Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 5, 1998

УДК 515.12

К ВОПРОСУ О РАВНОМЕРНО СВЯЗНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. В. Моисеев

В статье приводится необходимое и достаточное условие, при котором равномерно связное метризуемое пространство является абсолютным ретрактом.

Понятие равномерно связного EC-пространства введено Фоксом [1]. Оно заключается в существовании на пространстве равномерно связывающего отображения. Легко показать,что EC-пространствами являются абсолютные ретракты (см.[1]). Возникает естественный вопрос об обратимости последнего утверждения. Положительный ответ на него получен в случае конечномерных метрических пространств [2],в случае компактных метрических пространств вопрос остается открытым, а в случае произвольных метрических пространств ответ отрицательный. Это следует из известного примера Коути [3] линейного метрического пространства, не являющегося AR-пространством.

Дугунджи в работе [2] приводит одно достаточное, но не необходимое условие, при котором метризуемые EC-пространства являются абсолютными ретрактами. В данной статье получено условие, которое является не только достаточным, но и необходимым.

Определение . *Пусть X — топологическое пространство. Будем говорить, что в окрестности U точки $x \in X$ задана итерированная равномерно связывающая* (IEC) *структура, если существует семейство непрерывных отображений $\lambda_n, n = 0, 1, ...$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $\lambda_0 = id : U \to U, \quad A_0 = U,$
2) $\lambda_{n+1} : A_{n+1} = A_n \times A_n \times I \to X, \quad I = [0,1],$

$$\lambda_{n+1}(x, y, 0) = \lambda_{n+1}(y, x, 1) = \lambda_(x, x, t) = \lambda_n(x),$$

3) *для любой окрестности V любой точки $y \in V \subset U$ существует окрестность $V' \subset V$ такая, что $\lambda_n(V' \times V' ... \times I \times I) \subset V$ для любого n.*

Если $U = U$, то будем говорить, что IEC-структура задана на пространстве X.

Топологическое пространство с IEC-структурой будем называть IEC-пространством.

Если IEC-структуры заданы на некоторой окрестности каждой точки пространства X и эти структуры согласованы, т. е. значения отображений λ_n не зависят от выбора окрестности, то будем говорить, что на пространстве X задана локальная итерированная равномерно связывающая ($LIEC$) структура.

Соответственно определяются $LIEC$-пространства.

Теорема 1. *Пусть X — метризуемое пространство,тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *X является $LIEC$-пространством,*
2) *X является $ANR(\mathfrak{M})$-пространством.*

Теорема 2. *Пусть X— метризуемое пространство, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *X является IEC-пространством,*
2) *X является $AR(\mathfrak{M})$–пространством.*

Доказательство импликации $2 \Rightarrow 1$ теорем 1 и 2.

Пусть X — метрическое пространство, тогда X вкладывается изометрически в некоторое линейное нормированное пространство $H(X)$ (см.[4, с. 88]) таким образом, что X замкнуто в своей выпуклой оболочке $C(X)$. Если X является $ANR(\mathfrak{M})$-пространством, то существует ретракция $r : U \to X$ некоторой окрестности U экземпляра X в $C(X)$. В случае $AR(\mathfrak{M})$-пространств имеет место равенство $U = C(X)$.

Пусть $x \in X; O'$ — некоторая окрестность точки x в пространстве $C(X)$. Пространство $C(X)$ является локально выпуклым, поэтому без ограничения общности окрестность O' можно считать выпуклой. В случае $AR(\mathfrak{M})$-пространства X положим $O' = C(X)$. Обозначим $O = O' \bigcap C(X)$ — окрестность точки x в пространстве X.

Отображения λ_n определяем по индукции. Для этого удобно ввести промежуточные отображения $\lambda'_n : A_n \to X$. При $n = 0$ полагаем $\lambda_0 = \lambda'_0 = id : O \to O$. Пусть определено отображение $\lambda'_n : A_n \to X$, тогда $\lambda'_{n+1} = (1-t) * \lambda'_n(x) + t * \lambda'_n(y)$, где $x, y \in A_n, t \in [0,1]$. Отображение λ_n зададим как композицию $\lambda_n = r * \lambda'_n$.

Проверим три условия определений $LIEC$- и IEC-структур. Первое условие является базой индукции в определении отображений λ_n.

Второе условие определений проверяется непосредственно:

$$\lambda_{n+1}(x, y, 0) = \lambda_{n+1}(y, x, 1) = \lambda_{n+1}(x, x, t) = r(\lambda'_n(x)) = \lambda_n(x).$$

В силу непрерывности ретракции r для любой окрестности V точки $x \in X$ в пространстве X существует выпуклая окрестность V" точки x в пространстве $C(X)$ такая, что $r(V") \subset V$". Рассмотрим окрестность $V' = V" \cap X$ точки x в пространстве X. Ясно, что $V' \subset V$. Выпуклость окрестности V" влечет включение: $\lambda'_n(V' \times V' ... \times I \times I) \subset V"$ для любого $n \in N$, а включение $r(O) \subset V$ обеспечивает выполнение условия: $\lambda_n(V' \times V' \times ... \times I \times I) \subset V$ для любого $n \in N$. Таким образом, условие 3 в определениях IEC- и $LIEC$-структур выполняется и доказательство импликаций 2$\Rightarrow$ 1 теорем 1 и 2 закончено.

Доказательство импликации 1 $\Rightarrow$ 2 теоремы 1. Доказательство будем проводить с помощью характеризационной теоремы Дугунджи (см.[2]) :

Теорема 3. *Пусть Y равномерно локально связно. Тогда Y является $ANR(\mathfrak{M})$-пространством тогда и только тогда, когда для любого открытого покрытия $\mathbb{W}$ пространства Y существует такое измельчение $\mathbb{V}$, что для любого политопа P, любой частичной реализации $f : P_0 \to Y$ в $\mathbb{V}$ нульмерного остова P^0 (см.[2]) существует полная реализация P в $\mathbb{W}$.*

Итак, пусть X — некоторое $LIEC$-пространство, W — некоторое открытое покрытие X. Впишем в $\mathbb{W}$ покрытие $\mathbb{V} = \mathbb{V}$, состоящее из таких множеств V, что семейство $\lambda_n(V \times V \times ... \times I \times I)$, $n \in N$, вписано в $\mathbb{W}$. Это возможно сделать в силу третьего условия в определении IEC-структуры.

Пусть $f_0: P_0 \to X$ — некоторая частичная $\mathbb{V}$-реализация нульмерного остова политопа P, то есть такое отображение, что система $f_0(\sigma \cap P_0)$, где σ пробегает все симплексы из P, вписана в $\mathbb{V}$. Положим, по определению, отображение $\tilde{f}_0 : \sigma \cap P_0 \to A_0$ равным f_0 (множество A_0 обозначено в соответствии с основным определением).

Полную реализацию политопа P будем строить, последовательно продолжая отображение на n-мерные остовы. Пусть существует частичная $\mathbb{W}$-реализация $n-1$-мерного остова политопа P. Зафиксируем семейство гомеоморфизмов h между n-мерными симплексами триангуляции P^n и стандартным n-мерным шаром B^n в пространстве $\mathbb{R}^{\ltimes}$. Мы предполагаем, что заданы отображения $\tilde{f}_{n-1} : \sigma \cap P^n \to A_{n-1}$ и $f_{n-1} : P^{n-1} \to X$, которые связаны равенством $f_{n-1} = \lambda_{n-1} * \tilde{f}_{n-1}$, где σ пробегает все n-мерные симплексы триангуляции P.

Определим два отображения $pr_n^+ : P^n \to P^{n-1}$ и $pr_n^- : P^n \to P^{n-1}$ следующим образом: каждой точке $x \in P^n$ соответствует точка $h(t) = t = (t_1, ...t_n)$, принадлежащая n-мерному единичному шару B_n. Спроектируем точку $h(x) = t$ вдоль первой координатной оси на границу шара B^n, получим две проекции $p^+(t) = (\sqrt{1 - t_2^2 - ... - t_n^2}, t_2, ..., t_n)$ и $p^-(t) = (-\sqrt{1 - t_2^2 - ... - t_n^2}, t_2, ...t_n)$. Положим pr_n^+ равным $h^{-1} * p^+ * h$, аналогично pr_n^- положим равным $h^{-1} * p^- * h$.

Отображение $\tilde{f}_n: \sigma \cap P_n \to A_n = A_{n-1} \times A_{n-1} \times I$ определим так: $\tilde{f}_n(x) = (\tilde{f}_{n-1} \times pr_n^+(x), \tilde{f}_{n-1} \times pr_n^-(x), k(x))$, где

$$k(x) = \frac{\sqrt{1 - t_2^2 - ...t_n^2} - t_1}{2 * \sqrt{1 - t_2^2 - ...t_n^2}}$$

(если $\sqrt{1 - t_2^2 - ... - t_n^2} = 0$, то положим $k(x) = 1$).

Соответственно отображение f_n определяется как композиция $f_n = \lambda_n * \tilde{f}_n$.

Отображение $\tilde{f}_n$ непрерывно на любом n-мерном симплексе, кроме двух точек, отображающихся в полюсы шара B^n, следовательно, композиция $\lambda_n * \tilde{f}_n$ непрерывна на любом n-мерном симплексе в силу второго свойства IEC-структуры. Второе условие в определении IEC-структуры также обеспечивает равенство $f_n|_{P^{n-1}} = f_{n-1}$. Таким образом, f_n является непрерывным продолжением f_{n-1}.

Конструкция покрытия $\mathbb{V}$ обеспечивает тот факт, что все отображения f_n являются частичными $\mathbb{W}$-реализациями политопа P.

Положим отображение f равным на каждом n-мерном симплексе политопа P отображению f_n. В силу сказанного f действительно являются продолжением f_0 и, кроме того, $\mathbb{W}$-реализацией.

Итак, все условия теоремы Дугунджи выполнены и X является $ANR(\mathfrak{M})$-пространством.

Доказательство импликации 1⇒2 теоремы 2.

По теореме 1 пространство X является $ANR(\mathfrak{M})$. По замечанию 3 в работе [5] и его доказательству необходимо проверить, что X связно в любой размерности, но X является равномерно линейно связным пространством, а это влечет связность в любой размерности (см.[2]). Доказательство теорем закончено. □

Résumé

It is given the necessary and sufficient condition that a uniformly connected metrizable space to be an absolute retract in this paper

Литература

[1] Fox R. *On fiber spaces,II*// Bull. Am. Math. Soc. 1943. T. 49. P. 733–738.

[2] Dugundji J. *Locally equiconnected spaces and absolute neighborhood retracts*// Fund. Math. 1965. T. 57. P. 187–193.

[3] Cauty R. *Un espace metrique lineaire qui n'est pas un retracte absolu*// Fund. Math. 1994. T. 146. P. 85–99.

[4] Борсук К. *Теория ретрактов*. М.: Мир, 1971.

[5] Ташметов У. *О связности и локальной связности гиперпространств*// Сиб. мат. журнал. 1974. Т. 15. №25. С. 1115–1130.