы, применение которых показывает, что в ряде экстремальных задач множество экстремальных функций в $\mathcal{U}'_\alpha$ (а следовательно, и в $\mathcal{U}_\alpha$) существенно отличается от экстремальных функций в других известных подклассах $\mathcal{U}_\alpha$. В этом "повинна" комплекснозначность функции $\mu(t)$ из (6.7). Например, в случае $\mathfrak{M} = \mathcal{K}, C, \mathfrak{S}, V_k$ экстремальной функцией в задаче о

$$\max_{f\in\mathfrak{M}} \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

является только функция (2.4). Тогда как в случае $\mathfrak{M} = \mathcal{U}'_\alpha$, $\alpha > 1$, экстремальными будут все функции

$$f_0(z) = \int_0^z \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log(1 - se^{-it}) \frac{(e^{it} - r)^2}{|e^{it} - r|^2 e^{it}}\, d\beta(t)\right] ds,$$

где $\beta(t)$ — любая неубывающая на $[0, 2\pi]$ функция с полной вариацией α, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} \frac{(e^{it}-r)^2}{|e^{it}-r|^2 e^{it}}\, d\beta(t) = 1.$$

Очевидно, $V_{2\alpha} \subset \mathcal{U}'_\alpha$, однако C не является подмножеством $\mathcal{U}'_\alpha$ ни при каком $\alpha < \infty$ [10].

Чтобы получить подобный $\mathcal{U}'_\alpha$ класс функций, содержащий класс C, в [9] и [81] были введены и изучались л.-и.с. $\mathcal{U}^*_\alpha$ порядка $\alpha \geq 1$. Функция $f \in \mathcal{U}^*_\alpha$ [82], если и только если существуют $g \in \mathcal{K}$ и функция Шварца ω, такие, что

$$f'(z) = g'(z) \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log(1-\omega(z)e^{it})\, d\mu(t)\right],$$

где $\mu(t)$ — комплекснозначная функция ограниченной вариации, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 0, \qquad \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \leq \alpha - 1.$$

Введенные M. O. Reade [83] и Ch. Pommerenke [84] л.-и.с. $C(\alpha)$ порядка $\alpha+1$ [78] являются подклассами $\mathcal{U}^*_{\alpha+1}$. $\mathcal{U}^*_1 = \mathcal{K}$, $\mathcal{U}_\alpha{}^* \supset V_{2\alpha}$, однако при $\alpha > 1$ ни один из классов $\mathcal{U}'_\alpha$ и $\mathcal{U}^*_\alpha$ не содержит другой; $\mathcal{U}'_\alpha$ и $\mathcal{U}^*_\alpha$ содержат ∞-листные функции. В $\mathcal{U}^*_\alpha$ применимы те же вариационные формулы, что и в $\mathcal{U}'_\alpha$ [9], [81].

4^0. Поскольку функция (2.4) принадлежит каждому из семейств $\mathfrak{M} = \mathcal{K}$, C, $\mathfrak{S}$, $V_{2\alpha}$, $\mathcal{U}'_\alpha$, $\mathcal{U}^*_\alpha$, $\mathcal{U}_\alpha$ при $\alpha = \operatorname{ord} \mathfrak{M}$, то теорема искажения 2.3 и неравенство (2.5) одинаково справедливы в указанных семействах; причем все неравенства точные и равенство достигается только для функции k_θ. Таким образом, теорема искажения не делает различия между всеми этими семействами.

Иначе дело обстоит с теоремой вращения. Известна точная оценка

$$|\arg f'(z)| \leq 2\alpha \arcsin z, \qquad \alpha = \operatorname{ord} \mathfrak{M}, \tag{6.8}$$

для каждого из семейств $\mathfrak{M} = \mathcal{K}$ [85], C [76, с.13], $V_{2\alpha}$ [86]; равенство в (6.8) достигается для функции (2.4). Функция (2.4) является экстремальной во многих задачах в классах $\mathcal{K}$, C, $V_{2\alpha}$ и $\mathfrak{S}$. Однако уже в $\mathfrak{S}$ при $r \in (1/\sqrt{2}, 1)$ функция Кёбе (2.4) не является экстремальной в теореме вращения (оценке $|\arg f'(z)|$) — см. §2, 3^0. В $\mathcal{U}_\alpha^*$ теорема вращения уже имеет вид:

Теорема 6.7. [9], [81]. *Если* $r \in [0,1)$, *то*

$$\max_{f \in \mathcal{U}_\alpha^*} \arg f'(r) = (\alpha - 1)\log\frac{1+r}{1-r} + 2\arcsin r;$$

максимум достигается для функции $f_0 \in \mathcal{U}_\alpha^*$ *такой, что*

$$f_0'(z) = \frac{1}{(1 - ze^{i\arccos r})^2}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{i(\alpha-1)}.$$

Наконец, теорема вращения в $\mathcal{U}_\alpha'$ имеет тот же вид, что и в $\mathcal{U}_\alpha$ (см. теорему 2.10).

Ситуация с оценкой коэффициентов функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ однородна для классов $\mathcal{K}$, C, $V_{2\alpha}$, $\mathfrak{S}$. Функция k_θ из (2.4) при $\alpha = \operatorname{ord}\mathfrak{M}$ является экстремальной в задаче о $\max\limits_{f \in \mathfrak{M}} |a_n|$ в каждом из классов $\mathfrak{M} = \mathcal{K}$ (см., например, [62]), C [5,6], $V_{2\alpha}$ [87], $\mathfrak{S}$ [88]. В $\mathcal{U}_\alpha$ не известна точная оценка $|a_n|$ даже для $n = 3$. Однако многое говорило за то (см., например, теорему 4.2), что здесь k_θ тоже должна быть экстремальной (предполагалось, что $\max\limits_{f \in \mathcal{U}_\alpha} |a_3| = \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{3}$ [21]). С помощью вариационных формул в $\mathcal{U}_\alpha'$ и $\mathcal{U}_\alpha^*$ получаются следующие результаты.

Теорема 6.8. [24]. *При* $\alpha > 1$

$$\max_{f \in \mathcal{U}_\alpha'} |a_3| = \frac{\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^3 + 3})}{3} \quad \left(> \frac{2\alpha^2 + 1}{3}\right);$$

максимум достигается на функции

$$f_0(z) = \frac{1}{i\sqrt{\alpha^2 - 1}(e^{it_1} - e^{-it_1})}\left[\left(\frac{1 + ze^{it_1}}{1 + ze^{-it_1}}\right)^{i\sqrt{\alpha^2-1}} - 1\right],$$

где $e^{it_1} = \sqrt{\dfrac{(3-\alpha^2) + 3i\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha\sqrt{\alpha^2+3}}}$ *(можно брать любое значение корня),* $\operatorname{ord} f_0 = \alpha$.

Теорема 6.9. [89]. *Пусть* $\mathcal{M}(\gamma) = (\alpha - 1)\sin^2\gamma + \sin\gamma\cos\gamma + 2\sin\gamma$, $\mathcal{M}(\gamma_0) = \max\limits_{\gamma\in[0,\frac{\pi}{2}]} \mathcal{M}(\gamma)$. *Тогда*

$$\max_{f\in\mathcal{U}^*_\alpha} |a_3| = 1 + \frac{2}{3}(\alpha - 1)\mathcal{M}(\gamma_0);$$

максимум достигается на функции

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{1}{(1-s)^2}\left[\frac{1-e^{i\gamma_0}s}{1-e^{-i\gamma_0}s}\right]^{i(\alpha-1)} ds.$$

Вероятно, функция k_θ также не является экстремальной в задаче о $\max\limits_{f\in\mathcal{U}_\alpha} |a_n|$, $n \geq 4$.

Теорема 6.10. [24]. *В задаче о* $\max\limits_{f\in\mathcal{U}'_\alpha} |a_n|$, $n \geq 3$, *существует экстремальная функция вида*

$$f_0(z) = \int_0^z \prod_{j=1}^{n-1}(1-se^{-it_j})^{-2a_j}\, ds, \qquad \sum_{j=1}^{n-1} a_j = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n-1} |a_j| = \alpha.$$

В работах [82, 90] найдены максимумы функционала Якубовского $|a_2^m(a_3 - \lambda a_2^2)|$ (см. [91]) при вещественных λ и неотрицательных целых m. В частности, доказана

Теорема 6.11. [82]. *Пусть* $\alpha \geq 1$, m — *целое неотрицательное*, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}, \frac{4}{3}\right)$. *Тогда*

$$\max_{f\in\mathcal{U}^*_\alpha} |a_2^m(a_3 - \lambda a_2^2)| = \max_{x\in[0,1]} [(1-(\alpha-1)x)^m(|\lambda - 1| +$$

$$+(\alpha-1)x\left(2\left|\lambda - \frac{2}{3}\right| + (\alpha-1)x\left|\lambda - \frac{2}{3}\right| + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}\right))]; \qquad (6.9)$$

при $\lambda \leq \dfrac{2(\alpha-1)}{3\alpha}$ *максимум достигается для функции* f_0 *из теоремы 6.9 с* $\gamma_0 = \arcsin x_0$, *где* x_0 — *точка абсолютного максимума в (6.9); при* $\lambda \geq 4/3$ *максимум достигается для функции*

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{1}{(1-si)^2}\left[\frac{1+e^{i\gamma_0}s}{1-e^{-i\gamma_0}s}\right]^{i(\alpha-1)} ds,$$

с $\gamma_0 = -\arcsin x_0$.

Из интегрального представления (6.3) легко получается для $f \in \mathfrak{M} = \mathcal{K},\ V_{2\alpha},\ \mathcal{U}'_\alpha$ точная оценка логарифмических коэффициентов b_n функций $\log f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$:

$$|b_n| \le \frac{2\alpha}{n}, \quad \alpha = \operatorname{ord} \mathfrak{M}, \quad n = 1.2, \ldots;$$

причем в случае $\mathcal{U}'_\alpha$; $\alpha > 1$, экстремальных функций бесконечно много [10]. В [92] получена точная оценка логарифмических коэффициентов в $\mathfrak{M} = C,\ \mathcal{U}^*_\alpha$:

$$|b_n| \le 2\left(\alpha - \frac{n-1}{n}\right), \qquad \alpha = \operatorname{ord} \mathfrak{M}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Здесь уже $B_n = \sup\limits_{f \in \mathfrak{M}} |b_n|$ не стремятся к нулю при $n \to \infty$. Об оценке B_n в $\mathcal{U}_\alpha$ см. теорему 2.7.

В заключение приведем еще несколько результатов для л.-и.с. частного вида. J. Waniurski [93] изучал класс

$$\hat{\mathcal{K}} = \bigcup_{f \in \mathcal{K}} \left\{ \frac{w f(z)}{w - f(z)} :\ w \in \bar{\mathbb{C}} \setminus f(\Delta) \right\}.$$

Он показал, что $\hat{\mathcal{K}}$ — л.-и.с. и постоянные Ландау в классах $\mathcal{K}$ и $\hat{\mathcal{K}}$ совпадают и равны $\pi/4$.

В [94] J. Szynal и J. Waniurski определяли и изучали следующее семейство функций $\mathcal{F}$. Пусть $\mathfrak{M}_j$, $j = 1, \ldots, n$, — фиксированный набор л.-и.с.; $\alpha_j \in \mathbb{R}$,,— фиксированный набор чисел, $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$.

$$\mathcal{F} = \left\{ F(z) = \int_0^z \prod_{j=1}^{n} (f'_j(s))^{\alpha_j}\, ds : \quad f_j \in \mathfrak{M}_j,\ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Они показали, что $\mathcal{F}$ — л.-и.с., для некоторых известных л.-и.с. $\mathfrak{M}_j$ (в частности, $\mathfrak{M}_j = C$, $\mathfrak{M}_j = V_k$) определена область значений

$$\mathcal{D}(z, a) = \left\{ w \in \mathbb{C} :\ w = \log \frac{F'(z)}{F'(a)};\ F \in \mathcal{F} \right\}$$

при фиксированных $z, a \in \Delta$.

Теорема 6.12. [94]. $\mathcal{D}(z,a) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathcal{D}_j(\zeta) + \log\eta$, где $\eta = \left(\frac{1-|a|^2}{1-\bar{a}z}\right)^2$, $\zeta = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$; $z, a \in \Delta$ *(линейные операции над множествами понимаются так, как сформулировано в* 1^0*)*.

В частности, в случае $\mathfrak{M}_j = V_k$ и $\mathfrak{M}_j = C$, $j = 1, \dots, n$, явно выписана граница выпуклого замкнутого множества $\mathcal{D}(z,a)$, получены уравнения для экстремальных функций, найден радиус однолистности семейства $\mathcal{F}$.

§ 7. Приложения

1^0. Определение 7.1 [95]. *Пусть $H \subset LS$. Л.-и.с. $L(H)$ называется ¤- ¤¤ ¤¤ H, если $H \subset L(H)$ и любое л.-и.с., содержащее H, содержит и $L(H)$.*

В частности, для л.-и.с. $\mathfrak{M}$ $L(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$. Обозначим $S^* \subset LS$ — класс звездообразных функций, т. е. функций из LS, однолистно отображающих Δ на звездообразную относительно 0 область. Естественно,

$$L(S^*) = \{f^* : \ f^* = \Lambda_\phi[f], \ f \in S^*, \ \phi \in \mathfrak{L}\}. \qquad (7.1)$$

Для $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^*$ и $\zeta \in \Delta$ обозначим

$$\psi(z,\zeta) = \frac{(z-\zeta)(1-\bar{\zeta}z)}{z}, \quad \mathcal{M}_\zeta(f(z)) = \frac{f(z)\psi(z,\zeta)+\zeta}{1+|\zeta|^2 - a_2\zeta}.$$

Д. В. Прохоров показал, что для получения $L(S^*)$ в (7.1) вместо оператора $\Lambda_\phi[f]$ можно взять оператор $\mathcal{M}_\zeta(f)$.

Теорема 7.1. [95]. $L(S^*) = \{f^* : \ f^*(z) = \mathcal{M}_\zeta(f(z)), \ f \in S^*, \ \zeta \in \Delta\}$.

В качестве приложения теоремы получено следующее неравенство для функций $f \in S^*$:

$$|\zeta a_{n+1} + (1+|\zeta|^2)a_n + \bar{\zeta}a_{n-1}| \le n|1+|\zeta|^2 + a_2\zeta|, \quad \zeta \in \Delta, \ n = 2, 3, \dots .$$

Полученная в теореме 7.1 связь классов S^* и $L(S^*)$ с помощью оператора $\mathcal{M}_\zeta$ применяется в [95] для исследования однолистных слабо звездообразных функций [96]. Такой подход к исследованию этих функций позволяет получить ряд новых результатов в решении экстремальных задач и нахождении экстремальных функций.

2^0. В §4 уже отмечалась связь (4.5) класса Блоха $\mathcal{B}$ и множества $X = \cup_{\alpha<\infty}\mathcal{U}_\alpha$. Это дает возможность получать новую информацию о функциях класса $\mathcal{B}$, переформулируя известные в $\mathcal{U}_\alpha$ результаты. Приведем некоторые из них.

Следствие 7.1. [47]. *Пусть g — аналитическая в Δ функция. Тогда $g \in \mathcal{B}$, если и только если существуют $\alpha < \infty$ и последовательность $\mu \in \mathcal{I}_\alpha$ (см. §1, теорему 1.3) такие, что*

$$g(z) - g(0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} (-2\log(1 - ze^{it}))\, d\mu_n(e^{it}),$$

где

$$\alpha = \operatorname{ord} \int_0^z \exp(g(s) - g(0))\, ds.$$

Следствие 7.2. [47]. *Пусть $g \in \mathcal{B}$, $\quad \alpha = \operatorname{ord} \displaystyle\int_0^z \exp(g(s) - g(0))ds$, $\lambda \in [0, 2\pi]$. Тогда для $z \in D$*

$$|\mathrm{Re}\ \{(g(z) - g(0))e^{-i\lambda}\} + \cos\lambda \log(1 - |z|^2)| \le$$
$$\le 2\alpha \Xi\left(|z|, \frac{\sin\lambda}{\alpha}\right)$$

(см. §2, 3^0). Функция $g(z) - g(0)$ отображает круг $\{z : \ |z| < r\}$ в область, ограниченную кривой

$$\left\{2\alpha e^{i\lambda}\Xi\left(|z|, \frac{\sin\lambda}{\alpha}\right) - \log(1 - r^2) : \ \lambda \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Следствие 7.3. [47]. *В условиях следствия 7.2 выражения*

$$\mathrm{Re}\ [g(re^{i\lambda}) - g(0)] + (\alpha + 1)\log(1 - r) - (\alpha - 1)\log(1 + r)$$

и

$$\max_{\lambda\in[0,2\pi]} \mathrm{Re}\ [g(re^{i\lambda}) - g(0)] + (\alpha + 1)\log(1 - r) - (\alpha - 1)\log(1 + r)$$

убывают по $r \in [0,1)$ и при $r \to 1^-$ имеют предел ≤ 0, при фиксированном α пределы эти равны 0 только для функции

$$g(z) = g(0) - (\alpha+1)\log(1-ze^{i\lambda}) + (\alpha-1)\log(1+ze^{i\lambda}).$$

Используя (4.5) и линейную инвариантность $\mathcal{U}_\alpha$, можно получить эквивалентные определения класса Блоха.

ТЕОРЕМА 7.2. [47]. *Пусть g — аналитическая в Δ функция. Тогда $g \in \mathcal{B}$, если и только если существует такая постоянная $C(g)$, что для всех $z \in \Delta$*

$$\sup_{a\in\Delta}\left|g(\frac{z+a}{1+\bar a z}) - g(a) - 2\log(1+\bar a z)\right| \le C(g)\log\frac{1+|z|}{1-|z|} - \log(1-|z|^2). \tag{7.2}$$

Причем наилучшим (наименьшим) значением $C(g)$ здесь является $C(g) = \operatorname{ord}\int_0^z \exp[g(s)-g(0)]\,ds$.

Заметим, что неравенство (7.2) можно также записать в эквивалентной форме:

$$\sup_{a\in\Delta}\left|g\left(\frac{z+a}{1+\bar a z}\right) - g(a)\right| \le K_g \log\frac{1}{1-|z|};$$

K_g — постоянная, наилучшим значением которой является $\|g(z)-g(0)\|_{\mathcal{B}}$.

3^0. Вернемся к оператору (см.§4)

$$[\lambda h](z) = \int_0^z (h'(s))^\lambda\,ds, \qquad h \in LS, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Задача об однолистности $[\lambda f](z)$ привлекала внимание многих математиков. В 1966 г. P. L. Duren, H. S. Shapiro, A. L. Shields [97] доказали, что $[\lambda h](z) \in \mathfrak{S}$ для всех $h \in \mathfrak{S}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \le \dfrac{\sqrt{5}-2}{3}$. В 1972 г. J. Becker [98] улучшил этот результат, доказав утверждение для $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \le 1/6$. В 1975 г. J. A. Pfaltzgraff [99] не только уточнил, но и существенно обобщил этот результат. Обозначим λ_α радиус наибольшего замкнутого круга с центром в 0 такого, что для всех λ из этого круга $[\lambda h](z) \in \mathfrak{S}$ для всех $h \in \mathcal{U}_\alpha$. Основываясь на теореме

1.1 и критерии однолистности L. V. Ahlfors'a [100], J. A. Pfaltzgraff получил простое доказательство своего результата.

Теорема 7.3. [99]. $\lambda_\alpha \le \frac{1}{2\alpha}\quad \forall \alpha \ge 1$.

Оказалось, как и во многих других задачах, результат зависит не столько от геометрических свойств функции h (в данном случае — однолистности), сколько от $\operatorname{ord} h$. Для однолистных функций ($\alpha = 2$) из теоремы 7.3 получаем

Следствие 7.4. [99]. *$[\lambda g](z) \in \mathfrak{S}$ для всех $g \in \mathfrak{S}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $\quad |\lambda| \le 1/4$.*

Более того, с помощью теоремы 7.3 удалось получить полное решение проблемы M. S. Robertson'a [101] об однолистности функций $g \in LS$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\beta}\left(1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)}\right)\right\} > 0, \qquad z \in \Delta,\ \cos\beta > 0. \tag{7.3}$$

Следствие 7.5. [99], [101]. *Функции $f \in LS$, удовлетворяющие (7.3) с $0 < \cos\beta \le 1/2$, — однолистны в Δ. Если же $1/2 < \cos\beta < 1$, то существуют неоднолистные функции, удовлетворяющие (7.3).*

Еще в 1965 г. W. C. Royster [102] привел пример, показывающий, что для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$, $\quad |\lambda| > 1/3$, $\quad \lambda \ne 1$, существует $g \in \mathfrak{S}$ такая, что $[\lambda g] \notin \mathfrak{S}$. Таким образом, даже для $g \in \mathfrak{S}$ вопрос об однолистности $[\lambda g]$ остается открытым в кольце $\dfrac{1}{4} < |\lambda| \le \dfrac{1}{3}$.

Обозначим

$$\Lambda_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C}:\ [\lambda h] \in \mathfrak{S} \text{ для всех } h \in \mathcal{U}_\alpha\}.$$

Из свойств $\mathcal{U}_\alpha$ и $\mathfrak{S}$ следует, что Λ_α — замкнутое множество, звездообразное относительно 0; $\quad \{\lambda :\ |\lambda| \le \lambda_\alpha\}$ — максимальный круг с центром в 0, содержащийся в Λ_α. В случае $\alpha = 1$ Л. А. Аксентьев и И. Р. Нежметдинов [103] нашли

$$\Lambda_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{C}:\ |\lambda| \le \frac{1}{2}\right\} \bigcup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

При $\alpha > 1$ такого описания множества Λ_α нет.

В [104] Ch. Pommerenke показал, что $f \in \mathcal{B}$, если и только если существуют $c \in \mathbb{C}$ и $g \in \mathfrak{S}$ такие, что

$$f(z) - f(0) = c \log g'(z). \tag{7.4}$$

В [49] поставлена задача нахождения наилучшего значения постоянной c для функций Блоха в (7.4). Эту задачу надо понимать так. Для фиксированной функции $f \in \mathcal{B}$ обозначим

$$c_f = \min\{|c| : \ f(z) - f(0) = c \log g'(z), \ g \in \mathfrak{S}\},$$

$$\max_{f \in \mathcal{B}(M)} c_f = C(M) = MC(1),$$

где $\mathcal{B}(M) = \{f \in \mathcal{B} : \ \|f(z) - f(0)\|_{\mathcal{B}} \le M\}$; надо найти $C(M)$ (или $C(1)$). Из критерия однолистности J. Becker'a [43] и установленной J. Becker'ом и Ch. Pommerenke [44] точности константы 1 в этом критерии легко получить: $C(1) = 1$.

Рассмотренная задача из [49] естественным образом модифицируется в свете связи (4.5) между классом $\mathcal{B}$ и семействами $\mathcal{U}_\alpha$:

найти $C_\alpha = \max\{c_f : \ f(z) - f(0) = \log h'(z), \ h \in \mathcal{U}_\alpha\}$.

Интерес к этой задаче вызван не только ее связью с задачей из [49] о нахождении $C(1)$, но и с задачей об однолистности $[\lambda h]$, $h \in \mathcal{U}_\alpha$. Действительно, если $h \in \mathcal{U}_\alpha$ и $f(z) - f(0) = \log h'(z)$, то

$$\frac{1}{c_f} = \max\{|\lambda| : \ [\lambda h] \in \mathfrak{S}\}.$$

Поэтому множество Λ_α целиком содержится в круге радиусом $\frac{1}{C_\alpha}$ с центром в 0.

Теорема 7.4. [105].

$$2\alpha \ge C_\alpha \ge \begin{cases} \dfrac{\alpha+1}{3}, & \text{\textit{если}} \quad \alpha \le \dfrac{7}{5}, \\ 2(\alpha - 1), & \text{\textit{если}} \quad \alpha \ge \dfrac{7}{5}. \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\alpha} \le \lambda_\alpha \le \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}, & \text{\textit{если}} \quad 1 < \alpha < 3, \\ \dfrac{1}{C_\alpha} \le \dfrac{1}{2(\alpha-1)}, & \text{\textit{если}} \quad \alpha \ge 3. \end{cases}$$

Эта теорема улучшает ранее полученную [106] оценку C_α. При $\alpha = 1$ теорема 7.4 дает известное значение $\lambda_1 = 1/2$, нижняя оценка C_1 дает точное ее значение.

Следствие 7.6. [105]. *Для каждого* $\alpha > 1$ *существуют* $h \in \mathcal{U}_\alpha$ *и комплексное* λ, $|\lambda| > \min\left\{\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{2(\alpha-1)}\right\}$, *такие, что фунция* $[\lambda h]$ *не принадлежит* $\mathfrak{S}$.

Естественно предположить, что $\lambda_\alpha = \dfrac{1}{2\alpha}$.

Глава 2. Обобщения понятия линейной инвариантности

§ 8. Обобщение понятия линейной инвариантности для аналитических функций

1^0. Обозначим $\mathfrak{X}$ множество всех локально однолистных в Δ функций f таких, что $F(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{f'(0)} \in X = \cup_{\alpha<\infty}\mathcal{U}_\alpha$ (см. §4). Для функций $f \in \mathfrak{X}$ W. Ma и D. Minda [107] вводили обозначение

$$\|f\|_{\mathfrak{X}} = \sup_{z\in\Delta}\left\{(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{2f'(z)} - \frac{\bar{z}}{1-|z|^2}\right|\right\} = \operatorname{ord} F;$$

функции $f \in \mathfrak{X}$ они называли *линейно-инвариантными функциями.* Такое понятие линейной инвариантности обобщается этими авторами на случай гиперболической области $\Omega \subset \mathbb{C}$ (т. е. $\mathbb{C}\setminus\Omega$ содержит более двух точек). Если $\zeta(z)$ — конформное отображение Ω на Δ (см. [7, с. 248]), то гиперболическая метрика в области Ω (см. [7, с. 326])

$$\lambda_\Omega(z)\,dz = \frac{|\zeta(z)|\,dz}{1-|\zeta(z)|^2}.$$

В [107] локально однолистная в Ω функция f называется *линейно-инвариантной* (пишем $f \in \mathfrak{X}(\Omega)$), если

$$\|f\|_{\mathfrak{X}(\Omega)} = \sup_{z\in\Omega}\left\{\frac{1}{\lambda_\Omega(z)}\left|\frac{f''(z)}{2f'(z)} - \frac{\partial}{\partial z}\log\lambda_\Omega(z)\right|\right\} < \infty.$$

Если $\Omega = \Delta$, то $\mathfrak{X}(\Omega) = \mathfrak{X}$. Функционал $\|f\|_{\mathfrak{X}(\Omega)}$ является аналогом ord F.

Теорема 8.1. [107]. *Если Ω и $\mathcal{D}$ — гиперболические области, $g : \Omega \to \mathcal{D}$ — любое конформное отображение (отображение универсальной накрывающей поверхности области Ω на универсальную накрывающую поверхность области $\mathcal{D}$) и функция f локально однолистна в $\mathcal{D}$, то $\|f \circ g\|_{\mathfrak{X}(\Omega)} = \|f\|_{\mathfrak{X}(\mathcal{D})}$, в частности, $f \circ g \in \mathfrak{X}(\Omega) \Longleftrightarrow f \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$.*

Таким образом, $\|f\|_{\mathfrak{X}(\Omega)}$ конформно инвариантна.

Локально однолистная в области Ω функция f называется [107] *квазилинейно-инвариантной* (пишем $f \in \mathfrak{Q}\mathfrak{X}(\Omega)$), если

$$\|f\|_{\mathfrak{Q}\mathfrak{X}(\Omega)} = \sup_{z\in\Omega}\left\{\delta_\Omega(z)\left|\frac{f''(z)}{2f''(z)}\right|\right\} < \infty,$$

где $\delta_\Omega(z)$ — евклидово расстояние от z до $\partial\Omega$.

Если Ω — гиперболическая область, то $\mathfrak{Q}\mathfrak{X}(\Omega) \neq \emptyset$, $\quad \|f\|_{\mathfrak{Q}\mathfrak{X}(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathfrak{X}(\Omega)} + 1$, следовательно, $\mathfrak{X}(\Omega) \subset \mathfrak{Q}\mathfrak{X}(\Omega)$.

Множество $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется *равномерно совершенным* [108], если существует положительная постоянная $c = c(\Omega)$, для которой $\dfrac{c}{\delta_\Omega(z)} \leq \lambda_\Omega(z)$, $\quad z \in \Omega$. Гиперболические односвязные области являются равномерно совершенными. Является ли многосвязная гиперболическая область равномерно совершенным множеством, зависит от соотношения между семействами $\mathfrak{X}(\Omega)$ и $\mathfrak{Q}\mathfrak{X}(\Omega)$.

Теорема 8.2. [107]. *Пусть Ω — гиперболическая область из $\mathbb{C}$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *Ω — равномерно совершенное множество;*

2) *существуют положительные числа a и b такие, что для любой локально однолистной в Ω функции f справедливо неравенство $\|f\|_{\mathfrak{X}(\Omega)} \leq a\|f\|_{\mathfrak{Q}\mathfrak{X}(\Omega)} + b$.*

3) *$\mathfrak{X}(\Omega) = \mathfrak{Q}\mathfrak{X}(\Omega)$.*

В терминах равномерно совершенного множества можно охарактеризовать принадлежность функций f из LS пространству $X = \cup_{\alpha<\infty}\mathcal{U}_\alpha$.

Теорема 8.3. *Пусть $f \in LS$, тогда $f \in X$, если и только если граница проекции $f(\Delta)$ на плоскость — равномерно совершенное множество.*

2^0. В [109] дается определение семейства аналитических в Δ функций, инвариантного относительно преобразований Мёбиуса $\mathfrak{L}$. Однако это определение существенно отличается от определения л.-и.с.

Определение 8.1.[109]. *Пусть $\mathfrak{A}_0$ — линейное пространство аналитических в Δ функций с полунормой ρ. $\mathfrak{A}_0$ ¤ ¤* **эг**, *если*

1) *$\mathfrak{A}_0$ — подпространство класса Блоха $\mathcal{B}$ и существует постоянная $K > 0$ такая, что для всех $f \in \mathfrak{A}_0 \quad \|f(z) - f(0)\|_{\mathcal{B}} \le K\rho(f)$;*

2) *пространство $\mathfrak{A}_0$ с полунормой ρ — полное;*

3) *$\forall \phi \in \mathfrak{L}$ и $\forall f \in \mathfrak{A}_0 \quad \Longrightarrow f \circ \phi \in \mathfrak{A}_0$ и $\circ\phi) \le C\rho(f)$, где C — постоянная, не зависящая от ϕ и f;*

4) *для любой функции $f \in \mathfrak{A}_0$ отображение $\phi \longrightarrow f \circ \phi$ — непрерывное отображение из $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{A}_0$.*

Примерами пространств, инвариантных относительно преобразований Мёбиуса, являются пространства Бесова B_p, $1 < p < \infty$, малый класс Блоха $\mathcal{B}_0$ (см. §4). Сам класс Блоха $\mathcal{B}$ не является примером такого пространства, т. к. там не выполнено свойство (d) определения 8.1.

В [109] авторы исследуют общие свойства этих пространств, а также конкретные пространства, инвариантные относительно преобразований Мёбиуса.

M. Peloso [110] обобщил эти результаты на случай шара в $\mathbb{C}^n$.

3^0. Э. Г. Кирьяцкий обобщил оператор $\Lambda_\phi[f]$ из (1.1). Он рассматривал [111] класс A_n аналитических в Δ функций $F(z) = z^n + \ldots$ таких, что $F^{(n)}(z) \ne 0$ в Δ (при $n = 1 \quad A_1 = LS$).

Для функции $F \in A_n$ и $t \in \Delta$ обозначим

$$T(z,t) = F\left(\frac{z+t}{1+\bar{t}z}\right)(1+\bar{t}z)^{n-1},$$

$$L_t^n F(z) = \frac{T(z,t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{(k)}(0,t)}{k!} z^k}{\dfrac{1}{n!}(1-|t|^2)^n F^{(n)}(t)} = z^n + a_2(t) z^{n+1} + \ldots;$$

$$\mathcal{U}_{n,\alpha} = \{F \in A_n : \ |a_2(t)| \le \alpha \text{ для всех } t \in \Delta\}.$$

Тогда L_t^1 совпадает с Λ_ϕ при $\phi = \dfrac{z+t}{1+\bar{t}z}$, $\mathcal{U}_{1,\alpha} = \mathcal{U}_\alpha$. В $\mathcal{U}_{n,\alpha}$ получены точные оценки $|F(z)|$ и $|F^{(n)}(z)|$, доказано, что $\mathcal{U}_{n,\alpha} = \emptyset$ при $\alpha < 1$. В качестве примера семейства, инвариантного относительно оператора L_t^n, $t \in \Delta$, приводится множество аналитических в Δ функций $F(z) = z^n + \ldots$, $n-$я разделенная разность $[F(z); z_0, \ldots, z_n]$ которых отлична от 0 при попарно различных $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \Delta$ [112].

В [113] решена задача описания множества функций $F \in A_n$, для которых $L_t^n F(z) = F(z)$ для всех $t \in (-1,1)$. В частности, при $n = 1$ (см. (5.2))

$$(L_t^1 F = F \ \text{ для всех } \ t \in (-1,1)) \Longleftrightarrow (F(z) = g_c(z), \ c \in \mathbb{C}).$$

Также полностью описано множество функций $I_k(a) \subset A_n$, у которых коэффициент при z^{n+k-1} равен a и не меняется при воздействии на функцию оператора L_t^n. Описание дано в терминах решений некоторого линейного дифференциального уравнения $(k-1)$-го порядка.

Те же задачи решены [114] и в случае $n = 0$ для оператора

$$L_t^0 F(z) = \frac{F(\dfrac{z+t}{1+\bar{t}z})}{F(t)}$$

на классе аналитических в Δ функций $F(z) = 1 + b_1 z + \ldots$, $F(z) \ne 0$ в Δ.

§ 9. Линейно-инвариантные семейства функций, аналитических в поликруге

1^0. В этом параграфе будем рассматривать аналитические в поликруге $\Delta^m \subset \mathbb{C}^m$ функции

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_m), \qquad z = (z_1, \ldots, z_m) \in \Delta^m;$$

норму в $\mathbb{C}^m$ определим как $||z|| = \max\limits_{1 \le j \le m} |z_j|$. В [115] (полный текст этой статьи опубликован в [116]) понятие л.-и.с. обобщено на функции, аналитические в Δ^m.

Определение 9.1.[115]. *Пусть $l = 1, \ldots, m$ — фиксировано. Семейство $\mathfrak{M}_l$ аналитических в Δ^m функций $f(z)$ называется* **l-¤- ¤¤ (l-.-..)**, *если*

1) $\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(z) \neq 0$ в Δ^m, $f(\mathbb{O}) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbb{O}) = 1$;

2) $\forall f \in \mathfrak{M}_l$ *и* $\forall \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m \Longrightarrow f(ze^{i\theta})e^{-i\theta_l} \in \mathfrak{M}_l$, *где* $ze^{i\theta} = (z_1 e^{i\theta_1}, \ldots, z_m e^{i\theta_m})$;

3) $\forall a = (a_1, \ldots, a_m) \in \Delta^m$ *имеем* $\Lambda_\phi[f](z) = f(z, a) =$

$$= [f(\phi_a(z)) - f(\phi_a(\mathbb{O}))] \left[\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)(1 - |a_l|^2)\right]^{-1} \in \mathfrak{M}_l, \tag{9.1}$$

где

$$\phi_a(z) = \left(\frac{z_1 + a_1}{1 + \bar{a}_1 z_1}, \ldots, \frac{z_m + a_m}{1 + \bar{a}_m z_m}\right)$$

— *автоморфизм из* Δ^m в Δ^m.

Обозначим

$$\frac{\partial f}{\partial z_l}(z) = 1 + c_1(f)z_1 + \ldots + c_m(f)z_m + o(||z||), \quad ||z|| \to 0.$$

Определение 9.2.[115]. *Если f удовлетворяет условию 1) определения 9.1, то — функции f называется число*

$$\operatorname{ord} f = \sup_{a \in \Delta^m} \frac{1}{2} \left|\left| \nabla \frac{\partial f_a}{\partial z_l}(\mathbb{O}) \right|\right| = \frac{1}{2} \sup_{a \in \Delta^m} ||(c_1(f_a), \ldots, c_m(f_a))||.$$

Ё— ¤- ¤¤ $\mathfrak{M}_l$ *назовем число* $\operatorname{ord} \mathfrak{M}_l = \sup\limits_{f \in \mathfrak{M}_l} \operatorname{ord} f$.

Определение 9.3.[115]. **є¤ l-¤- ¤¤** $\mathcal{U}_\alpha^l$ — α *назовем объединение всех l-линейно-инвариантных семейств $\mathfrak{M}_l$, для которых* $\operatorname{ord} \mathfrak{M}_l \leq \alpha$.

Очевидно, $\mathcal{U}_\alpha^l$ — множество всех функций $f(z)$, удовлетворяющих условию (1) определения 1 и таких, что $\operatorname{ord} f \leq \alpha$. При $m = 1$ эти определения совпадают с определениями 1.1, 1.2 и 1.3. Как и в случае семейств $\mathcal{U}_\alpha$, $\mathcal{U}_\alpha^l = \emptyset$ при $\alpha < 1$.

ПРИМЕРЫ

(i) $\mathcal{K}_l$ — класс аналитических в Δ^m функций, удовлетворяющих условию 1) определения 9.1 и таких, что $f(\Delta^m)$ — выпуклая область.

(ii) S_l^k, где $k = 1, \cdots, m$ фиксировано, — класс всех аналитических в Δ^m функций f_k, удовлетворяющих условию 1) определения 9.1 и таких, что $F(z) = (f_1(z), \ldots, f_m(z))$ однолистно отображает Δ^m в $\mathbb{C}^m$.
(iii) $\mathfrak{M}_l = \{f(z) = \Phi(z_l) : \quad \Phi \in \mathcal{U}_\alpha\}$ является l-л.-и.с. порядка α.
(iv) Пусть

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1+z_k}{1-z_k}\right)^{\alpha} - 1\right], \tag{9.2}$$

тогда для каждого $l = 1, \ldots, m$ семейство функций

$$\{\Psi_a(ze^{i\theta})e^{-i\theta_l} : \quad a \in \Delta^m, \quad \theta \in \mathbb{R}^{>}\}$$

является l-л.-и.с. порядка α.

Следующие два утверждения являются аналогами теоремы 2.3 (искажения) и теоремы 2.10 (вращения).

Теорема 9.1. [115]. *Для любой функции $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$ и любого $z \in \Delta^m$ выполняются неравенства*

$$\left|\log\left((1-|z_l|^2)\frac{\partial f}{\partial z_l}(z)\right)\right| \le \alpha \log \prod_{k=1}^{m}\frac{1+|z_k|}{1-|z_k|},$$

$$\frac{1}{1-|z_l|^2}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1-|z_k|}{1+|z_k|}\right)^{\alpha} \le \left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(z)\right| \le \frac{1}{1-|z_l|^2}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1+|z_k|}{1-|z_k|}\right)^{\alpha}.$$

Неравенства точные; равенство достигается для функции Ψ из (9.2) при вещественных z_k.

Теорема 9.2. [115]. *Для любой функции $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$*

$$\left|\arg\frac{\partial f}{\partial z_l}(z)\right| \le \alpha\left(\log\prod_{k\ne l}\frac{1+|z_k|}{1-|z_k|} + 2\Xi\left(|z_l|, \frac{1}{\alpha}\right)\right);$$

неравенство точное, равенство достигается для функции

$$\Phi_0(z) =$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{\alpha^2-1}(e^{-ix}-e^{-it})}\left[\prod_{k\ne l}\left(\frac{1+z_k}{1-z_k}\right)^{i\alpha}\left(\frac{1+z_le^{-ix}}{1-z_le^{-it}}\right)^{i\sqrt{\alpha^2-1}} - 1\right],$$

где x и t определены в теореме 2.10 (здесь $\arg\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbb{O}) = 1$ *и* $\arg\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(z)$ *непрерывно меняется при непрерывном изменении z).*

Семейство $\mathcal{U}^l_\alpha$ не является компактным в топологии равномерной сходимости внутри Δ^m, однако класс производных $\dot{\mathcal{U}}^l_\alpha = \{\dfrac{\partial f}{\partial z_l} : f \in \mathcal{U}^l_\alpha\}$ секвенциально компактен; более того (см. [127]), для любых $l, k, n \in \{1, \dots, m\}$ и $\alpha \geq 2$

$$\dot{\mathcal{U}}^n_{\alpha-1} \subset \dot{\mathcal{U}}^l_\alpha \subset \dot{\mathcal{U}}^k_{\alpha+1}.$$

Обозначим $\mathfrak{B}$ множество аналитических взаимно однозначных отображений $\phi(z) = (\phi_1(z_1), \dots, \phi(z_m))$ из Δ^m в Δ^m таких, что для каждого $k = 1, \dots, m$ функция $\phi_k(z_k)$ аналитическая и однолистная в Δ. Обозначим $\mathcal{U}^l_\alpha$ множество всех функций

$$\{\Lambda_\phi[f] =$$

$$= \frac{f(\phi_1(z_1), \dots, \phi_m(z_m)) - f(\phi_1(0), \dots, \phi_m(0))}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\phi_1(0), \dots, \phi_m(0))\phi_l'(0)} : \quad f \in \mathcal{U}^l_\alpha,\ \phi \in \mathfrak{B}\};$$

$\mathcal{U}^l_\alpha \subset \mathcal{U}^l_\alpha$. Интересен вопрос об инвариантности $\mathcal{U}^l_\alpha$ относительно отображений $\phi \in \mathfrak{B}$, т. е. вопрос о совпадении $\mathcal{U}^l_\alpha$ и $\mathcal{U}^l_\alpha$. Следующая теорема является аналогом теоремы 1.5.

Теорема 9.3. [127]. *$\mathcal{U}^l_\alpha$ — l-л.-и.с. порядка $\beta = \max(\alpha, 2)$. Таким образом, $\mathcal{U}^l_\alpha \subset \mathcal{U}^l_\beta$; $\mathcal{U}^l_\alpha = \mathcal{U}^l_\alpha$ при $\alpha \geq 2$.*

В частности, при $\alpha < 2$ $\mathcal{U}^l_\alpha \subset \mathcal{U}^l_2$, однако $\mathcal{U}^l_\alpha \neq \mathcal{U}^l_2$.

Обозначим $\mathfrak{B}_l$ подмножество тех отображений из $\mathfrak{B}$, l-я координатная функция которых $\phi_l(z_l)$ имеет специальный вид $e^{i\theta}\dfrac{z_l + a}{1 + \bar{a}z_l}$, $a \in \Delta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда, как можно показать, $\mathcal{U}^l_\alpha$ инвариантен относительно преобразований $\mathfrak{B}_l$ для всех $\alpha \geq 1$.

2^0. Обозначим $T = \partial\Delta$, T^m — остов поликруга Δ^m. Важным моментом при изучении аналитических в Δ^m функций является вопрос о поведении таких функций при приближении z к остову T^m. В $\mathcal{U}^l_\alpha$ имеет место аналог теоремы 5.19 (регулярности).

Теорема 9.4. [117]. *Обозначим* $\mathbf{r} = (r_1, \cdots, r_m) \in [0,1)^m$, $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_m) \in \mathbb{R}^{\gtrdot}$, $\mathbf{r}e^{i\theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \cdots, r_m e^{i\theta_m})$, $\mathbb{I}^- = (\nVdash^-, \cdots, \nVdash^-)$; *для аналитической в* Δ^m *функции* $p(z)$ $\quad M(r,p) = \max\limits_{\|z\| \le r} |p(z)|$; *для* $f \in \mathcal{U}^l_\alpha$ *обозначим*

$$\Phi_\theta(\mathbf{r}) = \left| \frac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbf{r}e^{i\theta}) \right| \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1-r_k}{1+r_k} \right)^\alpha (1 - r_l^2).$$

Тогда

1) *для любой функции* $f \in \mathcal{U}^l_\alpha$ *и любого фиксированного* θ *величины* $\Phi_\theta(\mathbf{r})$ *и* $\max_{\theta \in \mathbb{R}^{\gtrdot}} \Phi_\theta(\mathbf{r})$ — *невозрастающие функции по каждому переменному* $r_k \in (0,1)$, $k = 1, \cdots, m$. *Величина*

$$M\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1-r)^{\alpha m + 1}}{(1+r)^{\alpha m - 1}}$$

не возрастает по $r \in (0,1)$;

2) *существуют* $\delta_0 \in [0,1]$ *и* $\theta^0 \in [0, 2\pi)^m$ *такие, что для каждого* $k = 1, \cdots, m$

$$\delta_0 = \lim_{r \to 1^-} \left[M\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1-r)^{\alpha m + 1}}{(1+r)^{\alpha m - 1}} \right] =$$

$$= \lim_{\mathbf{r} \to \mathbb{I}^-} \max_\theta \Phi_\theta(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r} \to \mathbb{I}^-} \Phi_{\theta^0}(\mathbf{r}) =$$

$$= \lim_{\mathbf{r} \to \mathbb{I}^-} \left[\max_\theta \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z_l \partial z_k}(re^{i\theta}) \right| \frac{(1-r_k^2)(1-r_l^2)}{2(\alpha + \delta^l_k r_k)} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1-r_k}{1+r_k} \right)^\alpha \right] =$$

$$= \lim_{\mathbf{r} \to \mathbb{I}^-} \int_0^{r_k} \max_\theta \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z_l \partial z_k}(\cdots, se^{i\theta_k}, \cdots) \right| ds \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1-r_k}{1+r_k} \right)^\alpha \times$$

$$\times (1 - r_l^2) = \lim_{\mathbf{r} \to \mathbb{I}^-} \left[\int_0^{r_l} \left| \frac{\partial f}{\partial z_l}(\cdots, r_{l-1}e^{i\theta_{l-1}}, se^{i\theta_l}, r_{l+1}e^{i\theta_{l+1}}, \cdots) \right| ds \times \right.$$

$$\left. \times 2\alpha \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1-r_k}{1+r_k} \right)^\alpha \right] =$$

$$= \lim_{\mathbf{r} \to \mathbb{I}^-} \left[\int_0^{r_l} \max_{\phi \in \mathbb{R}^m} \left| \frac{\partial f}{\partial z_l}(\cdots, r_{l-1}e^{i\phi_{l-1}}, se^{i\phi_l}, r_{l+1}e^{i\phi_{l+1}}, \cdots) \right| ds \times \right.$$

$$\times 2\alpha \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1-r_k}{1+r_k}\right)^{\alpha}\Bigg] = \lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\left[\max_{\phi\in\mathbb{R}^>}|F(\mathbf{r}e^{i\phi})|2\alpha\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1-r_k}{1+r_k}\right)^{\alpha}\right] =$$

$$= \lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\left[|F(\mathbf{r}e^{i\theta^0})|2\alpha\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1-r_k}{1+r_k}\right)^{\alpha}\right],$$

где δ_k^l *— символы Кронекера,* $F(z) = \int_0^{z_l}\frac{\partial f}{\partial z_l}(z_1,\ldots,z_{l-1},s,z_{l+1},\ldots,z_m)ds$

3) $\delta_0 = 1$, *если и только если* $f(z)$ *имеет вид* $e^{-i\theta_l}\Psi(ze^{i\theta}) + Q(z_1, \cdots, z_{l-1}, z_{l+1}, \cdots, z_m)$, *где* Q *— любая аналитическая в* Δ^{m-1} *функция такая, что* $Q(\mathbb{O}) = 0$, $\Psi(z)$ *из (9.2)*

Таким образом, теорема 9.4 справедлива не только для радиальных пределов ($z = re^{i\theta} \to e^{i\theta} \in T^m$, $0 < r \to 1^-$), но и для более общих пределов ($z = \mathbf{r}e^{i\theta} \underset{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}{\longrightarrow} e^{i\theta}$).

Определение 9.4.[116]. *Вектор* $\theta^0 \in [0, 2\pi)^m$ *из теоремы 9.4 называется ¤¤ f, число* δ_0 *—* **ш¤** *f. Вектор* $\theta \in [0, 2\phi)^m$ *будем называть ¤¤ ¤* **(...)** $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$, *если* $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-}\Phi_\theta(\mathbf{r}) = \delta_\theta > 0$; *при этом число* $\delta_\theta \in (0, 1]$ *будем называть* **ш¤,** *¤* **...** θ.

Как и в случае круга, получаем разбиение $\mathcal{U}_\alpha^l$ на дизъюнктные подклассы $\mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$, $\delta_0 \in [0, 1]$; функциям из $\mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$ соответствует одно и то же число Хеймана δ_0.

Следующее утверждение позволяет связать семейство $\mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$ аналитических в Δ^m функций с семействами $\mathcal{U}_\alpha^j(\delta)$ функций, аналитических в Δ^n, $n < m$.

Теорема 9.5. [127]. *Пусть* $f \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$, *у* $f(z)$ *оставим свободными переменные* $z_{k_1}, \cdots, z_{k_n}$, $1 \le n \le m-1$, *зафиксировав остальные; при этом считаем, что* z_l *— одна из свободных переменных,* $l = k_j$. *Тогда полученная после нормализации* ($\Phi(\mathbb{O}) = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z_l}(\mathbb{O}) = 1$) *функция* $\Phi(z_\star) = \Phi(z_{k_1}, \cdots, z_{k_n})$ *принадлежит семейству* $\mathcal{U}_\alpha^j(\delta)$ *аналитических в* Δ^n *функций. Причем если* $\delta_0 > 0$, *то* $\mathrm{ord}\,\Phi = \alpha$ *и* $\delta > 0$; $\delta \ge \delta_0$, *если все фиксированные переменные — нули. Кроме того, множество всех таких функций* $\Phi(z_\star)$

$$\{\Phi(z_\star) : f \in \mathcal{U}_\alpha^l \ \ (\text{в } \Delta^m)\}$$

совпадает с семейством $\mathcal{U}_\alpha^j$ аналитических в Δ^n функций.

При $n = 1 \quad z_\star = z_l$ и из теоремы 9.5 получаем

Следствие 9.1. [127]. *После фиксации в $f(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l$ всех переменных, кроме z_l, полученные в результате последующей нормализации функции $\Phi(z_l)$ образуют семейство $\mathcal{U}_\alpha$ аналитических в Δ функций.*

В $\mathcal{U}_\alpha$ справедливы аналоги леммы 5.5 и теоремы 5.22.

Теорема 9.6. [116]. *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$.*

1) *Если $\delta_0 = 0$, то (см. (9.1)) $f(z, a) \in \mathcal{U}_\alpha^l(0)$ для любого $a \in \Delta^m$.*

2) *Если $\delta_0 \in (0, 1)$, то для любого $\delta \in [\delta_0, 1)$ существует $a \in \Delta^m$ такое, что $f(z, a) \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta)$. Если γ — н.и.р. для f и ему соответствует $\phi = \phi(a)$ — н.и.р. для $f(z, a) \quad (\phi(\mathbb{O}) = \gamma)$, тогда для любого $\delta \in (0, 1)$ существует $a \in \Delta^m$ такое, что δ — число Хеймана функции $f(z, a)$, соответствующее н.и.р. $\phi(a)$ этой функции.*

3) *Пусть $\delta_0 \in (0, 1)$, σ — множество всех н.и.р. для f и существует целое $q \in [1, m]$ такое, что множество $\{\gamma_q : \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \sigma\}$ не пересекается с некоторым интервалом $(x', x'') \in [0, 2\pi)$; тогда для любого $\delta \in (0, 1)$ существует $a \in \Delta^m$ такое, что $f(z, a) \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta)$.*

Из теоремы единственности Привалова следует, что мера множества н.и.р. на T^m равна 0. Это множество может быть и пустым (например, для ограниченных функций из $\mathcal{U}_\alpha^l$). Как и в случае $m = 1$, существуют функции из $\mathcal{U}_\alpha^l$ с любым наперед заданным числом (включая ∞) н.и.р.

В $\mathcal{U}_\alpha{}^l$ имеет место утверждение, аналогичное теореме 5.23, только вместо $f^{(n)}(z)$ надо говорить о $\dfrac{\partial^{n+1} f}{\partial z_l \partial z_{k_1} \cdots \partial z_{k_n}}$ и в роли функций k_θ выступают функция (9.2) и ее вращения $e^{-i\theta_l}\Psi(ze^{i\theta})$. Более того, если γ — н.и.р. $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$ и δ_γ — соответствующее число Хеймана, то для любых целых неотрицательных $q_1, \cdots, q_m$ и $n = q_1 + \ldots + q_m$ существует предел

$$\lim_{\mathbf{r} \to \mathbb{I}^-} \left[\left| \frac{\partial^{n+1} f(\mathbf{r}e^{i\gamma})}{\partial z_l \partial z_1^{q_1} \cdots \partial z_m^{q_m}} \right| (1 - r_l) \prod_{k=1}^m (1 - r_k)^{\alpha + q_k} \right] =$$

$$= \delta_\gamma \lim_{\mathbf{r}\to\mathbb{I}^-} \left[\frac{\partial^{n+1}\Psi(\mathbf{r})}{\partial r_l \partial r_1^{q_1} \cdots \partial r_m^{q_m}} (1 - r_l) \prod_{k=1}^{m} (1 - r_k)^{\alpha + q_k} \right].$$

Переносятся на ${\mathcal{U}_\alpha}^l$ и теоремы 5.24 и 5.25, причем в теореме 5.25 при $m \geq 2$ можно снять ограничение на α: $\alpha \geq 2$. Так сказывается эффект многомерности.

3^0. В этом пункте речь пойдет о *классе Блоха* $\mathcal{B}$ аналитических в поликруге Δ^m функций g, т. е. функций с конечной нормой Блоха

$$\|g\|_{\mathcal{B}} := |g(\mathbb{O})| + \max_{k=1,\cdots,m} \sup_{z\in\Delta^m} \left| \frac{\partial g}{\partial z_k}(1 - |z_k|^2) \right|.$$

Как и в случае одного переменного, класс $\mathcal{B}$ связан с семействами $\mathcal{U}_\alpha^l$.

Следующие два утверждения обобщают на случай поликруга результаты, ранее полученные для аналитических в Δ функций (см. (4.5), (4.6), теорему 7.2, а также [104]).

Теорема 9.7. [115]. *Пусть $l = 1, \cdots, m$ — фиксированное число. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(i) $g \in \mathcal{B}$;
(ii) существует $f \in \bigcup\limits_{\alpha<\infty} \mathcal{U}_\alpha^l$ такая, что

$$g(z) - g(\mathbb{O}) = \log \frac{\partial f}{\partial z_l}(z), \quad \alpha = \text{ord}\ f,$$

причем $2(\alpha - 1) \leq \|g(z) - g(\mathbb{O})\|_{\mathcal{B}} \leq 2(\alpha + 1)$;
(iii) семейство функций $\{g(\phi_a(z)) - g(a) : a \in \Delta^m\}$ конечно-нормально (см.[104]); здесь ϕ_a определено в (9.1).

Теорема 9.8. [115]. *Чтобы аналитическая в Δ^m функция принадлежала классу $\mathcal{B}$, необходимо и достаточно существования положительной постоянной $C(g)$ такой, что для всех $z \in \Delta^m$*

$$\sup_{a\in\Delta^m} |g(\phi_a(z)) - g(a) - 2\log(1 + \overline{a_l} z_l) + \log(1 - |z_l|^2)| \leq$$

$$\leq C(g) \log \prod_{k=1}^{m} \frac{1 + |z_k|}{1 - |z_k|}; \tag{9.3}$$

наименьшее значение постоянной $C(g)$ здесь равно

$$\text{ord} \int_0^{z_l} \exp[g(z_1, \ldots, z_{l-1}, s, z_{l+1}, \ldots, z_m) - g(\mathbb{O})] ds.$$

Условие (9.3) можно записать в эквивалентной форме

$$\sup_{z\in\Delta^m}|g(\phi_a(z))-g(a)|\le\frac{K_g}{2}\log\prod_{k=1}^{m}\frac{1+|z_k|}{1-|z_k|},$$

где наименьшее значение постоянной K_g равно $\|g(z)-g(\mathbb{O})\|_{\mathcal{B}}$.

В случае поликруга следствие 7.2 примет вид

Следствие 9.2.[115]. *Пусть g — аналитическая в Δ^m функция, $g\in\mathcal{B}$. Тогда для любого $r\in(0,1)$ функция $g(z)-g(\mathbb{O})$ отображает поликруг $\{z\in\mathbb{C}^m:\ \|z\|<r\}$ в область, ограниченную кривой*

$$\left\{\alpha e^{i\lambda}\left[(m-1)\log\frac{1+r}{1-r}+2\Xi\left(r,\frac{|\sin\lambda|}{\alpha}\right)\right]-\log(1-r^2):\lambda\in[0,2\pi]\right\}.$$

Для аналитических в поликруге функций Блоха может быть сформулировано следствие (см. [115]) из теоремы 9.4, аналогичное следствию 7.3.

§ 10. Линейно-инвариантные семейства гармонических функций

1^0. В 80-е годы стала активно развиваться теория однолистных и локально однолистных гармонических в Δ функций (см., например, обзор [118]). При этом в основу определения и изучения классов таких гармонических комплекснозначных функций, по аналогии с регулярными в Δ функциями, закладывалась обычно геометрическая характеристика функций исследуемого класса (выпуклость, почти выпуклость, звездообразность, однолистность, симметричность $f(\Delta)$ относительно вещественной оси). T. Sheil-Small [119] первый использовал линейную инвариантность при изучении семейств однолистных гармонических функций.

Гармоническая в Δ комплекснозначная функция $f(z)$ может быть записана в виде $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$, где h и g — аналитические в Δ функции, $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)z^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_{-n}(f)z^n$. Через S_H обозначают класс гармонических и однолистных в Δ функций f с традиционной нормировкой $a_0(f)=0$, $a_1(f)=1$; S_H^0 — подкласс функций из S_H, для которых $a_{-1}(f)=0$; $\mathcal{K}_H$ — подкласс функций из S_H, отображающих Δ на выпуклую область; C_H — подкласс функций из S_H, отображающих Δ на почти выпуклую область (аналог класса C, см. §6, 3^0). Если $f\in S_H$, то

$$f_\varepsilon(z)=\frac{\varepsilon\overline{f(z)}+f(z)}{1+\varepsilon\overline{a_{-1}(f)}}\in S_H \qquad \text{для всех} \qquad \varepsilon\in\Delta, \tag{10.1}$$

$$f(z,a)=\frac{f(\frac{z+a}{1+\bar a z})-f(a)}{h'(a)(1-|a|^2)}\in S_H \qquad \text{для всех} \qquad a\in\Delta. \tag{10.2}$$

В [119] изучались семейства $L\subset S_H$, удовлетворяющие условию:

$$f\in L\Longrightarrow (f_a\in L,\ \ f(z,a)\in L \qquad \text{для всех} \qquad a\in\Delta). \tag{10.3}$$

Обозначим $L^0=L\cap S_H^0$; L^0 уже не инвариантен относительно преобразований (10.1) и (10.2). Пусть

$$\alpha=\alpha(L)=\sup_{f\in L}|a_2(f)|; \qquad d=d(L^0)=\lim_{r\to1^-}\big[\inf_{f\in L^0}(\min_{|z|=r}|f(z)|)\big];$$

α является аналогом порядка л.-и.с. аналитических в Δ функций.

Теорема 10.1. [119]. *Для $f\in L^0$ и $0<r<1$*

$$\frac{1}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha\right]\le\min_{|z|=r}|f(z)|\le M(r,f)\le\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\alpha-1\right],$$

где $\alpha=\alpha(L)$; $d(L^0)\ge\dfrac{1}{2\alpha(L)}$.

По аналогии с расширением $\mathfrak{N}$ л.-и.с. $\mathfrak{M}$ (см. §1) в [119] определяется расширение $\widetilde{L}$ семейства L, удовлетворяющего (10.3):

функция $f\in\widetilde{L}$, если существуют последовательность функций $f_n\in L$ и последовательность однолистных аналитических функций $\phi_n\in\mathfrak{B}$ (см. §1) такие, что

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(\phi_n(z))-f_n(\phi_n(0))}{\phi_n'(0)h_n'(\phi_n(0))}$$

— предел равномерный внутри Δ. Следующая теорема является аналогом теоремы 1.5.

Теорема 10.2. [119]. *$\widetilde{L}$ является компактным подклассом замыкания $\overline{S_H}$, $\widetilde{L}$ инвариантен относительно преобразований (10.1) и (10.2),*

$$\alpha(\widetilde{L}) = \max(2, \alpha(L)), \quad d(\widetilde{L}^0) \geq \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\alpha(L)}\right).$$

Поскольку $\mathcal{K}_H$ и C_H удовлетворяют условию (10.3) и $\alpha(\mathcal{K}_H) = 2$, $\alpha(C_H) = 3$ [120], из теоремы 10.1 получается

Следствие 10.1. [119]. *Если $f \in \widetilde{\mathcal{K}_H}^0$, то имеет место точное неравенство*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}; \qquad d(\widetilde{\mathcal{K}_H}^0) = \frac{1}{4}.$$

$d(\widetilde{C_H}^0) = 1/6$, кроме того , для $f \in \widetilde{C_H}^0$ имеет место точное неравенство

$$\frac{|z| + \frac{1}{3}|z|^3}{(1+|z|)^3} \leq |f(z)| \leq \frac{|z| + \frac{1}{3}|z|^3}{(1-|z|)^3};$$

равенство достигается для

$$f_0(z) = \mathrm{Re}\left\{\frac{z + \frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right\} + i\mathrm{Im}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\} \in C_H^0.$$

В [119] получены также точные оценки коэффициентов в $\widetilde{\mathcal{K}_H}$ и $\widetilde{C_H}$:

$$f \in \widetilde{\mathcal{K}_H} \Longrightarrow |a_n(f)| \leq |n|, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$f \in \widetilde{C_H} \Longrightarrow |a_n(f)| \leq \frac{1}{3}(2n^2+1), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

2^0. В [121] (доказательства опубликованы в [122]) в основу определения изучавшихся классов гармонических функций положены свойства линейной инвариантности и локальной квазиконформности. При этом удобнее рассматривать функции с нормировкой (отличной от общепринятой): $a_0(f) = 0,\ a_1(f) + a_{-1}(f) = 1$.

Далее в этом пункте рассматриваются сохраняющие ориентацию гармонические и *локально K-квазиконформные* (постоянная $K = \dfrac{1+k}{1-k} \geq 1$) в Δ функции $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, т. е.

$$J_f = |\partial f|^2 - |\bar{\partial} f|^2 > 0, \quad \frac{|\partial f| + |\bar{\partial} f|}{|\partial f| - |\bar{\partial} f|} = \frac{|h'| + |g'|}{|h'| - |g'|} \leq K \qquad \text{в} \qquad \Delta;$$

здесь $\partial f = f_z$, $\bar\partial f = f_{\bar z}$. Таким образом, речь идет только о локально гомеоморфных функциях (однолистности не предполагается). Заметим также, что K-квазиконформные отображения не инвариантны относительно преобразования (10.1).

Обозначим $H(\alpha, K)$ множество всех локально K-квазиконформных гармонических в Δ функций $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ с нормировкой $a_0(f) = 0$, $a_1(f) + a_{-1}(f) = 1$ и таких, что $h'(z)/h'(0) \in \mathcal{U}_\alpha$.

Расширяющиеся с ростом α, $K \in [1, \infty]$ классы $H(\alpha, K)$ охватывают все сохраняющие ориентацию гармонические в Δ функции f с указанной нормировкой. При конечных α и K семейства $H(\alpha, K)$ секвенциально компактны относительно равномерной сходимости внутри Δ, справедливы точные оценки

$$\frac{1}{1+k} \le |a_1(f)| \le \frac{1}{1-k}, \qquad |a_{-1}(f)| \le \frac{k}{1+k}.$$

Символом $\partial_\theta f$ будем обозначать производную по направлению вектора $e^{i\theta}$

$$\partial_\theta f(z) = \lim_{\rho\to 0+} \frac{f(z+\rho e^{i\theta}) - f(z)}{\rho} = \partial f(z) e^{i\theta} + \bar\partial f(z) e^{-i\theta}.$$

Следующее определение является аналогом определения 1.1.

Определение 10.1.[121]. *Семейство $\mathfrak{H}$ гармонических в Δ функций называется ¤- ¤¤ (.-..) ¤ , если для каждой функции $f \in \mathfrak{H}$*
a) $J_f(z) > 0$ в Δ (f сохраняет ориентацию в Δ)*;*
b) $a_0(f) = 0$, $a_1(f) + a_{-1}(f) = 1$*;* (10.4)
c) для любых $a \in \Delta$ и $\theta \in \mathbb{R}$ функция

$$f_\theta(z, a) = \frac{f\left(e^{i\theta}\dfrac{z+a}{1+\bar a z}\right) - f(e^{i\theta} a)}{(1-|a|^2)\partial f_\theta(e^{i\theta} a)} \in \mathfrak{H}.$$

Рассмотренные в 1^0 классы $\mathcal{K}_H$, C_H, S_H при нормировке (10.4) являются л.-и.с. гармонических функций; классы $H(\alpha, K)$ также являются л.-и.с., $H(\alpha, 1) = \mathcal{U}_\alpha$. Обозначим $F = F_f = f(\Delta)$ двумерное гладкое многообразие — однолистный образ круга Δ при локально гомеоморфном отображении $f \in H(\alpha, K)$; для $w_1, w_2 \in F$, $z \in \Delta$ величины $d_F(w_1, w_2)$, $l_F(w_1, w_2)$, $d_f(z)$ имеют прежний смысл (см. §1, 3^0).

Теорема 10.3. (искажения) [121]. *Для каждой функции* $f = h + \bar{g} \in H(\alpha, K)$ $(\alpha, K < \infty)$ *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{K}\frac{(1-|z|)^{\alpha-1}}{(1+|z|)^{\alpha+1}} \le |\partial_\theta f(z)| \le K\frac{(1+|z|)^{\alpha-1}}{(1-|z|)^{\alpha+1}}, \tag{10.5}$$

$$\frac{1}{2\alpha K}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] \le d_F(0, f(z)) \le l_F(0, f(z)) \le$$
$$\le \frac{K}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}-1\right], |z| = r. \tag{10.6}$$

Равенство в (10.5) достигается при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. *Причем если* $z = re^{i\phi}$, *то равенство справа получим при*

$$h(z) = \frac{e^{i\phi}}{2\alpha(1-k)}\left[\left(\frac{1+ze^{-i\phi}}{1-ze^{-i\phi}}\right)^{\alpha}-1\right], \quad g(z) = -kh(z); \tag{10.7}$$

равенство слева получим при

$$h(z) = \frac{e^{i\phi}}{2\alpha(1+k)}\left[\left(\frac{1-ze^{-i\phi}}{1+ze^{-i\phi}}\right)^{\alpha}-1\right], \quad g(z) = kh(z). \tag{10.8}$$

В правой части (10.6) знак равенства для $d(0, f(z))$ *и* $l(0, f(z))$ *достигается для функции (10.7) при* $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ *и* $z = \pm ri$, *в левой части (10.6) — для функции (10.8) при* $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ *и* $z = \pm ri$.

При $K = 1$ из теоремы 10.3 получаем неравенство (2.5) в $\mathcal{U}_\alpha$. Можно дать и более тонкую оценку $|\partial_\theta f|$ в зависимости от $|h'|$ и $\arg h'$.

Следствие 10.2. [121]. *Пусть* $f \in H(\alpha, K)$, $re^{i\phi} \in \Delta$. *Тогда для производной по* r *от* $f(z) = f(re^{i\phi})$ *имеет место точная оценка*

$$\frac{1}{K}\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}} \le |f'_r(re^{i\phi})| \le K\frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}}$$

с равенством слева и справа при $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ *для соответственно указанных в теореме 10.3 функций.*

Следствие 10.3. [121]. *Пусть* $\alpha, K < \infty$; $f \in H(\alpha, K)$. *Тогда*

$$|f(z)| \le \frac{K}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\alpha}-1\right];$$

равенство достигается при $z = \pm i|z|$ для функции (10.7) с $\phi = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Следствие 10.4. [121]. *Для любых $b, c \in \Delta$ и $\theta \in \mathbb{R}$*

$$\frac{1}{2\alpha K}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] \le \frac{d_F(f(b),f(c))}{(1-|c|^2)|\partial_\theta f(c)|} \le \frac{l_F(f(b),f(c))}{(1-|c|^2)|\partial_\theta f(c)|} \le$$
$$\le \frac{K}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}-1\right],$$

где $r = |c-b|/|1-\bar{c}b|$. Неравенство точное в том смысле, что для любого $c \in \Delta$ и $\theta \in \mathbb{R}$ для левой и правой частей неравенства существуют свои $b \in \Delta$ и $f \in H(\alpha, K)$, при которых эта часть неравенства обращается в равенство.

Аналогом неравенства (2.3) является

Теорема 10.4. [128]. *Для любых $f \in H(\alpha, K)$, $\alpha \in [1,\infty]$, $K \in [1,\infty)$, и для любого $z \in \Delta$*

$$\frac{1-|z|^2}{2\alpha K}(|\partial f(z)|+|\bar{\partial} f(z)|) = \frac{1-|z|^2}{2\alpha K}\max_\theta |\partial_\theta f(z)| \le d_f(z) \le$$
$$\le K(1-|z|^2)\min_\theta |\partial_\theta f(z)| = K(1-|z|^2)(|\partial f(z)|-|\bar{\partial} f(z)|). \qquad (10.9)$$

Постоянная $\dfrac{1}{2\alpha K}$ в нижней оценке не улучшаема в том смысле, что вместо нее не может быть поставлена меньшая универсальная в $H(\alpha, K)$ постоянная. Постоянная K в правой части неравенства не является точной.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли в правой части (10.9) вместо K поставить 1, что верно для аналитических функций f (см. (2.3)). Однако пример однолистной функции

$$f_\lambda(z) = \frac{1}{1-k}\left(\frac{z}{1+\lambda i z} - \overline{\frac{kz}{1+\lambda i z}}\right) \in H(1, K), \quad k, \lambda \in [0,1),$$

дает отрицательный ответ на этот вопрос при $K \ge \sqrt{2}$, т. к. $\max_\lambda d_{f_\lambda}(0) = \dfrac{K^2}{2\sqrt{K^2-1}}$. Поэтому при $K \ge \sqrt{2}$ постоянная в правой части (10.9) не меньше, чем $\dfrac{K^2}{2\sqrt{K^2-1}}$.

Теорема 10.5. *Пусть $\alpha, K < \infty$; $f \in H(\alpha, K)$, $r \in (0,1)$. Многообразие $F(r) = \{f(z) : |z| \le r\} \subset F$ содержит однолистный круг с центром в 0 и радиусом $\frac{1}{2\alpha K}\left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right]$, но не всегда большим.*

Областью Кёбе семейства $H(\alpha, K)$ называется максимальная однолистная область, содержащаяся в пересечении многообразий $\bigcap_{f \in H(\alpha,K)} F_f$. Из теоремы 10.5 следует, что область Кёбе семейства $H(\alpha, K)$ содержит круг с центром в 0 и радиусом $\frac{1}{2\alpha K}$, но не большим. С другой стороны, область Кёбе содержится в конечной области, ограниченной кривой

$$\gamma(\phi) = \frac{e^{i\phi} + ke^{-i\phi}}{2\alpha(1+k)}, \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

Обобщением теоремы вращения 2.10 на семейства $H(\alpha, K)$ является

Теорема 10.6. [122]. *Пусть $\alpha < \infty$, $f \in H(\alpha, K)$, $z \in \Delta$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, $\arg \partial_0 f(0) = 0$ и $\arg \partial_\theta f(z)$ непрерывно меняется при непрерывном изменении θ и z. Тогда*

$$|\arg \partial_\theta f(z)| \le |\theta| + 2 \arcsin k + 2\alpha \Xi \left(|z|, \frac{1}{\alpha}\right).$$

По аналогии с порядком функции из LS определяется порядок гармонических функций.

Определение 10.2.[121]. ***Ё**— л.-и.с. $\mathfrak{H}$ гармонических функций называется число*

$$\operatorname{ord} \mathfrak{H} = \sup_{f \in \mathfrak{H}} |a_2(f) + a_{-2}(f)|.$$

Теорема 10.7. [121]. $\operatorname{ord} H(\alpha, K) = \alpha K$.

Следствие 10.5. [121]. *При $\alpha, K < \infty$, $f \in H(\alpha, K)$, $\theta \in \mathbb{R}$*

$$\left|\frac{\partial_\theta \partial_\theta f(z)}{\partial_\theta f(z)}\right| \le \frac{2K(\alpha + |z|)}{1 - |z|^2};$$

неравенство точное и достигается для функции

$$f(z) = h(z) + k\overline{h(z)}, \qquad h(z) = \frac{1}{2\alpha(1+k)}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} - 1\right],$$

при $z = r$, $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Используя линейную инвариантность $H(\alpha, K)$ и известные результаты в $\mathcal{U}_\alpha$, можно получить оценку радиуса однолистности $R(\alpha, K)$ в $H(\alpha, K)$:

$$\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \le R(\alpha, K) \le R(\alpha, 1) \le \tanh \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

(последнее неравенство — из теоремы 5.10).

Приведенные в этом пункте неравенства справедливы, в частности, для K-квазиконформных отображений в классе $\mathcal{K}_H$ (с $\alpha = 2$) и в классе C_H (с $\alpha = 3$) при условии нормировки (10.4) в этих классах.

3^0. Для аналитических функций Блоха известно [104], что

$$f \in \mathcal{B} \Longleftrightarrow \sup_{z \in \Delta} d_f(z) < \infty. \qquad (10.10)$$

По аналогии с классом Блоха аналитических функций определяется класс Блоха гармонических вещественнозначных функций (см., например, [123]) как множество гармонических в Δ функций u, удовлетворяющих условию

$$\sup_{z \in \Delta} [|\mathrm{grad}\ u|(1 - |z|^2)] < \infty.$$

Для рассматриваемых в этом параграфе гармонических функций $f = u + iv = h + \bar{g}$ имеем:

$$|\mathrm{grad}\ u(z)|^2 + |\mathrm{grad}\ v(z)|^2 < 8|h'(z)|.$$

Поэтому класс Блоха $\mathcal{B}_H$ комплекснозначных гармонических функций естественно определить так.

Определение 10.3.[128]. *Гармоническая функция $f = h + \bar{g} \in \mathcal{B}_H$, если и только если*

1) $J_f(z) \ge 0$ *в* Δ, *причем* $J_f(z) = 0 \Longleftrightarrow h'(z) = 0$;

2) $\sup\limits_{z \in \Delta} [|h'(z)|(1 - |z|^2)] < \infty$, *т. е.* $h \in \mathcal{B}$.

Первое условие определения 10.3 означает, что непостоянная функция $f \in \mathcal{B}_H$ сохраняет ориентацию; это делает класс $\mathcal{B}_H$ более "геометричным". Условие $J_f(z) = 0 \Longleftrightarrow h'(z) = 0$ исключает неинтересный случай: $f(z) = e^{i\theta}(h(z) + \overline{h(z)})$, когда $f(\Delta)$ лежит на прямой.

Естественно возникает вопрос — сохраняется ли утверждение (10.10) в случае $\mathcal{B}_H$, т. е.

$$f \in \mathcal{B}_H \Longleftrightarrow d_f(z) < \infty? \tag{10.11}$$

Из теоремы 10.4 следует справедливость утверждения (10.11) для функций $f \in \mathcal{B}_H \cap (\bigcup_{\alpha, K<\infty} H(\alpha, K))$. Имеет место

Теорема 10.8. [128]. *Пусть f — гармоническая в Δ функция. Тогда*

1) $f \in \mathcal{B}_H \Longrightarrow \sup_{z\in\Delta} d_f(z) < \infty$;

2) *если* $\sup_{z\in\Delta} d_f(z) < \infty$ *и* f — *локально* K-*квазиконформна, то* $f \in \mathcal{B}_H$.

Требование локальной K-квазиконформности ($K < \infty$) в п. 2) теоремы 10.8 является существенным. Это следует из примера гармонической функции

$$f = h + \bar{g}, \quad f(0) = 0; \quad h'(z) = \frac{2i}{(1-z^2)(1+z)}, \quad g'(z) = zh'(z).$$

Для нее $J_f(z) > 0$, $\operatorname{Re} f(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, следовательно, $d_f(z) \le \frac{\pi}{2}$ в Δ. Однако $f \notin \mathcal{B}_H$, т. к. $h \notin \mathcal{B}$.

Заметим также, что для гармонической функции $f = h + \bar{g}$ условия

$$\sup_{z\in\Delta} d_f(z) = \infty, \quad \sup_{z\in\Delta} \left|\frac{\bar{\partial} f(z)}{\partial f(z)}\right| = 1 \quad (\text{т. е. } K = \infty)$$

не всегда являются препятствием тому, чтобы $f \in \mathcal{B}_H$. Примером тому может служить функция $f(z) = z + \bar{z}^2/2$.

В заключение дадим несколько эквивалентных определений $\mathcal{B}_H$. Обозначим $\partial_\theta^n f(z)$ производную n-го порядка функции f по направлению $e^{i\theta}$.

Теорема 10.9. [128]. *Пусть для гармонической функции $f = h + \bar{g}$ выполнены условия п. 1) определения 10.3. Тогда следующие условия эквивалентны:*

a) $f \in \mathcal{B}_H$;

b) существует натуральное n такое, что

$$\sup_{z\in\Delta, \theta\in\mathbb{R}} [|\partial_\theta^n f(z)|(1-|z|^2)^n] < \infty;$$

c) существуют $\phi, \psi \in X = \bigcup_{\alpha<\infty} \mathcal{U}_\alpha$ *такие, что*

$$f(z) = f(0) + \log(\phi'(z)\overline{\psi'(z)});$$

d) семейство функций

$$\left\{ f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a) : \ a \in \Delta \right\}$$

— конечно-нормальное, т. е. из любой последовательности функций этого семейства можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри Δ *к конечной функции;*
e) существует постоянная $C(f) > 0$, *для которой*

$$\sup_{a\in\Delta} \left| f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a) \right| \le \frac{C(f)}{2} \log \frac{1+|z|}{1-|z|} \text{ для всех } z \in \Delta;$$

наилучшее (наименьшее) значение $C(f)$ *равно* $\|f(z) - f(0)\|_{\mathcal{B}_H} = \sup_{z\in\Delta}[(|\partial f(z)| + |\bar{\partial} f(z)|)(1-|z|^2)]$.

Нерешенные задачи

1) Найти радиус однолистности в $\mathcal{U}_\alpha$ (мы предполагаем, что он равен $\tanh \dfrac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2-1}}$; см. §2).

2) Найти радиус звездообразности в $\mathcal{U}_\alpha$ (см. §2).

3) Найти точную оценку $|a_3|$ в $\mathcal{U}_\alpha$ (предполагается [124], что она равна $\dfrac{\alpha^2+\alpha\sqrt{\alpha^2+3}}{3}$, см. §2).

4) Найти точную (асимптотически при $n \to \infty$) оценку $|a_n|$ в $\mathcal{U}_\alpha$. Мы предполагаем, что $\max_{f\in\mathcal{U}_\alpha} |a_n|$ достигается для $f_0 \in \mathcal{U}'_\alpha$.

5) Доказать теорему 3.2 для $\alpha \in (1, 1.65)$ (см. замечание к теореме 3.2). (*D.M. Campbell*)

6) Найти точное значение $R(\alpha)$ (или уточнить оценки) в теореме 3.3.

7) В пространстве X (см. §4) найти необходимые и достаточные условия на функцию $f \in \mathfrak{S}$, чтобы она принадлежала int$\mathfrak{S}$. (*D.M. Campbell, J.A. Cima, J.A. Pfaltzgraff*)

8) В пространстве X (см. §4) с нормой (4.3) найти радиус наибольшей окрестности в $\mathcal{U}_\alpha$ (он $\geq 2(\alpha-1)$ и, возможно, равен $2(\alpha-1)$), радиус наибольшей окрестности в $\mathfrak{S}$ (он ≥ 1 и, возможно, равен 1).

9) В связи с теоремой 5.21 доказать, что при любом $\alpha > 1$ существуют функции из $\mathcal{U}_\alpha$, имеющие любое наперед заданное не более чем счетное множество н.и.р. [67].

10) Найти точное значение $A(\mathcal{U}_\alpha)$ (см. (6.2)). Мы предполагаем, что $A(\mathcal{U}_\alpha) = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2}$.

11) Найти точное значение λ_α (см. §7, 3^0). Мы предполагаем, что $\lambda_\alpha = 1/2\alpha$. Найти точное значение C_α (см. теорему 7.4).

12) Пусть $f \in \mathcal{U}^l_\alpha(\delta)$, $\delta \in (0,1)$. Доказать или опровергнуть существование интервала (x', x'') из теоремы 9.5, 3).

13) Для функций из S_H (см. §10, 1^0) с вещественными коэффициентами известна [120] точная оценка: $|a_n(f)| < \dfrac{1}{3}(2n^2+1)$, $n = \pm 2, \pm 3, \ldots$. Эта же оценка справедлива [120] для подклассов S_H звездообразных функций и функций, выпуклых в некотором направлении. В [119] высказана гипотеза, что эта оценка справедлива в S_H. Доказать или опровергнуть.

14) В правой части неравенства (10.9) вместо K получить точное значение постоянной.

15) Найти область Кёбе семейства $H(\alpha, K)$ (см. §10, 2^0).

Литература

[1] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.I*// Math. Ann. 1964. Hf. 155. P. 108–154.

[2] Bieberbach L. *Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*// S.B. Preuss. Acad. Wiss. 1916. 138. S. 940–955.

[3] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.II*// Math. Ann. 1964. Hf. 156. P. 226–262.

[4] Kaplan W. *Close-to-convex schlicht functions*// Mich. Math. J. 1952. № 1. P. 169–185.

[5] Reade M. *Sur une classe de fonctions univalentes* // C.R. Acad. Sci. Paris, 1954. V. 239. P. 1758–1759.

[6] Reade M. *On close-to-convex univalent functions* // Mich. Math. J. 1955. V. 3. P. 59–62.

[7] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1966.

[8] Paatero V. *Uber die Konforme Abbildung von Gebieten deren Rander von beschrankter Drehung sind*// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 1931. V. 33. P. 1–78.

[9] Старков В. В., Димков Г. М. *Об одном линейно-инвариантном семействе, обобщающем класс близких к выпуклым функций*// Докл. Болгарской АН. 1985. Т. 38. № 8. С. 967–968.

[10] Старков В. В. *О некоторых подклассах линейно-инвариантных семейств, имеющих интегральное представление*/ Петрозаводский гос. ун–т. Петрозаводск, 1981. 46 с. Деп. в ВИНИТИ, 8.07.81, № 3341-81.

[11] Старков В. В. *О некоторых линейно-инвариантных семействах функций, имеющих интегральное представление*// Изв. вузов. Математика. 1983. № 5. С. 82–85.

[12] Starkov V. V. *Equivalent definitions of linear invariant families (In Polish)*// Materiały XI Konf. Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Łódź. 1990. S. 34–38.

[13] Campbell D. M. *Locally univalent fnctions with locally univalent derivatives*// Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 162. P. 395–409.

[14] Старков В. В. *Об одном неравенстве для коэффициентов функций некоторого линейно-инвариантного семейства*// Докл. Болгарской АН. 1984. Т. 37. № 8. С. 999–1002.

[15] Gehring F. M., Hayman W. K. *An inequality in the theory of conformal mapping* // J. Math. Pure Appl. 1962. V. 127. P. 353–361.

[16] Lavrentieff M. *Sur la représentation conforme*// C.R. Acad. Sci. Paris, 1927. V. 184. P. 1407–1409.

[17] Seidel W., Walsh J. L. *On derivatives of functions analytic in the unit circle and their radii of univalence and of p-valence*// Trans. Amer. Math. Soc. 1942. V. 52. P. 128–216.

[18] Gattegno C., Ostrowski A. *Représentation conforme à la frontière*// Mém. Sci. Math. Paris, 1949. 109 n. 110.

[19] Старков В. В. *Об одной вариационной формуле в классе функций Базилевича* // Вестник Ленингр. ун–та. 1978. № 19. С. 81–88.

[20] Колмогоров А. П., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1968.

[21] Campbell D. M., Cima J. A., Pfaltzgraff J. A. *Linear space and linear-invariant families of locally univalent analyttic functions* // Manuscripta Math. 1971. V. 4. P. 1–30.

[22] Campbell D. M. *Applications and proof of uniqueness theorem for linear invariant families of finite order*// Rocky Mount. J. Math. 1974. V. 4. № 4. P. 621–634.

[23] Campbell D. M., Ziegler M. R. *Argument of derivative linear-invariant families of finite order and the radius of close-to-convexity*// Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1974. V. 28. P. 5–22.

[24] Старков В. В. *К оценке коэффициентов в классе U'_α локально однолистных функций*// Вестник ленингр. ун–та. 1984. № 13. С. 48–54.

[25] Kayumov I. R., Starkov V. V. *Estimate of logarithmic coefficients of locally univalent functions*// XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium. Eds.: Laine / Martio, Walter de Gruyter& Co. Berlin, New York, 1996, P. 239–245.

[26] Старков В. В., Черников А. Н. *Оценки коэффициентов в универсальных линейно-инвариантных семействах порядка α*// Вопросы функционального анализа. Петрозаводск: Изд–во ПетрГУ, 1992. С. 56–59.

[27] Grunsky H. *Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung*// Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 1934. V. 43. P. 140–142.

[28] Labelle G., Rahman Q. I. *Remarque sur la moyenne arithmétique de fonctions univalentes convexes*// Can. J. math. 1969. V. 21. P. 977–981.

[29] Campbell D. M. *The radius of convexity of a linear combination of functions $\mathcal{R}$, $CV_k(\beta)$, $\mathfrak{S}$ or $\mathcal{U}_\alpha$*// Can. J. Math. 1973. V. 25. № 5. P. 982–985.

[30] Rahman O. I., Szynal J. *Linear combinations of convex and of close-to-convex functions*// Bull. Pol. Acad. Sci.. Math. 1990. V. 38. № 1-2. P. 139–149.

[31] Hayman W. K. *Research Problems in Function Theory.* London: The Athlone Press Univ. London, 1967.

[32] Campbell D. M. *A survey of properties of the convex combination of univalent functions*// Rocky Mount. J. Math. 1975. V. 5. № 4. P. 475–492.

[33] Biernacki M. *Sur les fonctions univalentes*// Mathematica. 1936. V. 12. P. 49–64.

[34] Tao Shah. *Goluzin's number* $(3-\sqrt{5})/2$ *is the radius of superiority in subordination*// Sci. record. 1957. V. 1. P. 219–222.

[35] MacGregor T. H. *Majorization by univalent functions*// Duke math. J. 1967. V. 34. P. 95–102.

[36] Tao Shah. *On the radius of superirity in subordination*// Sci. Record. 1957. V. 1. P. 329–333.

[37] Lewandowski Z. *Sur les majorantes des fonctions holomorpes dans le cercle* $|z| < 1$// Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1961. V. 15. P. 5–10.

[38] Campbell D. M. *Majorization-subordination theorems for locally univalent functions*// Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78. № 4. P. 535–538.

[39] Campbell D. M. *Majorization-subordination theorems for locally univalent functions. III*// Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 198. P. 297–306.

[40] Campbell D. M. *Majorization-subordination theorems for locally univalent functions. II* // Canad. J. Math. 1973. V. 25. № 2. P. 420–425.

[41] Barnard R. W., Kellogg Ch. N. *Campbell's conjecture on a majorization-subordination result for convex functions*// Rocky Mount. J. Math. 1984. V. 14. № 2. P. 331–339.

[42] Hörnich H. *Ein Banachraum analytischer Funktionen in Zuzammenhang mit den schlichten Funktionen*// Monath. Math. 1969. V. 73. P. 36–45.

[43] Becker J. *Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien*// Mathm Ann. 1973. V. 202. P. 321–335.

[44] Becker J., Pommerenke Ch. *Schlichtheitskriterien und Jordangebiete*// J. reine angew. Math. 1984. V. 354. P. 74–94.

[45] Campbell D. M. *Uniform convergence on compacta and locally univalent analytic functions of finite order*// Monatshefte für Math. 1973. V. 77. P. 21–23.

[46] Zygmund A. *Trigonometric Series* I. Cambridge, 1959.

[47] Godula J., Starkov V. V. *Applications of idea of Möbius invariance to obtain equivalent definitions of Bloch functions*// Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1995. V. 49. P. 41–58.

[48] Cima J. A., Stegbuchner H. *On the duals of some spaces of locally schlicht functions*// Indiana Univ. Math. J. 1978. V. 27. № 4. P. 539–550.

[49] Anderson J. M., Clunie J., Pommerenke Ch. *On Bloch functions and normal functions*// J. Reine. Angew. Math. 1974. V. 270. P. 12–37.

[50] Cima J. A., Pfaltzgraff J. A. *A normed linear space containing the schlicht functions*// Monatshefte für Math. 1971. V. 75. P. 296–302.

[51] Носиро К. *Предельные множества.* М.: ИЛ, 1963.

[52] Коллингвуд Э., Ловатер А. *Теория предельных множеств.* М.: Мир, 1971.

[53] Lelong–Ferrand J. *Sur la reprézentation conforme des bandes*// J. Anal. Math. 1952/53. V. 2. P. 51–71.

[54] Campbell D. M., Pfaltzgraff J. A. *Boundary behaviour and linear invariant families*// J. d'Analyse Math. 1976. V. 29. P. 67–92.

[55] Visser C. *Über beschränkte analytische Funktionen und die Randverhältnisse bei konformen Abbildingen*// Math. Ann. 1933. V. 107. P. 28–39.

[56] Walsh J. L., Geier D. *Zur Methode der variablen Gebiete bei der Randverzerrung*// Arch. Math. 1955. V. 6. P. 77–86.

[57] Ostrowski A. *Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung*// Prace Mat.-Fiz. 1936. V. 44. P. 371–471.

[58] Ferrand J. *Étude de la représentation conforme an voisinage de la frontiȓe*// Ann. Sci. École Norm. Super. 1942. V. 59. № 3. P. 43–106.

[59] Ferrand J. *Nouvelle démonstration d'un théorème de M. Ostrowski* // C. R. Acad. Sci. Paris, 1945. V. 220. P. 550–551.

[60] Ahlfors L. *Quasiconformal reflections*// Acta Math. 1963. V. 109. P. 291–301.

[61] Pommerenke Ch. *Boundary behaviour of conformal maps.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.

[62] Pommerenke Ch. *Univalent functions.* Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1975.

[63] Krzyz J. *On the maximum modulus of univalent functions*// Bull. Acad. Polonici Sci. 1955. V. CI. III. № 3. P. 203–206.

[64] Хейман В. К. *Многолистные функции.* М.: ИЛ, 1960.

[65] Bieberbach L. *Einführung in die konforme Abbildung.* Berlin: Sammlung Göschen, 1967. Band 768/786a.

[66] Старков В. В. *Теоремы регулярности для универсальных линейно-инвариантных семейств функций*// Сердика. София, 1985. Т. 11. С. 299–318.

[67] Starkov V. V. *Directions of intensive growth of locally univalent functions*// Complex Anal. and Appl.'87. Sofia, 1989. P. 517–522.

[68] Лебедев Н. А. *Принцип площадей в теории однолистных функций.* М.: Наука, 1975.

[69] Базилевич И. Е. *Асимптотическое свойство производных одного класса регулярных в круге функций*// Исслед. по соврем. пробл. теории функций компл. перем.: Сб. статей. М: Физматгиз, 1961. С. 216–219.

[70] Старков В. В. *О подклассах S_α однолистных функций*// Вестник ЛГУ. 1978. № 7. С. 82–87.

[71] Широков Н. А. *О теореме регулярности Хеймана*// Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1972. Т. 24. С. 182–200.

[72] Nevanlinna R. *Eindeutige analytische Funktionen.* Berlin; Göttingen; Heidelberg, 1953.

[73] Shah S. M., Trimble S. Y. *Univalent functions with univalent derivatives, III*// J. Math. Mech. 1969/1970. V. 19. P. 451–460.

[74] Shah S. M., Trimble S. Y. *Univalent functions with univalent derivatives, II*// Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 144. P. 313–320.

[75] Shah S. M., Trimble S. Y. *Univalent functions with univalent derivatives*// Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75. P. 151–157.

[76] Goodman A. W. *Univalent functions I,II.* Mariner Publ. Comp. Inc. USA. 1983.

[77] Paatero V. *Ü ber Gebiete von beschrankter Randdrelung*// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1933. V. 37. P. 9.

[78] Koepf W. *Close-to convex functions and linear-invariant families*// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 1983. V. 8. P. 349–355.

[79] Lewandowski Z. *Sur l'identité de certain classes de fonctions univalentes. I*// Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1958. V. 12. P. 131–146.

[80] Lewandowski Z. *Sur l'identité de certain classes de fonctions univalentes. II*// Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1960. V. 14. P. 19–46.

[81] Димков Г. М., Старков В. В. *Об одном обобщении близких к выпуклым функций*// Плиска. София, 1989. Т. 10. С. 62–76.

[82] Godula J., Starkov V. V. *On Jakubowski functional in* $\mathcal{U}_\alpha^*$// Zeszyty Nauk Politech. Rzeszowskiej. Rzeszow, 1989. V. 60. P. 37–43.

[83] Reade M. O. *The coefficients of close-to-convex functions*// Duke Math. J. 1956. V. 23. P. 495–462.

[84] Pommerenke Ch. *On close-to-convex analytic functions*// Trans. Amar. Math. Soc. 1965. V. 114. P. 176–186.

[85] Bieberbach L. *Aufstellung und Beweis der Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen*// Math. Z. 1919. V. 4. P. 295–305.

[86] Pinchuk B. *A variational method for functions of bounded boundary rotation*// Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 138. P. 107–113.

[87] Aharonov D., Friedland S. *On an inequality connected with the coefficient conjecture for functions of bounded boundary rotation*// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 1972. V. 524.

[88] Branges L. A. de. *Proof of the Bieberbach conjecture*// Acta Math. 1985. V. 154. P. 137–152.

[89] Dimkov G. M., Starkov V. V. *Le problème de coefficients dans une classe de fonctions localement univalentes*// Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1988. V. 42. P. 9–15.

[90] Godula J., Starkov V. V. *On the Jakubowski's functional in a linearly invariant family*// Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej. Rzeszow, 1990. V. 73. P. 19–27.

[91] Jakubowski Z., Szwankowski A. *On some extremal problem in the klass of holomorphic simmetric univalent functions*// Comment. Math. 1990. V. 29. P. 195–207.

[92] Godula J., Starkov V. V. *Logarithmic coefficients of locally univalent functions*// Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1989. V. 43. P. 9–13.

[93] Waniurski J. *On the Bloch-Landau constant for Möbius transform of convex mappings*// Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1988. V. 42. P. 159–169.

[94] Szynal J., Waniurski J. *Some problems for linearly invariant families*// Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1976. V. 30. P. 91–102.

[95] Прохоров Д. В. *Линейно-инвариантные расширения семейств аналитических функций*// Изв. вузов (матем.). 1979. № 9. С. 41–47.

[96] Bender J. *Some extremal theorems for multivalently star-like functions*// Duke Math. J. 1962. V. 29. № 1. P. 101–106.

[97] Duren P. L., Shapiro H. S., Shields A. L. *Singular measures and domains not of Smirnov type*// Duke Math. J. 1966. V. 33. P. 247–254.

[98] Becker J. *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonforme forsetzbare schlichte Funktionen*// J. reine Angew. Math. 1972. V. 255. P. 23–43.

[99] Pfaltzgraff J. *Univalence of the integral of* $f'(z)^\lambda$// Bull. London Math. Soc. 1975. V. 7. P. 254–256.

[100] Ahlfors L. V. *Sufficient conditions for quasi-conformal extension*// Ann. of Math. Studies. 1974. V. 79. P. 23–29.

[101] Robertson M. S. *Univalent functions* $f(z)$ *for which* $zf'(z)$ *is spiral-like*// Mich. math. J. 1969. V. 16. P. 97–101.

[102] Royster W. C. *On univalence of a certain intagral*// Mich. Math. J. 1965. V. 12. P. 385–387.

[103] Аксентьев Л. А., Нежметдинов И. Р. *Достаточные условия однолистности некоторых интегральных представлений*// Тр. семинара по краев. задачам. Казань: Изд–во Казанского ун–та, 1982. Т. 18. С. 3–11.

[104] Pommerenke Ch. *On Bloch functions*// J. London Math. Soc. 1970. V. 2. № 2. P. 241–267.

[105] Godula J., Starkov V. V. *On Bloch functions and univalence of the integral of* $(h')^\lambda$// XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium. Eds.: Laine/Martio, Walter de Gruyter& Co. Berlin; New York, 1996. P. 31–37.

[106] Godula J., Starkov V. V. *Estimates of constants connected with linearly invariant families of functions*// Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1994. V. 48. P. 43–51.

[107] Ma W., Minda D. *Linear invariance and uniform local univalence*// Complex Variables. 1991. V. 16. P. 9–19.

[108] Pommerenke Ch. *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric*// Arch. Math. 1979. V. 32. P. 192–199.

[109] Arazy J., Fisher S., Peetre J. *Möbius invariant function space*// J. Reine Angew. Math. 1985. V. 383. P. 110–145.

[110] Peloso M. M. *Möbius invariant spaces on the unit ball*// Mich. Math. J. 1992. V. 39. P. 509–535.

[111] Кирьяцкий Э. Г. *Об одном семействе функций, связанном с дробно-линейным преобразованием единичного круга*// Liet. Matem. Rink. 1976. V. 16. P. 103–109.

[112] Кирьяцкий Э. Г. *Некоторые свойства функций с отличной от нуля разделенной разностью*// Liet. Matem. Rink. 1972. V. 12. P. 43–55.

[113] Кирьяцкий Э. Г. *О некоторых операторах, связанных с дробно-линейным преобразованием*// Liet. Matem. Rink. 1974. V. 14. P. 57–66.

[114] Кирьяцкий Э. Г. *О некоторых операторах, связанных с дробно-линейным преобразованием единичного круга*// Liet. Matem. Rink. V. 16. P. 111–122.

[115] Годуля Я., Старков В. В. *Линейно-инвариантные семейства функций, аналитических в поликруге*// Труды Петрозаводского ун–та. Сер. матем. 1995. Т. 2. С. 11–18.

[116] Godula J., Starkov V. V. *Linearly invariant families of functions holomorphic in the unit polydisc*// Banach Center Publ. 1996. V. 40. P. 117–130.

[117] Годуля Я., Старков В. В. *Теорема регулярности для линейно-инвариантных семейств в поликруге*// Изв. вузов. 1995. № 8. С. 21–34.

[118] Bshouty D., Hengartner W. *Univalent harmonic mappings in the plane*// Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1994. V. 48. P. 12–42.

[119] Sheil-Small T. *Constants for planar harmonic mappings*// J. London math. Soc. 1990. V. 42. № 2. P. 237–248.

[120] Clunie J., Sheil-Small T. *Harmonic univalent functions*// Ann. Acad. Sci. Fenn. A1 (Math.). 1984. V. 9. P. 3–25.

[121] Старков В. В. *Гармонические локально квазиконформные отображения*// Труды Петрозаводского ун–та. Сер. матем. 1993. Т. 1. С. 61–69.

[122] Starkov V. V. *Harmonic locally quasiconformal mappings*// Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1995. V. 49. P. 183–197.

[123] Ligocka E. *On the reproducing kernel for harmonic functions on the unit Ball in* $\mathbb{R}^n$// Studia Math. 1987. V. 87. P. 23–32.

[124] Старков В. В. *К проблеме коэффициентов в* U'_α/ Петрозаводский гос. ун–т. Петрозаводск, 1981. 20 с. Деп. в ВИНИТИ, 9.03.82, № 972-82.

[125] Годуля Я., Старков В. В. *О точности некоторых оценок Д. М. Кэмпбэлла и Х. Поммеренке*// Мат. заметки. 1998. Т 63. № 5. С. 665–672.

[126] Makarov N. G. *On the distortion of boundary sets under conformal mappings*// Proc. London Math. Soc. 1985. V. 51. № 3. P. 369–384.

[127] Godula J., Starkov V. V. *On regularity theorems for linearly invariant families of analytic functions in the unit polydisk, II* //Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 1998 (в печати)

[128] Старков В. В. *Круги однолистности гармонических локально квазиконформных отображений и гармонические функции Блоха*// Сиб. матем. журнал. 1997. Т. 38. № 4. С. 915–924.

Оглавление

Institute of Mathematics Maria Curie-Sklodovska University
20-031 Lublin, Poland.
Петрозаводский государственный университет
Россия, Петрозаводск, пр. Ленина, 33.